

# 분수차 푸리에 변환을 이용한 광 필터와 신경회로망

이수영

한국과학기술원 전기 및 전자공학과  
대전광역시 유성구 구성동 373-1

분수차 푸리에(Fourier) 변환은 푸리에 변환을 일반화시킨 것으로, 위치와 공간주파수의 복합적인 표현을 주나, 한 개의 렌즈로 광학적 구현이 역시 가능하다. 광 신호처리에서 많이 사용되는 정합 필터를 구성하는 푸리에 변환을 각각 분수차로 일반화시킴으로서, 위치 필터와 공간주파수 필터의 특성이 복합된 새로운 필터를 구성할 수 있게 된다. 이 필터 구조는 복소수 연결새기(synapse)를 갖는 신경회로망 구조와 같으며, 이 필터의 설계는 신경회로망의 학습으로 대체된다. 최대경사법과 오차역전파(error back-propagation)에 기초한 학습 법칙이 유도되고, 컴퓨터 시뮬레이션 결과가 제시된다.

## I. 서론

푸리에(Fourier) 변환은 신호처리의 주요 기법의 하나로, 한개의 렌즈로 구현 가능하기 때문에 광 신호처리에서는 더욱 중요한 역할을 수행하게 된다.<sup>[1]</sup> 최근 분수차 푸리에 변환이 개발되었다.<sup>[2,3]</sup> 일반적인 푸리에 변환은 차수가 1인 분수차 푸리에 변환으로 간주되며, 분수차 푸리에 변환은 시간 영역에서의 신호로부터 시간과 주파수가 결합된 특성을 추출한다. 영상에 있어서도 공간과 공간주파수가 결합된 표현법을 제공한다. 분수차 푸리에 변환을 한 신호는 원래 신호와 완전히 푸리에 변환된 신호 사이의 것이라고 쉽게 생각할 수도 있다. 적당한 간격을 둔 하나 또는 두 개의 렌즈 만을 사용하는 간단한 광학적 구조로도 2차원 영상에 대하여 분수차 푸리에 변환을 할 수 있다.<sup>[3]</sup>

간 알려진 바와 같이 Vander Lugt 상판기는 푸리에 변환된 주파수 영역에서 필터링을 함으로서 이동불변(shift-invariant) 필터링을 수행할 수 있다. 한편 신경회로망은 위치 정보를 갖는 패턴의 분류(classification)와 연상 기억(associative memory), 함수 모사에 널리 사용되어 왔다.<sup>[5]</sup> 이동불변 상판기는 적절한 상호 연결 새기(interconnection weight)를 공유하는 Toeplitz형의 연결 행렬(interconnection matrix)을 이용한 전방향(feed-forward) 신경회로망으로 생각할 수도 있다. 이러한 연결 새기 공유(weight-sharing)는 복잡성을 크게 감소시켜 저장능력의 제약을 유발한다. 대신에 부분적 공유 연결(local shared-interconnection)을 사용하여 부분적 이동불변(local shift-invariant) 특성을 구현하는 신

경회로망 모델들이 좋은 분류 성능을 보여주고 있다.<sup>[5-7]</sup>

이 논문에서는 Vander Lugt 상판기의 푸리에 변환을 분수차로 확장하여, 위치와 주파수 영역에서 동시에 필터링을 하는 새로운 시스템을 개발하였다. 그리고 이러한 구조와 신경회로망과의 유사성을 이용하여 필터를 설계하는 새로운 신경회로망을 제안하였다. 분수차 푸리에 변환은 광학적으로 구현이 간단하기 때문에 신경회로망 역시 구현하기가 용이하다.

## II. 분수차 푸리에 변환을 이용한 광 필터

주파수 영역에서의 필터를 이용한 광 컨벌루션(convolution)에 사용된 일반적인 푸리에 변환을  $p_1, p_2$ 의 차수를 갖는 분수차 푸리에 변환으로 일반화시켜 보자. 분수차 푸리에 변환에 대해 다음과 같은 적분식을 쓸 수 있다.

$$U_p(k) = F^p(u(x)) \\ = \int u(x) \exp\left[ \frac{i\pi}{\lambda f_0 \tan \phi} (x^2 + k^2) \right] \\ \exp\left[ -\frac{2\pi i}{\lambda f_0 \sin \phi} xk \right] dx. \quad (1)$$

