

### MIMO 시스템을 위한 Sphere Decoding 알고리즘

안진영, 박희준, 김상준  
 동아대학교 전자공학과

### Sphere Decoding Algorithm for MIMO System

Jinyoung An, HeeJun Park, and Sangchoon Kim  
 Department of Electronics Engineering, Dong-A University

**Abstract** - 본 논문에서는 다중입력 다중출력(Multiple Input Multiple Output: MIMO) 시스템에서 Maximum Likelihood (ML) 수신기와 같은 성능을 가지지만 복잡도가 낮은 Sphere Decoding (SD) 알고리즘에 대해 분석하고 그 성능을 평가한다. 각각의 송신 안테나에서 채널로 전송되는 독립적인 신호는 QPSK 방식을 사용하여 변조되며, 채널은 산란이 활발하게 일어나는 레일리(Rayleigh) 평탄 페이딩 채널로 가정한다. 수신기에서 수신된 신호는 Fincke & Pohst SD 알고리즘에 의해 각 송신 안테나로부터의 독립적인 신호로 검파되며 그 성능이 ML수신기의 성능과 비교되었다. 추가적으로 복잡도를 줄이기 위해 개선된 형태인 Viterbo & Boutros SD 알고리즘을 이용하여 검파된 신호의 BER 성능과 부동 소수점 연산량 (Floating Point Operations: FLOPS)이 각각 비교 분석되었다.

#### 1. 서 론

최근 공간 다중화 이득(Spatial Multiplexing Gain) 또는 안테나 어레이 이득(Array Gain)을 얻기 위해, 송·수신기 양단에 다중 안테나를 사용하는 다중입력 다중출력(MIMO) 시스템이 활발히 연구되고 있다[1]. 각 송신안테나로부터 독립적인 신호를 송신한 후, 다중 수신 안테나를 통해 신호를 검파(Detection)하게 되면 추가적인 자유도(Degree of Freedom) 이득을 얻을 수 있다. 이러한 기술을 이용하는 MIMO 시스템은 논문[2]에서 제안된 V-BLAST 구조이다. V-BLAST 구조에서 공간적으로 다중화된 신호검파를 위해 사용되는 수신기는 일반적으로 Zero Forcing(ZF), Minimum Mean Square Error (MMSE), ML 이 있다. 여기서 ML 수신기는 가장 뛰어난 BER 성능을 가지며 최적의 수신기이지만, 신호검파를 위해 요구되는 계산량이 안테나의 개수와 신호 변조 방식에 따라 지수적으로 증가하는 단점을 가진다. 반면 논문 [3-5] 에서 연구된 SD 알고리즘은 ML 수신기와 같은 성능을 가지지만, 그 계산량이 매우 낮은 최적의 수신기이다. SD 알고리즘의 전체 계산량은 잡음 분산값에 비례하여 결정되는 반지름에 의해 좌우되기 때문에, 모든 신호 좌표를 수신된 신호와 비교하는 ML 수신기보다 낮은 계산량을 가진다.

따라서 본 연구는 V-BLAST 구조를 사용한 MIMO 시스템에서 최적의 BER 성능을 가지지만, 하드웨어적으로 복잡도가 낮은 SD 알고리즘의 성능을 평가한다. 여기서 초기에 결정된 반지름을 고정적으로 사용하는 Fincke & Pohst SD 알고리즘과 수신 신호를 찾을 때 마다 반지름을 갱신하여 복잡도를 더 낮춰주는 Viterbo & Boutros SD 알고리즘에 대해 연산량을 알아본다. 또한 각 SD 알고리즘에서 ZF 필터와 MMSE 필터를 사용하였을 때, 그 BER 성능과 부동소수점 연산량(FLOPS)을 비교 분석한다.

