

CRA와 W-변환을 이용한 디지털 제어기 설계

임연수, 김영철
충북대학교

Digital Controller Design Using CRA and W-Transform

Yeonsoo Lim, Young Chol Kim
Chungbuk National University

Abstract - 이산시간 모델로부터 시간응답 설계 명세를 만족시키도록 직접 디지털 제어기를 설계하는 새로운 방법을 제시한다. R-S-T형의 고정된 제어기 구조에서 페루프 전달함수가 원하는 기준전달함수와 일치하도록 제어기 이득을 구한다. 시간 응답을 만족시키는 목표전달함수는 w-영역에서 CRA를 이용하여 선택되며 이 함수를 z-영역으로 변환시켜 얻는다. 예제를 통해 제시한 방법의 유용성을 보이고 극배치 방식과 비교한다.

1. 서 론

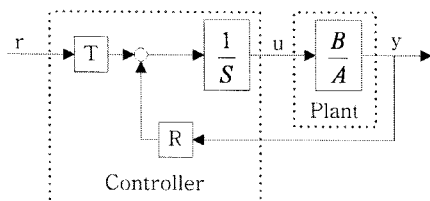
제어시스템에 사용되는 제어기 중 디지털 제어기의 비율이 상당히 높다. 하지만 디지털 제어기의 설계 이론은 많지 않다. 현재 많이 사용되는 디지털 제어기 설계 방법으로는 극배치 방식, dead-beat 제어 등이 있다. 극배치 방식은 우세한 극점 2개를 2차의 연속계 모델로 근사화 하여 정한 후 나머지 극점들은 우세 극점보다 시스템에 미치는 영향이 매우 적은 영역에 배치하는 것이다. 이 방법은 극점 2개를 제외한 나머지 극점들을 제대로 활용하지 못하고, 활용하지 못한 비우세 극점들이 플랜트에 가해지는 입력을 크게 만드는 단점을 갖는다. Dead-beat 제어는 오버슈트 없이 유한한 샘플수의 정착시간을 갖는 응답을 만족하는 제어기를 설계 할 수 있다. 하지만 이 방법은 샘플링 주기가 작은 경우 플랜트에 가해지는 입력이 굉장히 커서, 매우 느린 응답과 샘플링 주기를 사용해도 되는 시스템에 한해서만 사용이 가능한 단점을 갖는다. 연속계에서 설계한 제어기를 디지털 제어기로 에뮬레이션하여 사용하기도 한다. 하지만 이것 역시 에뮬레이션 과정에서 나타나는 오차나 영점 및 극점 추가에 의해 실제 디지털 제어기에 의한 응답이 연속계의 것과 차이가 난다.

본 논문에서는 CRA를 이용하여 w-영역의 목표 페루프 전달함수를 정하고, 목표 페루프 전달함수를 만족하는 R-S-T형 제어기를 z-영역에서 직접 설계하는 방법을 제안한다. 이 방법을 DCRA(Digital Characteristic Ratio Assignment)라 명명한다. DCRA로 시간응답규격을 만족하는 디지털 제어기를 직접 설계할 수 있음을 보이고 다른 설계방법으로 설계된 제어기들과의 차이를 예제를 통해 보이도록 하겠다.

2. 이론적인 배경

Z-영역의 전달함수로 표현된 이산 모델을 w-영역으로 변환하면 해당 전달함수에 연속계 제어기 설계 기법을 사용할 수 있다. 만약 설계된 제어기가 페루프 전달함수에 영점을 추가하게 되면 w-영역에서 설정한 목표 페루프 전달함수가 z-영역으로 역변환 될 경우 페루프 전달함수의 분자다항식에 추가 영점이 생긴다, 이것으로 인해 목표 페루프 전달함수를 만족하는 제어기를 설계하기가 어렵게 된다. 하지만 R-S-T형 제어기를 사용하여 제어기에 의한 영점 추가가 없게 되면 역변환시 추가 영점도 없게 되고 제어기의 설계도 간단해진다.

R-S-T형 제어기를 포함한 시스템은 그림 1과 같이 표현할 수 있다.