여기서,  $\lambda$ 는 광파의 파장이고,  $f_0$ 는 임의의 거리이다. 시간과 주파수가 결합된 복합 표현을 잘 이해하기 위해서 식(1)을 다시 쓰면,

$$U_p(k) = \int u(x) \exp\left[ i \frac{2\pi}{\lambda f_o} \frac{(x-k)^2}{2 \tan \phi} \right] \exp\left[ -i \frac{2\pi}{\lambda f_o} x k \tan \frac{\phi}{2} \right] dx \quad (2)$$

이 된다. 여기서 두번째 지수함수 항은  $\phi \approx \pi/2$ 일 때 주도적이 되어 일반적인 푸리에 변환이 된다. 첫번째 지수함수 항은  $\phi \approx 0$ 일 때 주도적이 되어 원래 신호가 된다. (이 글에서 무한대의 적분영역은 표시하지 않겠다.) 이러한 가정 안에서  $p_1$ - $p_2$  필터의 입출력 관계는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} v(z) &= \int U_{p_1}(k) H(k) \exp\left[ \frac{i\pi}{\lambda f_o \tan \phi_2} (z^2 + k^2) \right] \exp\left[ -\frac{2\pi i}{\lambda f_o \sin \phi_2} z k \right] dk \\ &= \int u(x) h(t) \exp\left[ \frac{i\pi}{\lambda f_o} \left( \frac{x^2 - t^2}{\tan \phi_1} + \frac{z^2 - t^2}{\tan \phi_2} \right) \right] dx \quad (3) \end{aligned}$$

여기서  $u(x)$ 와  $v(z)$ 는 각각 입력과 출력이고,  $h(\cdot)$ 는 2개의 분수차 푸리에 변환 사이에 위치한 필터  $H(k)$ 의  $p_f = 2\phi_f/\pi$ 의 차수를 갖는 분수차 푸리에 변환이다.  $\phi_f$ 와  $t$ 는 다음을 만족한다.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tan \phi_1} + \frac{1}{\tan \phi_2} &= \frac{1}{\tan \phi_f} \\ \frac{x}{\sin \phi_1} + \frac{z}{\sin \phi_2} &= \frac{t}{\sin \phi_f} \end{aligned}$$

여기서  $\phi_1 = p_1 \pi/2$ 이고,  $\phi_2 = p_2 \pi/2$ 이다.<sup>[8]</sup>

몇가지 특별한 경우에 대해 살펴볼 필요가 있다. 만약 Vander Lugt 필터에서  $p_1$ 와  $p_2$ 가 모두 1이면,  $\phi_f$ 는  $\pi/2$ 이 되고  $t = x+z$ 이다. 여기서 식(3)는 상관적분(correlation integral)이 된다.  $p_1$ 와  $p_2$ 가  $p_1 + p_2 = 2$  ( $\phi_1 + \phi_2 = \pi$ )를 만족하면  $\phi_f$ 는 다시  $\pi/2$ 가 되고 다음을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} v_{\phi_1}(z) &= \int u(x) h\left(\frac{x+z}{\sin \phi_1}\right) \exp\left[ \frac{i\pi}{\lambda f_o} \frac{x^2 - z^2}{\tan \phi_1} \right] dx \quad (4) \end{aligned}$$

여기서  $h(\cdot)$ 는 필터  $H(k)$ 의 일반적인 푸리에 변환이다. 아래첨자  $\phi_1$ 는  $v(z)$ 가  $\phi_1$ 의 함수임을 나타낸 것이다. Vander Lugt 필터와 비교해서 식(4)는 필

터 함수 안에 크기 변수(scaling factor)  $\sin \phi_1$ 를 갖는다. 이 크기 변수와 지수함수 변조(modulation) 항은 이동불변성(shift-invariance)를 깨뜨리고 약간의 부분적 이동불변성을 갖는 위치 관련 분류를 할 수 있게 한다. 특성 추출 또는 문자, 영상, 음성 분류에 이러한 광학적 필터가 유용하게 사용될 수 있다. 식(4)의 필터뿐 아니라 애매함수(ambiguity function)과 Wigner 분포함수도 얻을 수 있다.<sup>[8]</sup>