#### 2. 본 론

##### 2.1 시스템 모델

본 논문에서는 단일유저 환경에서  $M$  개의 송신 안테나와  $N$  개의 수신 안테나를 사용하는 협대역 MIMO 시스템을 고려한다. 채널은 한 개의 프레임이 송신되는 동안 변하지 않는 레일리 평탄 페이딩을 가정한다. 여기서 데이터 프레임은 QPSK로 변조된 신호이며, 코딩 작업 없이 각각의 송신 안테나를 통해 독립적으로 송신된다.  $\mathbf{x}$  를  $M \times 1$  크기의 전송된 신호벡터로 그리고  $\mathbf{y}$  를  $N \times 1$  크기의 수신된 신호 벡터로 표기할 경우 부가백색 가우시안 잡음(Additive White Gaussian Noise: AWGN)을 가지는 MIMO 시스템의 입출력 관계식은 다음과 같이 표기된다.

$$\mathbf{y} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{w} \quad (1)$$

여기서  $\mathbf{H}$  는  $\mathbf{H} = [h^{n,m}] \in \mathbf{C}^{N \times M}$  으로 정의하며, 각 채널 계수  $h^{n,m}$  은 순환 대칭 복소 가우시안(Circular Symmetric Complex Gaussian) 평균이 0 이고 분산이 1, 즉  $CN(0,1)$  의 분포를 가진다.  $\mathbf{w}$  는  $N \times 1$  의 크기를 갖는 AWGN 벡터이며,  $CN(0, 2\sigma_w^2)$  의 분포를 따른다. 수신기에서는 채널 정보를 완벽하게 알지만, 송신기에서 채널 정보를 알지 못할 경우 전체 송신전력(정규화된 송신전력)은 송신 안테나 개수  $M$  만큼 균일하게 나누어 할당할 수 있으며,  $1/M$  로 표기 된다. 따라서 주어진 신호의 크기와 잡음의 분산 값을 이용하여 신호대 잡음비(Signal to Noise Ratio: SNR)를  $SNR = 1/2\sigma_w^2$  으로 표현할 수 있다.

##### 2.2 Sphere Decoding(SD) Algorithm

공간적으로 다중화된 수신 신호를 검파하기 위해 사용되는 MIMO 수신기 중 최적의 BER 성능을 가지는 ML 수신기는 다음처럼 신호를 검파한다.

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}\|^2 \quad (2)$$

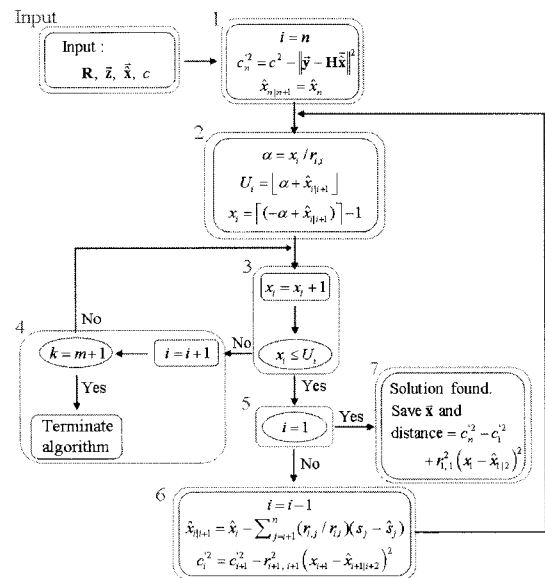
여기서  $\arg \min_{\mathbf{x}} \|\cdot\|^2$  는 norm 제곱 값이 최소가 되는 벡터  $\hat{\mathbf{x}}$  를 찾는 과정이다. 즉, ML 수신기는 수신된 신호를 모든 신호 좌표와 비교하여 가장 짧은 거리를 가지는 좌표를 수신 신호로 검파한다. 이 방법은 송신 안테나의 개수와 심볼당 비트의 수가 증가함에 따라 계산량이 지수 적으로 증가하게 되며, 하드웨어적인 복잡도를 증가시킨다. 반면 SD 알고리즘은 계산량을 줄이기 위해 다음과 같이 신호를 검파한다 [3-5].

$$c^2 \geq \|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}\|^2 \quad (3)$$

여기서 반지름  $c$  는  $c = \sqrt{\beta N \sigma_w^2}$  로 정의되며,  $\beta$  는 검파된 신호 좌표가 확률적으로 99% 이상 원 안에 포함 되도록 선택되는 파라미터이다 [3]. 즉 SD 알고리즘은 수신된 신호  $\mathbf{y}$  로부터 최소 거리를 가지는 신호 좌표를 검파하기 위해 반지름이  $c$  인 원 안에 있는 좌표에 대해서만 거리를 비교하기 때문에 ML 수신기에 비해 계산량이 훨씬 적다.

