

경계요소법에 의한 소음기의 3차원 해석

(Three-dimensional analysis of the mufflers by BEM)

°윤재원* · 임정빈* · 권영필**

(Yoon Je-Won, Im Jung-Bin and Kwon Young-Pil)

Key Words : Boundary Element Method(경계요소법), Insertion loss(삽입손실), Transmission loss(투과손실), Sub-region method(영역분할법), Cut-off frequency(차단주파수)

1. 서론

단순한 형상의 소음기는 평면파이론에 의해 비교적 간단하게 음향성능을 해석적으로 구할 수 있다. 그러나 소음기의 형상이 복잡해지거나 해석하고자 하는 주파수의 범위가 평면파의 차단주파수 이상이 될 경우 소음기 내부의 음장이 평면파에서 벗어나게 되어 평면파 이론에 의한 해석은 실제와 상당한 오차가 발생하게 되므로 음장에 대한 3차원 해석이 필요하다. 이론적으로 3차원 문제를 해석할 수 있는 경우는 형상이 극히 단순한 경우에 국한되므로 유한요소법(FEM), 경계요소법(BEM)과 같은 수치해석적인 방법이 이용되고 있다. 경계요소법은 적분 커널(kernel)의 특이성(singularity) 문제가 있지만 대상 영역의 경계면만을 이산화함으로써 모델링에 소요되는 시간과 노력을 절약할 수 있으므로 음향문제 해석에 있어서 효율적인 방법이라고 할 수 있다^(1,2).

본 연구의 목적은 3차원 경계요소법 프로그램을 개발하고 평면파이론에 의한 해석이 어려운 여러가지 형태의 소음기에 대한 음향성능을 예측하고 실험으로 검증하는 것이다. 특히, 단일영역으로 해석이 불가능한 다공형 소음기에 영역분할법을 적용하여 계산하고 결과를 검토하였다.

2. 관계이론

2-1 경계요소법

공간내에 입사하는 음원이 없는 경우 내부음장의 Helmholtz 적분방정식은 다음과 같다⁽¹⁾.

$$C^0(P)\phi(P) = \int_S \left[\phi(Q) \frac{\partial \psi}{\partial n}(P, Q) - \psi(P, Q) \frac{\partial \phi}{\partial n}(Q) \right] dS(Q) \quad (1)$$

이때 ϕ 는 Helmholtz 방정식 $\nabla^2 \phi + k^2 \phi = 0$ 를 만족하는 속도 포텐셜(velocity potential)이며, 자유음장 Green 함수(free-space Green's function) $\psi(P, Q)$ 는 3차원 공간인 경우 다음과 같다.

$$\psi(P, Q) = \frac{e^{-ikR(P, Q)}}{R(P, Q)} \quad (2)$$

또한 $R(P, Q)$ 는 두 점 P, Q 사이의 거리이며 k 는 파동정수(wave number)이고, n 은 경계면 S 에 수직한 외향법선벡터(outward normal vector)이다.

계수 $C^0(P)$ 는 P 점의 위치에 따라 각각 다른 값을 가지는데 P 점이 해석영역 V 의 외부에 존재하는 경우는 0, V 의 내부에 존재하는 경우는 4π , 그리고 경계면 S 가 부드러운 곡면인 경우 2π 이다.

표면의 형태와 경계값을 근사화시키기 위해 2차 형상 함수를 이용한 isoparametric 변환식은 다음과 같다⁽¹⁾.

$$x_i(\xi) = \sum_{\alpha} N_{\alpha}(\xi) x_{i\alpha} \\ \phi_i(\xi) = \sum_{\alpha} N_{\alpha}(\xi) \phi_{i\alpha} \quad \alpha = 1, 2, \dots, 6$$

* 숭실대학교 대학원, 정회원

** 숭실대학교 기계공학과, 정회원

$$\phi_{,i}(\xi) = \frac{\partial \phi}{\partial n} = \sum_{\alpha} N_{\alpha}(\xi) \phi_{,i\alpha} \quad (3)$$

이때 형상함수 $N_{\alpha}(\xi) = N_{\alpha}(\xi_1, \xi_2)$ 는 Fig. 2에서와 같은 삼각형 요소인 경우 다음과 같다.