### III. 분수차 푸리에 변환을 이용한 광 신경회로망

<그림1>에는 분수차 푸리에 변환을 이용한 공간-주파수 필터와 신경회로망의 유사성이 잘 나타나 있다. <그림1>에서  $u_m$ 과  $v_m$ 은 각각 입력과 출력이고  $U_m$ 과  $V_m$ 은 각각 대응되는 분수차 푸리에 변환과 그 역변환이다. 여기서 분수차 푸리에 변환 연산은 2개의 복소수 시냅스 세기들(synaptic weights)  $W_{mn}^{(1)}$ 와  $W_{lm}^{(2)}$ , 그리고  $U_m$ 과  $v_l$ 에서의 선형 결합으로 바뀌어 진다. 분류 문제에 있어서는 부가적인 시그모이드(Sigmoid)함수  $S(\cdot)$ 가 출력단에서 사용될 수도 있다.  $H_m$ 들은 2개의 분수차 푸리에 변환 사이의 필터 투과도이고 적용 학습에 구할 수 있다.

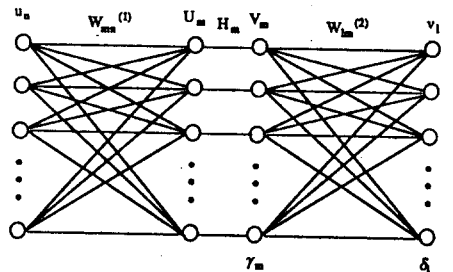
수학적 표현으로 나타내면,

$$U_m = \sum_n W_{mn}^{(1)} u_n, \quad V_m = H_m U_m, \quad (5a)$$

$$v_l = \sum_m W_{lm}^{(2)} V_m, \quad y_l = S(|v_l|^2) \quad (5b)$$

이 된다. 식(1)로부터 고정된 전역적 상호연결(fixed global interconnection)은 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} W_{mn}^{(1)} &= \exp\left[ \frac{i\pi}{\lambda f_o \tan \phi_1} (m^2 \Delta k^2 + n^2 \Delta x^2) \right. \\ &\quad \left. - \frac{i 2\pi}{\lambda f_o \sin \phi_1} \Delta k \Delta x \right] mn \quad (6a) \end{aligned}$$



<그림1> 공간-주파수 필터와 신경회로망의 유사성

$$W_{lm}^{(2)} = \exp \left[ \frac{i\pi}{\lambda f_o \tan \phi_2} (m^2 \Delta k^2 + l^2 \Delta z^2) - \frac{i 2\pi}{\lambda f_o \sin \phi_2} \Delta k \Delta z l m \right] \quad (6b)$$

여기서  $\Delta x$ ,  $\Delta z$ ,  $\Delta k$ 는 화소(pixel) 사이의 거리이고, 같은 값을 갖도록 한다.  $W_{mn}^{(1)}$ 와  $W_{lm}^{(2)}$ 가 모두 대칭이라는 점을 유의할 필요가 있다.

이 신경회로망은 기존의 많이 사용되는 신경회로망과 다른 점이 있다. 보통의 신경회로망 인접세기(synapse)는 실수 값을 가지나, 식(6)는 복소수이다. 이로부터 실수의 출력을 얻기 위하여, 식(5a)에서는 출력을 복소수 크기의 제곱의 함수로 표시하였다. 즉, 푸리에 변환 뿐만이 아니라 신경회로망 자체도 보다 일반화되었다.

고정된 전역적인 시냅스와 적응적인 부분 제어 이득(adaptive local control gain)을 갖는 이러한 구조는 TAG(Training by Adaptive Gain) 신경회로망 모델<sup>[9]</sup>과 유사하며, 흔히 쓰이는 오차 역전파(error back-propagation) 학습 알고리즘을 적용할 수 있다. 전체 출력 오차를 다음과 같이 정의하면 모든 저장된 입력력쌍 ( $u^i, l^j$ )에 대해 오차 역전파<sup>[8]</sup>나 유전자 알고리즘으로 이 신경회로망을 훈련시킬 수 있다.