〈그림 1〉 2변수 구조의 제어기가 포함된 시스템

위 시스템의 페루프 전달함수는 다음과 같다.

$$H_{CL}(z^{-1}) = \frac{B(z^{-1})T(z^{-1})}{A(z^{-1})S(z^{-1}) + B(z^{-1})R(z^{-1})} = \frac{B(z^{-1})T(z^{-1})}{P(z^{-1})} \quad (1)$$

만약 $T(z^{-1})$ 의 차수가 0인 경우 ($T(z^{-1}) = t_0$) 페루프 전달함수는 제어기에 의해 추가된 영점이 없게 된다. 이 경우의 페루프 전달함수는 다음과 같다.

$$H_{CL}(z^{-1}) = \frac{t_0 B(z^{-1})}{P(z^{-1})} \quad (2)$$

식 (2)를 z에 대한 식으로 바꾸면 다음과 같다.

$$H_{CL}(z) = \frac{t_0(b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_1 z + b_0)}{(p_n z^n + p_{n-1} z^{n-1} + \dots + p_1 z + p_0)} = \frac{t_0 \sum_{i=0}^m b_i z^i}{\sum_{j=0}^n p_j z^j} \quad (3)$$

이제 식 (3)을 w 변환하면 다음과 같이 된다.

$$H_{CL}(w) = \frac{t_0 \sum_{i=0}^m b_i (w+C)^i (w-C)^{n-i}}{\sum_{j=0}^n p_j (w+C)^j (w-C)^{n-j}} = \frac{t_0 B(w)}{P(w)}, \quad C = \frac{2}{T_s} \quad (4)$$

여기서 T_s 는 샘플링 주기이다. 식(4)에 의해 알 수 있는 사실은, w변환 및 역w변환시 분자다항식의 계수는 분자다항식에만, 분모다항식의 계수는 분모다항식의 계수에만 독립적으로 영향을 준다는 것이다. 따라서 w-영역에서 특성다항식의 계수를 변경하여도 z-영역의 분자다항식은 변하지 않는다. 원하는 응답을 갖는 w-영역의 특성다항식을 $P^*(w)$ 라고 하면

$$H_{CL}^*(w) = \frac{t_0 B(w)}{P^*(w)} \quad (5)$$

$P^*(w)$ 는 CRA를 사용하여 구할 수 있다. CRA는 α_1, τ 로 정의되는 단지 2개의 변수만으로 페루프 시스템 응답의 제동 특성과 정착시간을 각각 독립적으로 조절할 수 있는 설계법이다. 자세한 내용은 [1]을 참고하기 바란다. 식 (5)를 역w변환하면 다음과 같다.

$$H_{CL}^*(z) = \frac{t_0 B(z)}{P^*(z)} \quad (6)$$

이제 식 (7) 만족하는 제어기 $R(z^{-1}), S(z^{-1})$ 를 구하면 페루프 시스템이 식 (6)의 목표 페루프 전달함수와 같아진다.

$$A(z^{-1})S(z^{-1}) + B(z^{-1})R(z^{-1}) = P^*(z^{-1}) \quad (7)$$

마지막으로 정상상태 응답이 기준입력과 같도록 하는 $T(z^{-1})$ 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$T(z^{-1}) = t_0 = \frac{P(1)}{B(1)} = \frac{B(1)R(1)}{B(1)} = R(1) \quad (8)$$

3. 설계 과정

DCRA를 이용한 설계의 각 과정을 표 1에 정리하였다.

〈표 1〉 DCRA 설계과정의 각 단계

단계 1	제어기의 차수, 고정된 구조의 포함 유무를 결정한다.
단계 2	페루프 전달함수를 w변환한다.
단계 3	CRA를 이용하여 원하는 시간응답을 만족하는 목표 페루프 전달함수의 특성방정식 계수를 결정한다. 또한 정상상태 응답이 기준 입력과 같도록 하는 $T(z^{-1})$ 를 계산한다.
단계 4	목표 페루프 전달함수를 역w변환한다.
단계 5	목표 페루프 전달함수와 페루프 전달함수가 같아지도록 하는 제어기의 계수들을 계산한다.