##### 2.2.1 Fincke & Pohst SD 알고리즘

논문 [4] 의 Fincke & Pohst SD 알고리즘은 식 (3)의 우변항을 계산하기 위해 ZF 필터를 사용하여  $\hat{\mathbf{x}}$  값을  $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{F}_{ZF} \mathbf{y}$  와 같이 미리 추정 후에 최소 거리 값을 구한다. 여기서  $\mathbf{F}_{ZF}$  는  $\mathbf{F}_{ZF} = (\mathbf{H}^H \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^H$  이며,  $\mathbf{H}^H$  는 채널 행렬  $\mathbf{H}$  의 복소 공액 전치 (Complex conjugate transpose) 를 의미한다. Fincke & Pohst SD 알고리즘의 전체 과정[3-4]은 그림 1에 제시 되었으며, 여기서는 알고리즘 과정만 간단히 언급한다.



< 그림 1 > Fincke & Pohst SD 알고리즘의 순서도

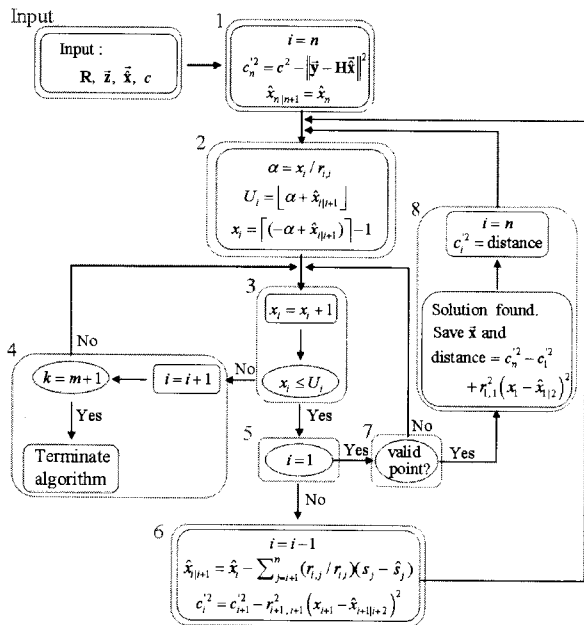
그림 1 의 입력 단계에서  $\mathbf{R}$  은 채널의  $\mathbf{QR}$  분해로 얻은  $\mathbf{R}$  행렬이며,  $\mathbf{z}$  는  $\mathbf{Q}$  행렬을 이용하여 얻은 수정된 수신신호  $\mathbf{z} = \mathbf{Q}\mathbf{y}$  를 나타낸다. 단계 1 은 초기화 과정이며,  $i = n$  ( $i = n, \dots, 1$ ) 으로 두고 반지름과 검파신호 관련 파라미터  $c_n^2$  와  $\hat{x}_{n|n+1}$  을 초기화한다. 단계 2는  $i$  번째 과정에서 검파신호의 상한치  $U_i$  와 하한치  $x_i$  를 계산하는 과정이며, 기호  $\lfloor \cdot \rfloor$  와  $\lceil \cdot \rceil$  는 각각 내림과 올림 연산을 의미한다. 단계 3에서는  $x_i$  를  $i$  번째 과정의 상한치  $U_i$  가 될 때까지 증가시키며, 상한치 이하인 경우 단계 5에서  $i$  의 마지막 과정인  $i = 1$  이 되었는지 판단한다.  $i = 1$  이 아닌 경우 단계 6 으로 가서  $i - 1$  번째 검파 신호와 반지름 관련 파라미터  $\hat{x}_{i+1}$  과  $c_i^2$  를 구한 후 단계 2로 돌아간다. 만약 단계 5에서  $i = 1$  인 경우 식 (3)을 만족하는 신호 좌표중 하나를 찾은 것이므로 좌표  $\hat{\mathbf{x}}$  와 그 거리를 저장한 후 단계 3으로 돌아간다. 만약 단계 3에서  $x_i$  가 상한치  $U_i$  보다 큰 경우 단계 4

로 가서  $i$  를 증가 시킨다. 단계 4에서  $i$  가  $n$  이하인 경우 단계 3으로 다시 돌아가며,  $i=n+1$  인 경우 식 (3)을 만족하는 모든 신호 좌표를 찾는 것이므로 알고리즘을 종료하게 된다.