$$\begin{aligned} N_1(\xi_1, \xi_2) &= \xi_1(2\xi_1 - 1) \\ N_2(\xi_1, \xi_2) &= [1 - (\xi_1 + \xi_2)] [1 - 2(\xi_1 + \xi_2)] \\ N_3(\xi_1, \xi_2) &= 4\xi_1\xi_2 \\ N_4(\xi_1, \xi_2) &= \xi_2(2\xi_2 - 1) \\ N_5(\xi_1, \xi_2) &= 4\xi_1[1 - (\xi_1 + \xi_2)] \\ N_6(\xi_1, \xi_2) &= 4\xi_2[1 - (\xi_1 + \xi_2)] \end{aligned} \quad (4)$$

따라서, Helmholtz 적분방정식을 isoparametric 변환을 이용해 이산화하고 점 P 를 global number j 에 위치시킨 후 $\phi(P) = \phi(P_j) = \phi_j$, $\phi'(P) = \phi'(P_j) = \phi'_j$ 라 하면 다음과 같다.

$$\sum_{m=1}^N \sum_{\alpha} \phi_{m\alpha} a_{mj}^{\alpha} - \phi_j; \sum_{m=1}^N c_{mj} = \sum_{m=1}^N \sum_{\alpha} \phi'_{m\alpha} b_{mj}^{\alpha} \quad (5)$$

여기서 N 은 전체 요소수이며, a_{mj}^{α} , b_{mj}^{α} , c_{mj} 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} a_{mj}^{\alpha} &= \int_{S_m} N_{\alpha}(\xi) \frac{\partial}{\partial n} \left[\frac{e^{-ikR_j(\xi)}}{R_j(\xi)} \right] J(\xi) d\xi \\ b_{mj}^{\alpha} &= \int_{S_m} N_{\alpha}(\xi) \left[\frac{e^{-ikR_j(\xi)}}{R_j(\xi)} \right] J(\xi) d\xi \\ c_{mj} &= - \int_{S_m} \frac{\partial}{\partial n} \left[\frac{1}{R_j(\xi)} \right] J(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (6)$$

이때, S_m 은 m 번째 요소의 면적을 $R_j(\xi)$ 는 절점 j 로부터 요소 m 상의 모든 절점까지의 거리를 의미한다.

한편, 식(5)는 식(6)을 이용하여 다음과 같은 행렬식으로 나타낼 수 있다.

$$[A] \{\phi\} = [B] \{\phi'\} \quad (7)$$

이때 ϕ 및 ϕ' 과 음압(p) 및 입자속도(u)의 관계는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \phi}{\partial n} = \phi' \\ p &= -\rho_0 \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = -i\omega \rho_0 \phi \end{aligned} \quad (8)$$

여기서 ρ_0 는 유체의 평균밀도, ω 는 각주파수이다.

따라서, 식(7)에 속도 경계조건이나 음압 경계조건, 음

향 임피던스 경계조건등을 부여함으로써 필요한 물리량(음압, 속도등)을 계산할 수 있다.

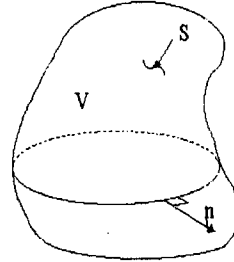


Fig. 1 A three-dimensional cavity

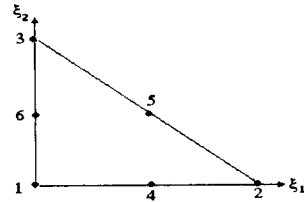


Fig. 2 Triangular element

2-2 삽입손실 및 투과손실

소음기의 음향성능을 표시하는 방법으로 삽입손실(IL : Insertion loss), 투과손실(TL : Transmission loss)등이 있다.

우선, 삽입손실은 동일한 위치에서 소음기가 없을 때 측정된 음압레벨(SPL_1)에 대한 소음기가 있을 때 측정된 음압레벨(SPL_2)의 차이로 다음과 같이 정의한다.

$$IL = SPL_1 - SPL_2 \quad [dB] \quad (9)$$

이러한 삽입손실은 평면파이론으로 해석이 가능하며 음원 임피던스(Z_s)와 방사 임피던스(Z_r)를 고려한 최종 삽입손실을 구하기 위한 식은 다음과 같다⁽³⁾.

