

시간 지연을 가지는 비선형 마르코비안 점프 시스템의 퍼지 제어

송민국*, 박진배*, 주영훈**

연세대학교 전기전자공학과, **군산대학교 전자정보공학부

Stabilization for Markovian Jump Nonlinear Systems with Time-Delay via T-S Fuzzy Control

Min Kook Song, Jin Bae Park, and Young Hoon Joo

*Electrical and Electronic Engineering, Yonsei University

**School of Electronics and Information Engineering, Kunsan National University

Abstract - This paper is concerned with the stabilization problem of Markovian jump nonlinear systems with time-delay via Takagi-Sugeno (T-S) fuzzy control approach. The T-S fuzzy models are employed to represent nonlinear systems with Markovian jump parameters and time-delay. The purpose of this paper is to design a mode-independent fuzzy controller such that the closed-loop Markovian jump fuzzy system is stochastically stable. Based on a stochastic Lyapunov function, stabilization sufficient conditions using a mode-independent fuzzy controller are derived for the Markovian jump fuzzy system in terms of Linear Matrix Inequalities (LMIs). Finally, a simulation example is presented to illustrate the effectiveness of the proposed method.

1. 서 론

시간 지연 현상은 생물학, 경제 시스템, 그리고 다양한 공학 분야에서 다양하게 나타난다. 시간지연은 흔히 시스템의 안정성을 저해하며, 성능을 떨어뜨리는 역할을 한다. 이러한 이유로 시간 지연을 포함한 시스템의 안정도 해석 및 성능에 관한 연구가 주요 연구가 되어 왔으며, 많은 관심을 받아왔다 [1-5]. 시간지연을 가지는 시스템의 제어기 설계는 오랜 기간 동안 다양한 접근방법에 대해서 논의 되어왔다.

또한 대다수의 비선형 시스템 및 자연 현상에서는 파라미터의 랜덤 변화가 나타난다. 따라서 이러한 변수를 가지는 시스템은 상태 변수와 소위 시스템 모드로 불리는 이산 변수로 정의 되며, 이러한 시스템의 특수한 경우를 마르코프 점프 시스템이라고 한다. 마르코프 프로세스를 이용하여 시스템의 파라미터를 마르코프 점프로 나타낸다. 이러한 시스템은 다양한 사회 현상에서 나타난다. 마르코프 선형 시스템에서부터 시작된 연구는 비선형 시스템과 다양한 외란이 존재하는 경우에 대해서도 계속 연구가 진행되어 왔다 [6-8]. 지금까지 연구 되어온 마르코프 퍼지 점프 시스템에 관한 연구 결과 중 본 논문에서 논의하는 시간 지연을 포함하는 마르코프 퍼지 점프 시스템에 관한 연구는 거의 없었다.

시간 지연을 가지는 불확실한 마르코프 퍼지 점프 시스템의 퍼지 제어기를 설계하고자 한다. 먼저 시간 지연을 포함하는 마르코프 퍼지 비선형 시스템을 앞서 제안된 퍼지 모델을 이용하여 시스템을 모델링한다. 안정한 퍼지 제어기 설계를 위해 확률적 안정도 및 안정화 가능성을 정의한다. 정의한 마르코프 퍼지 점프 시스템을 안정화 시키는 퍼지 제어기를 설계한다. LMI를 이용하여 안정한 퍼지 제어기 존재성의 충분조건을 살펴본다. 또한 이때의 LMI의 해를 이용하여 퍼지 제어기의 이득값을 구한다.

2. 본 론

다음과 같은 시간 지연을 가지는 비선형 시스템을 간주한다.

$$x(k+1) = f(x(k), x(k-\tau)) + g(u(k)) \quad (1)$$

여기서 $x(k) \in R^n$ 는 상태변수, $u(k) \in R^m$ 는 제어 입력이다. Takagi-Sugeno(T-S) 퍼지 모델은 다음과 같은 퍼지 규칙을 사용하여 비선형 시스템을 나타낸다.

Rule i :

$$\begin{aligned} &IF \ z_1 \text{ is } I_1^i, \dots, \text{ and } z_n \text{ is } I_n^i, \\ &THEN \ x(k+1) = A_i(\eta(k))x(k) + A_{di}(\eta(k))x(k-\tau) + B_i(\eta(k))u(k), \\ &\quad (1 \leq i \leq c) \end{aligned} \quad (2)$$

여기서 $I_h^i (h=1,2,\dots,c)$ 는 i 번째 규칙에서 h 번째 전건부 변수의 퍼지 집합이며, A_i, B_i, A_{di} 는 알려진 차원의 행렬이며, $z_h(t)$ 는 h 번째 전건부 변수의 퍼지 집합이며, c 는 퍼지 규칙수를 나타내며, $\eta(k)$ 는

이산 상태 마르코프 체인이다. $\eta(k) \in T = \{1, 2, \dots, s\}$ 이고, $\tau(k)$ 는 시간 지연을 나타낸다.