한편 MMSE 필터를 사용 하였을 때의 성능을 분석하기 위해 ZF 필터 대신 MMSE 필터를 사용할 수 있다. MMSE 필터는  $\mathbf{F}_{MMSE} = (\mathbf{H}^H \mathbf{H} + \sigma_w^2 \mathbf{I}_M)^{-1} \mathbf{H}^H$  이며, 입력값  $\vec{\mathbf{x}} = \mathbf{F}_{MMSE} \vec{\mathbf{y}}$  를 제외하면 나머지 알고리즘 과정은 그림 1과 동일하다.

### 2.2.2 Viterbo & Boutros SD 알고리즘

그림 1의 Fincke & Pohst SD 알고리즘은 단계 7에서 식 (3)을 만족하는 후보 신호 하나를 찾은 후 고정된 반지름으로 다음 후보 신호를 찾는다. 이 과정은 잡음이 큰 영역(낮은 SNR 영역)에서 수식  $c = \sqrt{\beta N \sigma_w^2}$  에 의해 반지름이 커지므로 여전히 많은 계산량을 요구한다. 논문 [5]의 Viterbo & Boutros SD 알고리즘은 위의 단점을 개선시킨 방법으로써, 전체 알고리즘은 그림 2와 같다.



< 그림 2 > Viterbo & Boutros SD 알고리즘의 순서도

그림 2의 방법은 단계 7, 8을 제외하면, 그 나머지 과정이 그림 1과 동일하다. 위의 알고리즘은 단계 8에서 후보 신호 하나를 찾을 때마다 수신된 신호와의 거리를 distance로 저장한다. 이 값은 반지름 관련 파라미터  $c_i^2$ 에 저장되고  $i$ 를  $n$ 으로 초기화 시킨 후 알고리즘이 재시작 된다. 다시 단계 7에서는 현재 결정된 후보 신호가 이전의 후보 신호보다 수신된 신호와의 거리가 짧은 경우에만 단계 8로 넘어가 반지름을 줄이기 때문에 SNR이 낮은 영역에서 그 계산량을 훨씬 줄일 수 있다. 또한 2.2.1절과 마찬가지로 ZF 필터 대신 MMSE 필터를 사용하여 그 성능을 분석할 수 있으며, 입력값  $\vec{\mathbf{x}}$ 을 제외하면 나머지 알고리즘 과정이 그림 2와 동일하다.

### 2.3 시뮬레이션 결과

MIMO 페이딩 채널을 위한 SD 알고리즘과 ML 수신기의 성능 평가는 100,000 회의 독립적인 Monte-Carlo 시뮬레이션을 통해 얻어지며, 송신기와 수신기는 각각 4개의 안테나를 사용한다고 가정 한다. 또한 성능 비교를 위해 ZF-OSIC 수신기와 MMSE-OSIC 수신기의 BER 성능과 부동 소수점 연산량(FLOPS)을 시뮬레이션 결과에 추가하였다. 여기서 OSIC는 강한 신호 순으로 정렬된(Ordered) 순차적인 간섭제거기(successful Interference Cancellation : SIC)를 의미하며, 선형적인 ZF 또는 MMSE 수신기와 결합되어 더욱 우수한 오율 성능을 가지는 수신 알고리즘이다.

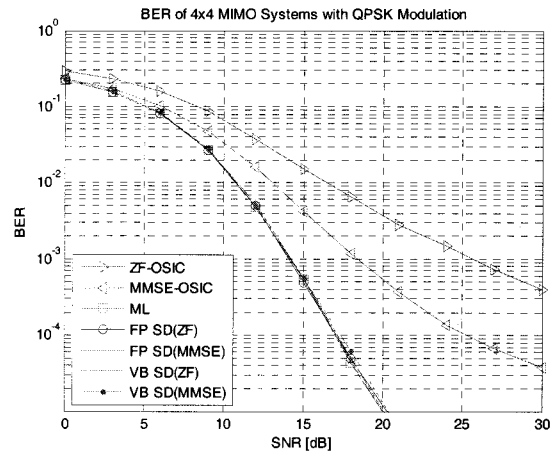
그림 3은 4x4 MIMO 시스템에서 ZF-OSIC, MMSE-OSIC, ML, SD 수신기의 BER 성능을 보여준다. 그림을 통해 MMSE-OSIC 수신기는 ZF-OSIC 보다 좋은 결과를 보이지만 최적의 수신기인 ML 보다는 그 성능이 떨어지며, SD 알고리즘의 성능은 ML 수신기의 성능과 거의 동일함을 알 수 있다. Fincke & Pohst (FP) SD 알고리즘과 Viterbo & Boutros (VB) SD 알고리즘 각각이 ZF과 MMSE 필터를 사용하여도 같은 성능을 보이는 것은 SD 알고리즘 자체가 성능을 최적화 해주기 때문에 필터를 바꾸어도 성능에는 변함이 없다.