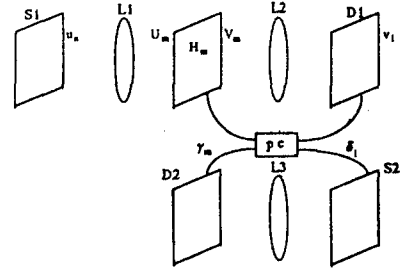
$$E = \frac{1}{4} \sum_i \sum_j (l_i^j - y^j)^2 \quad (7)$$

필터 함수  $H_m$ 뿐 아니라 분수차 푸리에 변환의 차수  $\phi_1$ 도 변경할 수 있다. 오차 역전파 학습 알고리즘을 사용하고 푸리에 변환의 차수를 변경하는 경우 오차 함수의 기울기는 다음과 같이 계산될 수 있다.

$$\frac{\partial E}{\partial \phi_1} = \sum_{m,n} \frac{\partial E}{\partial W_{mn}^{(1)}} \frac{\partial W_{mn}^{(1)}}{\partial \phi_1} + \sum_{l,m} \frac{\partial E}{\partial W_{lm}^{(2)}} \frac{\partial W_{lm}^{(2)}}{\partial \phi_1} \quad (8)$$

첫번째 층에서 특성을 추출하고 다음 층에서 분류를 수행하는 다층 분류 신경회로망에서 분수 차수의 적응 학습은 적절한 특성 추출을 위해 필수적이다.

<그림2>에서 이 단층 신경회로망을 3개의 얇은 렌즈와 1개의 공간광변조기(Spatial Light Modulator, SLM)으로 구현하였다. 위의 2개 렌즈는 각각 신호의 순방향 전달을 위한 분수차 푸리에 변환을 위한 것이고, 아래의 렌즈는 오차 역전파를 위한 것이다. 이것은 기존의 다면 홀로그래프<sup>[10]</sup>이나 공



<그림2> 광 신경회로망의 구성도

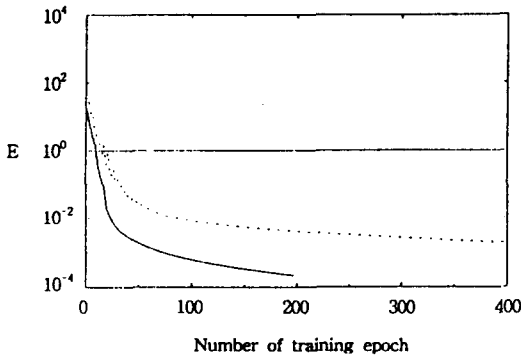
간광변조기와 렌즈 배열<sup>[11,12]</sup>, 또는 체적 홀로그래프<sup>[13]</sup>을 사용한 광학적 구조보다 훨씬 간단하다. 오차 역전파 역시 하나의 얇은 렌즈를 필요로 한다. 이러한 모듈을 몇 개 모아 다층 신경회로망을 구성한다. 이 경우 첫번째 층은 분수차 푸리에 변환에서 높은 차수를 배정하여 지역적인 특성(local feature)을 강조하고 그 다음의 층에서는 위치와 관련된 분류를 위해서 점차 분수차 푸리에 변환의 차수를 줄여 나갈 수도 있다. 전체 네트워크는 오차 역전파나 유전자 알고리즘에 의해 적용될 수 있다.

실제 광학적으로 구현할 때 한가지 문제가 일어날 수 있다. 설사  $h(\cdot)$ 가 대칭적인 실수 함수라고 하더라도 그것의 푸리에 변환  $H(k)$ 는 복소함수가 된다. 이러한 경우 위상만을 다루는 필터의 성능을 조사해 볼 필요가 있다.

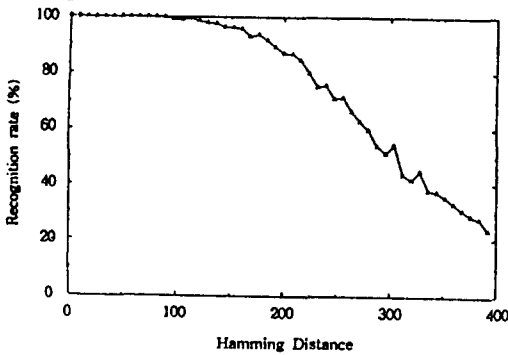
여러가지 특성의 추출을 포함하는 경우나 애매함수(ambiguity function)와 Wigner 분포 함수를 구하는 경우에는, 동시에 여러개의 다른 분수차 푸리에 변환을 하고 싶을 것이다. 이것은 하나의 렌즈를 쓰는 대신 렌즈 배열을 사용함으로써 가능하다. 같은 거리  $Z$ 를 사용하기 위해서 렌즈 배열의 각 작은 렌즈의 초점거리는  $f = f_o / \sin \phi = Z / \tan(\phi/2) \sin \phi$ 가 되어야만 한다.