다음의 예제를 통해 현재 디지털 제어기의 직접 설계에 많이 사용되는 극배치 방식과 본 논문에서 제시한 방법으로 설계된 제어기의 성능을 비교 하겠다.

예제 1. 주어진 플랜트는 다음과 같다.

$$G(z^{-1}) = \frac{0.0001076z^{-1} + 0.0007982z^{-2} + 0.0005117z^{-3} + 0.00001192z^{-4}}{1 - 3.952z^{-1} + 5.897z^{-2} - 3.936z^{-3} + 0.992z^{-4}}$$

샘플링 주기는 0.2초이다. 설계 제약조건은 시스템의 단위계단응답이 오버 슈트 없이 20초 이내의 정착시간을 갖는 것이다.

우선 DCRA로 제어기를 설계하였다. 제어기의 변수를 다음과 같이 설정 한다.

$$\begin{aligned} R(z^{-1}) &= r_0 + r_1z^{-1} + r_2z^{-2} + r_3z^{-3}, \\ S(z^{-1}) &= 1 + s_1z^{-1} + s_2z^{-2} + s_3z^{-3}, \\ T(z^{-1}) &= t_0. \end{aligned}$$

w변환 후의 페루프 특성다항식을 $P(w)$ 라 할 때 페루프 전달함수를 w변 환하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} H_{\alpha}(w) &= \frac{t_0 B(w)}{P(w)}, \\ B(w) &= 0.000005146w^7 + 0.0003594w^6 + 0.0013583w^5 \\ &\quad - 0.07977w^4 - 1.335w^3 + 0.5288w^2 + 92.55w + 385.4. \end{aligned}$$

목표 특성방정식 $F(w)$ 의 계수 결정을 위해 CRA를 사용한다. 결과는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 2.5, \\ \tau &= 5.5, \\ F(w) &= w^7 + 14.01w^6 + 78.48w^5 + 226.2w^4 + 361w^3 + 319w^2 + 145w + 26.36. \end{aligned}$$

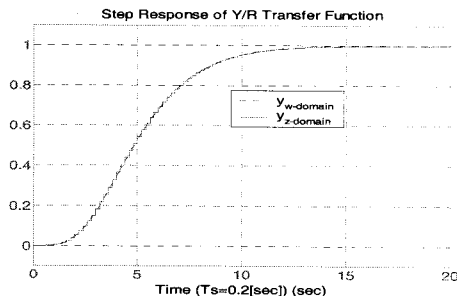
정상상태 응답이 기준입력과 같도록 하는 $T(z^{-1})$ 는 다음과 같다.

$$T(z^{-1}) = t_0 = 0.0684.$$

위의 계산에 의해 결정된 w-영역에서의 목표 페루프 전달함수를 역w변환 하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} H_{CL}(z^{-1}) &= \frac{t_0 B(z^{-1})}{F(z^{-1})}, \\ t_0 B(z^{-1}) &= 0.00007362z^{-1} + 0.0000546z^{-2} \\ &\quad + 0.000035z^{-3} + 0.000008153z^{-4}, \\ F(z^{-1}) &= 1 - 4.792z^{-1} + 9.738z^{-2} - 10.87z^{-3} \\ &\quad + 7.198z^{-4} - 2.824z^{-5} + 0.6077z^{-6} - 0.05532z^{-7}. \end{aligned}$$

목표 페루프 전달함수의 단위계단응답은 그림 2에 도시하였다. 두 응답이 매우 유사함을 볼 수 있다.



<그림 2> 시스템의 출력 y의 비교

마지막으로 목표 페루프 전달함수와 페루프 전달함수가 같아지도록 하는 제어기의 계수들을 계산한다. 계산 결과는 다음과 같다.

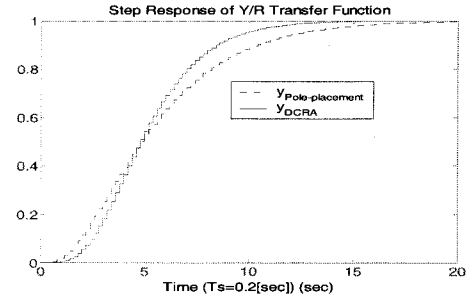
$$\begin{aligned} R(z^{-1}) &= 94.2083 - 274.2038z^{-1} + 267.7865z^{-2} - 87.7227z^{-3}, \\ S(z^{-1}) &= 1 - 0.8497z^{-1} + 0.4375z^{-2} - 0.0547z^{-3}. \end{aligned}$$

극배치 방식 설계는 [3]에 소개된 절차를 따랐다. 설계된 제어기는 다음과 같다.