$$IL = 20 \log_{10} \left| \frac{Z_r T_{11} + T_{12} + Z_s Z_r T_{21} + Z_s T_{22}}{Z_r T'_{11} + T'_{12} + Z_s Z_r T'_{21} + Z_s T'_{22}} \right| \quad [dB] \quad (10)$$

여기서 '는 소음기가 없을 때의 직관에 대한 출력 값이며 방사 임피던스는 마하수(Mach number)를 M ,

관 끝단의 반지름을 r 이라 할 때 $M^2 < 1$, $kr < 0.5$ 인 범위에서 다음과 같다⁽⁴⁾.

$$Z_r|_{open\ end} = R_r|_{open\ end} + iX_r|_{open\ end}$$

$$R_r|_{open\ end} = \frac{\rho_{oC}}{S} \frac{k_0^2 r^2}{4}, \quad X_r|_{open\ end} = \frac{\rho_{oC}}{S} (0.6k_0 r)$$

$$S = \pi r^2 \quad (11)$$

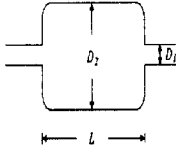
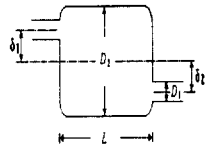
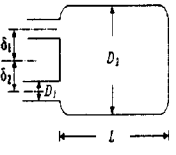
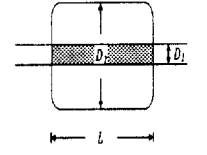
그리고, 투과손실은 입사하는 음압의 진폭에 대한 투과하는 음압의 진폭의 비로 나타내며 끝단이 무반사단인 경우 투과손실을 구하기 위한 식은 다음과 같다.

$$TL = 20 \log_{10} \frac{1}{2} | T_{11} + T_{12} \frac{S}{\rho_{oC}} + T_{21} \frac{\rho_{oC}}{S} + T_{22} | \quad [dB] \quad (12)$$

제 3 장 실험방법

소음기의 투과손실을 측정하기 위한 실험 장치도는 Fig. 3과 같다. FFT에서 나온 신호를 스피커를 통하여 음원으로 발생시켰으며 관의 끝단은 무반사단 조건을 유지시키기 위해 horn을 부착하였고, 마이크로폰을 이용한 음향 전달함수법에 의해 소음기의 투과손실을 측정하였다. 그리고 실험에 사용한 소음기는 [Table 1]과 같다. 이때 $L=204$, $D_1=20$, $D_2=120$, $\delta_1 = \delta_2=30$ [mm], $\theta=30^\circ$ 이다.

[Table 1] Specification of various chambers used in experiments

Type	단순팽창형 소음기	편심형 소음기
		
Type	역공명형 소음기	다공형 소음기
		

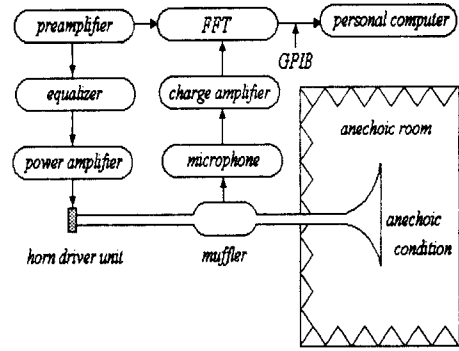


Fig. 3 Schematic diagram of the experimental apparatus

제 4 장 수치해석 및 실험

4-1 단순팽창형 소음기

Fig. 4는 팽창비 36인 단순팽창형 소음기에 대한 투과손실을 평면파이론으로 구한 결과와 경계요소법에 의한 수치해석 결과 및 실험치를 비교하여 나타낸 것이다.

그림에서 보는 바와 같이 차단주파수 3484Hz 정도까지 평면파이론과 경계요소법에 의한 수치해석 결과가 잘 일치하고 있지만 차단주파수 이상에서는 고차모드가 발생하여 평면파이론에 의한 방법으로는 한계성을 보여 주고 있다. 그러나 이러한 고차모드의 영향을 경계요소법에 의한 해석은 잘 나타내주고 있다.

또한 삽입손실을 구하기 위해 전체 시스템을 모델링하여 구해야 하지만 요소수 증가에 따른 컴퓨터 메모리 및 계산시간의 문제점으로 직관과 같이 단순한 형태에 대해서는 평면파이론으로 사단자정수를 구하고, 평면파이론으로 해석이 어려운 부분은 경계요소법을 이용하여 사단자정수를 구한 후 전체 시스템에 대한 사단자정수를 구하여 해석하였다⁽⁵⁾. 그리고 음원의 임피던스는 무반사단으로 가정하였다.