#### IV. 컴퓨터 시뮬레이션 결과

제안된 신경회로망의 유용성을 보이기 위해서 영문자와 숫자 패턴 인식을 훈련시켰다. 각 패턴은 32x32 이진 화소로 이루어져 있다. <그림3>에서 출력 오차는 학습시간의 함수로 그려져 있다. 실선과 점선은 각각 10개, 30개 패턴의 결과를 각각 나타낸다. 일부 바뀐 패턴에 대한 인식율이 <그림4>에서 훈련 패턴과 시험 패턴 사이의 Hamming 거리와 함수로 그려져 있다. 이것은 제안된 새로운 신경회로망의 강인성(robustness)을 명확히 보여주는 것이



<그림3> 신경회로망의 학습 특성



<그림4> 학습된 신경회로망의 강인성

다. 두 개의 그림은 모두 제한된 신경회로망을 분류의 용도에 응용하였을 때의 유용성을 보여주고 있다.

V. 결론

이 글에서는 공간과 주파수를 모두 필터링하기 위한 새로운 광학적 구조의 신경회로망과 분수차 푸리에 변환을 사용하는 적응학습 신경회로망 모듈을 제안하였다. 복잡한 다층 신경회로망은 이러한 모듈을 직렬 또는 병렬로 연결하여 구성된다. 구조로 매우 간단하여, 적응학습 신경회로망의 대규모 광학적 구현이 가능하게 되었다.

\* 이 논문은 한국과학기술원 교수 기본연구비의 지원을 받은 것입니다.

참고 문헌

1. W.T. Cathey, S. Ishihara, S.Y. Lee, and J. Chrowstoki, "Optical information processing systems," Japanese IEICE Trans.

- Fundamentals, E75A, 28-36 (1992)
2. D. Mendlovic and H. M. Ozaktas, "Fractional Fourier transforms and their optical implementation: I", J. Opt. Soc. Am. A, 10, 1875-1881 (1993)
3. A. W. Lohmann, "Image rotation, Wigner rotation, and the fractional Fourier transform," J. Opt. Soc. Am. A, 10, 2181-2186 (1993)
4. R.P. Lippmann, "An introduction to computing with neural nets," IEEE ASAP Magazine, 3, 4-22 (1987)
5. K. Fukushima, "Neocognitron: A hierarchical neural network capable of visual pattern recognition," Neural Networks, 1, 119-130 (1988)
6. A. Waibel, T. Hanazawa, G. Hinton, K. Shikano, and K. Lang, "Phoneme recognition using time-delay neural networks," IEEE Trans. ASSP, 37, 328-339 (1989)
7. Y. Le Cun, B. Boser, J.S. Denker, D. Henderson, R.E. Howard, W. Hubbard, and L.D. Jackel, "Backpropagation applied to handwritten zip code recognition," Neural Computation, 1, 541-551 (1989)
8. S.-Y. Lee and H. Szu, "Fractional Fourier transforms, wavelet transforms, and adaptive neural networks," Optical Eng. 33, 2326-2330 (1994)
9. H.-J. Lee, S.-Y. Lee, S.-Y. Shin, and B.-Y. Koh, "TAG : A neural network model for large-scale optical implementation," Neural Computation, 3, 135-143 (1991)
10. J.S. Jang, S.W. Jung, S.Y. Lee, and S.Y. Shin, "Optical implementation of the Hopfield model for two-dimensional associative memory," Opt. Lett., 13, 2480-2485 (1988)
11. J.S. Jang, S.Y. Shin, and S.Y. Lee, "Programmable quadratic associative memory using holographic lenslet arrays," Opt. Lett. 14, 838-840 (1989)
12. S.W. Yuk, H.J. Lee, S.Y. Lee, and S.Y. Shin, "Optical neural networks based on error back-propagation learning for hetero-association of two dimensional patterns," Inter. J. Opt. Computing, 2, 397-407 (1993)
13. D. Psaltis, D. Brady, and K. Wagner, "Adaptive optical networks using photo-refractive crystals," Appl. Opt., 27, 1752-1759 (1988)