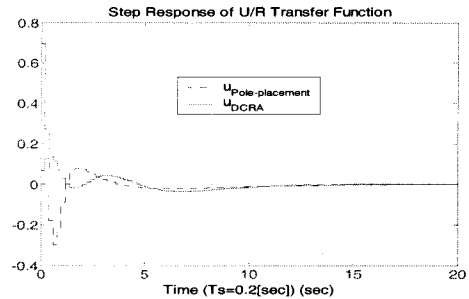
$$R(z^{-1}) = 736.3 + 2037.6z^{-1} + 1888.2z^{-2} - 586.2z^{-3}.$$

$$\begin{aligned} S(z^{-1}) &= 1 + 0.5268z^{-1} + 0.3387z^{-2} + 0.005z^{-3}, \\ T(z^{-1}) &= 0.695. \end{aligned}$$

각 방법에 의해 설계된 제어기에 의한 페루프 전달함수의 단위계단 응답을 그림 3에 도시하였다. 또한 해당 응답에 대한 플랜트의 입력을 그림 4에 도시하였다. 점선으로 표시된 것이 극배치 방식에 의한 응답이고, 실선으로 표시된 것이 DCRA에 의한 응답이다. DCRA에 의한 응답이 시스템의 출력에서는 극배치 방식에 의한 응답보다 빠르고, 플랜트에 가해지는 입력의 최대값은 더 작은 것을 볼 수 있다. 극배치 방법이 출력이 더 느리면서 플랜트의 입력을 크게 만드는 것은 비우세 극점에 의한 영향 때문이다. 이 극점들을 우세 극점에 가까이 놓으면 플랜트에 가해지는 입력을 작게 만들 수 있다. 하지만 그로 인해 시스템의 출력은 더 느려지고 결국 우세 극점을 포함한 모든 극점을 재조정해야 하게 된다.



<그림 3> 시스템의 출력 y의 비교



<그림 4> 플랜트의 입력 u의 비교

3. 결 론

본 논문에서는 CRA와 w-변환을 이용하여 시간응답규격을 만족하는 디지털 제어기를 직접 설계하는 방법을 제안하였다. R-S-T형 제어기를 사용하여 제어기에 의한 페루프 시스템의 영점 추가를 없게 하고, 그로 인해 w 영역에서 특성다항식을 변경하여도 z-영역의 특성다항식에만 영향을 주고 분자다항식에는 영향을 주지 않게 하였다. 이를 통해 α_1, τ 2개의 변수만으로 계동 특성과 정착시간을 조절할 수 있는 CRA를 디지털 제어기 설계에 적용할 수 있었다.

DCRA의 장점은 α_1 으로 시간응답에서의 계동 특성만을, τ 로 정착시간만을 변경하기 때문에 원하는 시간응답을 갖는 제어기를 쉽게 찾을 수 있다는 것이다. 또한 디지털 제어기를 직접 설계하기 때문에 설계된 제어기를 구현하기도 매우 쉽다. 이러한 장점 때문에 DCRA가 앞으로 많은 산업현장에서의 제어기 설계에 사용될 것을 기대해 본다.

감사의 글

본 연구는 한국과학재단 특정기초연구 (과제번호: R01-2006-000-10811-0) 지원으로 이루어진 연구임.

[참 고 문 헌]

- [1] L.H. Keel, Y.C. Kim, and S.P. Bhattacharyya, "Tutorial Workshop on Advances in Three Term Control," 17th IFAC World Congress, Seoul, Korea, July 5-6, 2008.
- [2] Katsuhiko Ogata, "Discrete-time Control Systems", Prentice-Hall, 1987
- [3] Ioan D. Landau and Gianluca Zito, "Digital Control Systems", Springer, 2006