Fig. 5는 수치계산의 타당성을 검증하고자 단순팽창형 소음기에 대한 삽입손실을 평면파이론과 수치계산을 이용해 구한 결과를 비교하여 나타낸 것이다. 그림에서 보는 바와 같이 두 경우의 결과가 거의 동일함을 볼 수 있으며 따라서 개발한 3차원 프로그램으로 삽입손실을

예측할 수 있음을 알 수 있다.

Fig. 6은 단순팽창형 소음기에 대한 삽입손실을 실험치와 비교하여 나타낸 것이다.

4-2 편심형 소음기

Fig. 7은 오프셋 $\delta_1 = \delta_2 = 30mm$, 편심각(θ) 180° 인 편심형 소음기에 대한 투과손실을 실험치, 경계요소법 결과 그리고 평면파이론과 비교하여 나타낸 것이다. 그림에서 보는 바와 같이 축대칭 모드인 (0,1)모드보다 반경방향 모드인 (1,0)모드가 먼저 발생하여 차단주파수가 1674Hz로 단순팽창형 소음기에 비하여 낮아지고 있다. 또한 평면파이론에 의한 해석은 차단주파수 이상의 영역에서 오차를 보이고 있지만 경계요소법에 의한 해석은 잘 일치하고 있다.

Fig. 8은 편심형 소음기에 대한 삽입손실을 나타낸 것이다. Fig. 7과 같이 차단주파수 이상의 영역에서 평면파이론에 의한 해석은 오차를 보이고 있지만 경계요소법에 의한 계산은 실험치와 잘 일치하고 있음을 알 수 있다.

4-3 역공명형 소음기

Fig. 9는 오프셋 30mm, 편심각 180° 인 역공명형 소음기에 대한 예측한 투과손실을 실험치와 비교하여 나타낸 것이다. 그림에서 보는 바와 같이 저주파 대역에서 다른 형태의 소음기보다 투과손실이 큰 것을 알 수 있으며, 특히 515Hz 부근에서 공명현상이 발생되어 투과손실이 다른 값에 비해 현저하게 상승되어 있음을 볼 수 있다⁽⁶⁾.

Fig. 10은 역공명형 소음기에 대한 삽입손실을 나타낸 것이다. 이때 515Hz부근에서 삽입손실이 상승한 이유는 수치계산이 경계요소법으로 구한 사단자정수를 이용하므로 이때의 공진 현상을 나타내 주기 때문이다.

4-4 다공형 소음기

다공형 소음기는 다공관을 사이에 두고 내·외부로 분리되어 있으므로 영역분할법^(7,8)을 사용하여 해석하였

다. 이때 경계요소법을 이용하여 투과손실을 구하기 위해 Rao가 제시한 임피던스 조건을 다공관의 경계조건으로 사용하였다⁽⁴⁾.

$$\frac{Z}{\rho_0 c} = \frac{[7.337 \times 10^{-3} (1 + 72.23M)]}{\sigma} + \frac{[i 2.2245 \times 10^{-5} (1 + 51t_h)(1 + 204d_h)f]}{\sigma} \quad (13)$$

여기서 M 은 마하수(Mach number), t_h 는 공극 두께, d_h 는 공극 지름, σ 는 공극율(porosity)이며 다음과 같이 정의한다.

$$\text{공극율}(\sigma) = \frac{\text{전체 공극수} \times \text{공극 면적}}{\text{다공관의 표면적}} \quad (14)$$

Fig. 11은 공극율 6%인 다공형 소음기에 대한 투과손실을 실험치 및 경계요소법 결과와 비교하여 나타낸 것이다.

4-5 임의 형상의 소음기

Fig. 12는 평면파이론으로 해석이 어려운 임의의 단면을 갖는 소음기의 음향성능을 구하기 위해 선정한 모델을 나타낸 것이다. 이때, 소음기의 길이는 250, 높이는 190, 입구의 길이는 70, 40, 출구는 50, 50 [mm]이다. 이러한 형태의 소음기는 엔진 흡기계를 구성하는 일부 분인 공기청정기(air cleaner)이며 문제시되는 흡기 소음이 저주파임을 감안하여 해석범위를 1200Hz정도까지 설정하였다. Fig. 13과 Fig. 14에서 보는 바와 같이 이러한 소음기의 투과손실 및 삽입손실의 형태는 평면파이론에 의한 해석으로는 어렵지만 경계요소법을 이용하여 효과적인 해석이 가능함을 보여주고 있다.