그림 4에서는 그림 3의 각 수신기에 대한 부동 소수점 연산량(FLOPS)이 연구 되었다. 그래프를 통해 ML 수신기의 연산량이 가장 많으며, ZF-OSIC와 MMSE-OSIC 수신기의 연산량이 가장 적은 것을 관찰할 수 있다. ZF-OSIC와 MMSE-OSIC 수신기의 각 연산량이 비슷한 것과 같이, SD 알고리즘 또한 ZF 필터와 MMSE 필터 사용에 대한 결과 연산량이 거의 차이

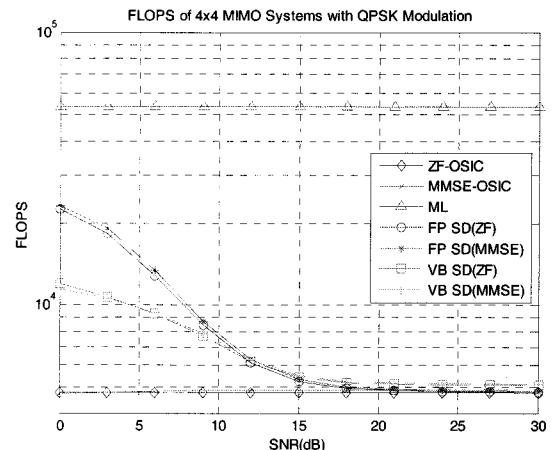
가 없음을 보인다. 한편 FP SD 알고리즘의 연산량은 고정된 반지름의 사용으로 인해 SNR이 낮은 영역에서는 ML 수신기 연산량의 절반, OSIC 수신기 연산량의 4배가 요구되고, SNR이 높은 영역에서는 ML 수신기 연산량의 1/10, OSIC 수신기와는 거의 비슷한 연산량을 필요로 한다. 반면 VB SD 알고리즘 연산량의 경우는 후보 신호를 찾을 때마다 반지름을 갱신하므로 SNR이 낮은 영역에서는 FP SD 알고리즘 연산량의 절반 정도만 요구되며, SNR 높은 영역에서는 FP SD 알고리즘 연산량과 같음을 보인다.

## 3. 결 론

SD 알고리즘과 ML 수신기의 BER 성능과 부동소수점 연산량(FLOPS)이 MIMO 페이딩 채널에서 비교, 분석되었다. 시뮬레이션결과로부터 SD 알고리즘은 최적의 BER 성능을 보이는 ML 수신기와 같은 성능을 가지는 것을 확인할 수 있으며, 특히 Viterbo & Boutros SD 알고리즘은 분석된 수신기 중 계산량과 BER 성능의 관점에서 가장 효율적인 수신기임을 알 수 있다.



< 그림 3 > 4x4 MIMO 시스템의 BER 성능



< 그림 4 > 4x4 MIMO 시스템의 부동소수점 연산량

### [참 고 문 헌]

- [1] D. Gesbert, M. Shafi, D. Shiu, P. J. Smith, and A. Naguib, "From the theory to practice: An overview of MIMO space-time coded wireless systems," IEEE Journal on Selected Areas in Communications, vol. 21, no. 3, pp. 281-302, April 2003.
- [2] P. W. Wolniansky, G. J. Foschini, G. D. Golden, and R. A. Valenzuela, "V-BLAST: An Architecture for Realizing Very High Data Rates Over the Rich-Scattering Wireless Channel," ISSSE, URSI International Symposium on 29, pp.295-300, Sept, 1998.
- [3] B. Hassibi and H. Vikalo, "On the Sphere-Decoding Algorithm I. Expected Complexity," IEEE Trans. Signal Process., vol. 53, pp. 2806-2818, Aug. 2005
- [4] U. Fincke and M. Pohst, "Improved methods for calculating vectors of short length in a lattice, including a complexity analysis", Math. Comput., vol. 44, pp. 463-471, Apr. 1985.
- [5] E. Viterbo and J. Boutros, "A universal lattice decoder for fading channels", IEEE Trans. Inf. Theory, vol. 45, no. 7, pp. 1639-1642, Jul. 1999.