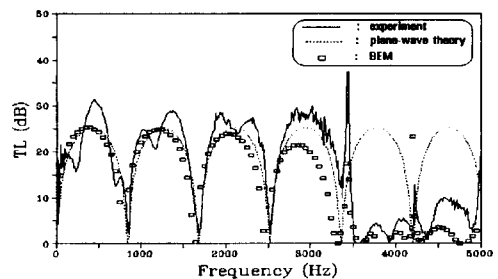


Fig. 4 Transmission loss of a simple expansion chamber

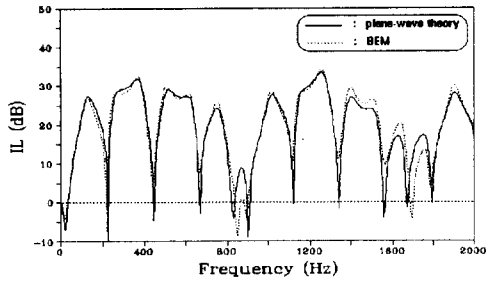


Fig. 5 Comparison of plane-wave theory and BEM

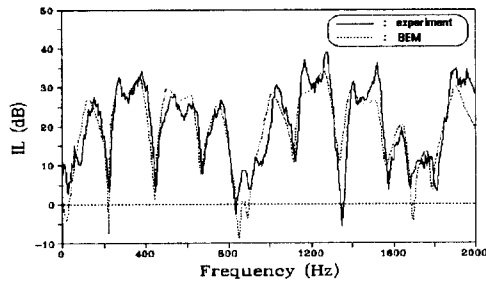


Fig. 6 Insertion loss of a simple expansion chamber

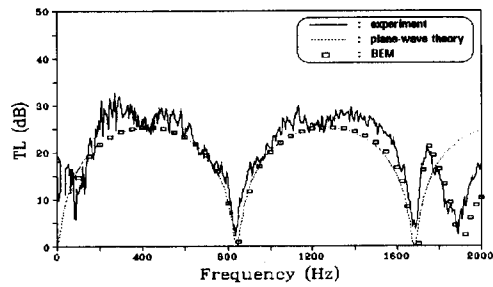


Fig. 7 Transmission loss of an offset expansion chamber

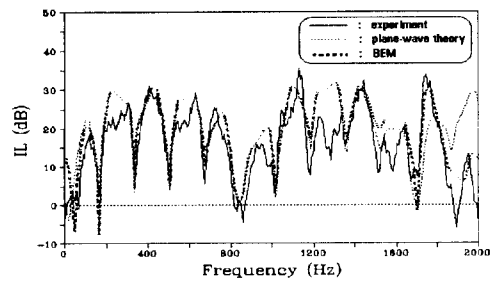


Fig. 8 Insertion loss of an offset expansion chamber

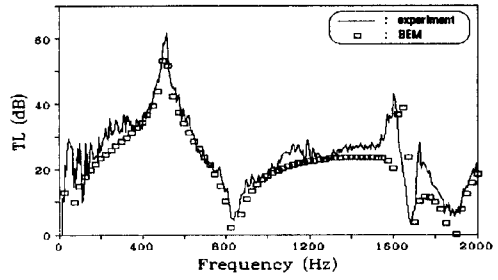


Fig. 9 Transmission loss of a reversing chamber

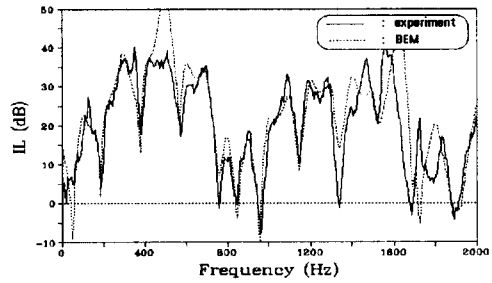


Fig. 10 Insertion loss of a reversing chamber

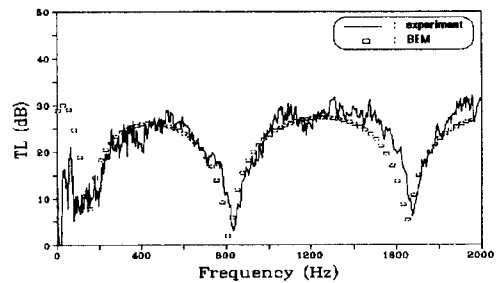


Fig. 11 Transmission loss of a perforated tube chamber

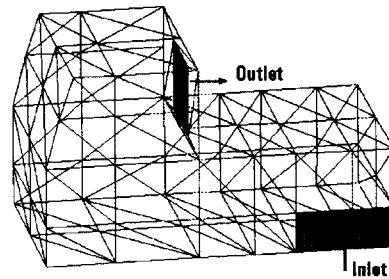


Fig. 12 An air cleaner

참고 문헌

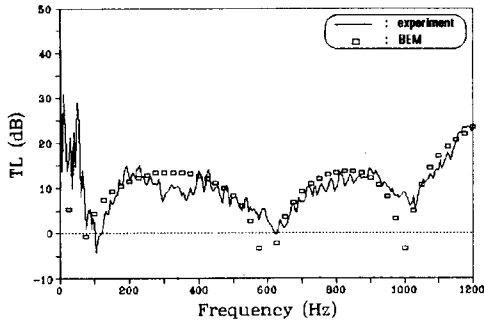


Fig. 13 Transmission loss of Fig.12

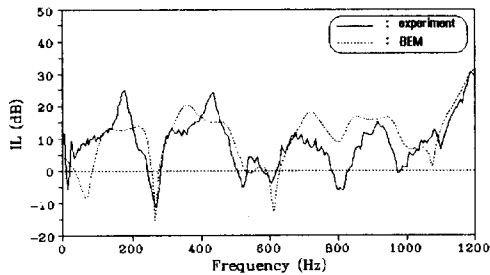


Fig. 14 Insertion loss of Fig.12

제 5 장 결 론

3차원 경계요소법을 이용하여 소음기의 성능을 구할 수 있는 컴퓨터 프로그램을 개발하고 여러가지 형태의 소음기에 적용시켜 실험결과와 비교하여 본 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

단순팽창형 소음기나 편심형 소음기의 경우 차단주파수 이상의 영역에서 평면파이론으로 해석이 어려운 부분의 해석이 가능하며, 역공명형 소음기의 경우 특정 주파수에서 발생하는 공명현상도 해석이 가능하다. 그리고 다공형 소음기의 경우 다공관을 경계로 내·외부로 분할된 공간을 영역분할법을 이용하여 결합함으로써 해석할 수 있다. 또한 평면파이론으로 해석하기 어려운 임의의 형상을 갖는 소음기에 대해서도 3차원 경계요소법을 이용하면 성능예측이 가능하다.

1. A. F. Seybert, C. Y. R. Cheng, "Application of the boundary method to acoustic cavity response and muffler analysis.", J. Vib. Acoust. Stress Rel. Dsgn. 109, 15~21, 1987
2. A. F. Seybert, B. Soenarko, F. J. Rizzo, and D. J. Shippy, "Advanced computational method for radiation and scattering of acoustic waves in three dimensions.", J. Acoust. Am. 77(2), pp362~368, 1985
3. 이정권, "배기소음의 음향 해석 및 설계: II. 음향성능의 표현법" 자동차공학회지, Vol. 16, No. 5, pp 10~19, 1994
4. M. L. Munjal, "Acoustics of ducts and mufflers"
5. 이장명, 권오상, "경계요소법과 평면파이론을 이용한 흡기계의 해석", 한국자동차공학회논문집 제 3권 제 1호, pp 89~96, 1995
6. Kim. Yang-Han, Choi. Jae-Woong, "General solution of acoustic wave equation for circular reversing chamber with temperature gradient", J. Vib. Acoust., Vol. 113, pp 543~549, 1991
7. A. F. Seybert, C. Y. R. Cheng and T. W. Wu, "The solution of coupled interior/exterior acoustic problems using the boundary element method", J. Acoust. Soc. Am. 88(3), pp 1612~1618, 1990
8. 임정빈, "경계요소법을 이용한 축대칭 소음기의 성능 해석", 숭실대학교 석사학위논문, 1994