$\eta(k)$ 는 다음의 랜덤 프로세스로 정의한다.

$$\begin{aligned} p_{ij} &\equiv \text{Prob}(\eta(k+1) = j | \eta(k) = i) \\ &= \begin{cases} \pi_{ij} + o(i) \\ 1 + \pi_{ii} + o(i) \end{cases} \end{aligned} \quad (3)$$

중심값-평균 비퍼지화, 곱셈추론, 싱글톤 퍼지화를 사용하면 퍼지 추론 규칙 (2)의 전역 동특성은 다음과 같이 표현된다.

$$x(k+1) = \sum_{i=1}^c \mu_i(x(k)) [A_{i,i}x(k) + A_{di,i}x(k-\tau(k)) + B_{i,i}u(k)], \quad (4)$$

$$y(k) = \sum_{i=1}^c \mu_i(x(k)) C_{i,i}x(k)$$

$$x(t) = \phi(t), \quad t \in \{-\tau-d, \dots, 0\}.$$

여기서 $w_i(x(k)) = \prod_{h=1}^n I_h^i(z_h(k))$, $\mu_i(x(k)) = \frac{w_i(x(k))}{\sum_{i=1}^c w_i(x(k))}$, 각각의 행

렬은 l 번째 모드일 경우를 나타낸 것이다.

$$\begin{aligned} A_{i,l} &= A_i(\eta(k)), \quad A_{id,l} = A_{di}(\eta(k)) \\ B_{i,l} &= B_i(\eta(k)), \quad C_{i,l} = C_i(\eta(k)) \end{aligned}$$

그리고 $I_h^i(z_h(k))$ 는 h 번째 전건부 변수 $z_h(t)$ 의 퍼지 집합 I_h^i 에 대한 소속도이다.

본 논문에서는 상태변수 $x(k)$ 는 상태제환 제어기에 사용가능하지만, $\eta(k)$ 는 불가하다고 가정하고 다음과 같은 퍼지 제어기를 설계한다. c 개의 퍼지 규칙과 함께 (2)에서 사용된 퍼지 모델을 바탕으로 퍼지 제어기의 퍼지 규칙은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} &Rule \ i : \ IF \ z_1 \text{ is } I_1^i, \dots, \text{ and } z_n \text{ is } I_n^i, \\ &THEN \ u(k) = K_m x(k). \end{aligned} \quad (5)$$

여기서 $I_h^i (h=1,2,\dots,c)$ 는 i 번째 규칙에서 h 번째 전건부 변수의 퍼지 집합이며, K_m 는 i 번째 규칙의 퍼지 제어기 이득값이며, 본 논문에서 설계하여야 하는 값이다. 플랜트와 마찬가지로 중심값-평균 비퍼지화, 곱셈추론, 싱글톤 퍼지화를 사용하면 샘플치 퍼지 규칙 (5)의 전역 동특성은 다음과 같다.

$$u(k) = \sum_{i=1}^c \mu_i(x(k)) K_m x(k), \quad (6)$$

정의 1. 마르코프 퍼지 점프 시스템 (4)는 초기값 $X(0) = X_0$ 이고, 초기 상태는 각각 $\eta_0 = \eta(0) \in T$ 일 때, 다음의 조건을 만족하는 $W > 0$ 인 행렬이 존재할 경우 확률적으로 안정하다고 정의 한다.

$$E \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \|X(k)\|^2 | X_0, \tau_0, d_{-1} \right\} < X_0^T W X_0 \quad (7)$$

정의 2. 마르코프 퍼지 점프 시스템 (4)는 초기값 $X(0) = X_0$ 이고, 초기상태는 각각 $\eta_0 = \eta(0) \in T$ 일 때, 전체 폐루프 시스템이 (6)의 퍼지 제어기를 이용하여 안정화시키면, 확률적으로 안정화가능이라고 한다.

보조정리 1 [7]. 적정한 행렬 X, Z 에 대해서 주어진 행렬 $a \in \mathbb{R}^a, b \in \mathbb{R}^b, N \in \mathbb{R}^{a \times b}$ 는 다음의 부등식을 만족한다.

$$-2a^T N b \leq \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & Y-M \\ Y^T & -N^T Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix},$$

여기서 $\begin{bmatrix} X & Y \\ Y^T & Z \end{bmatrix} \geq 0$ 이다.

먼저 제어 입력 $u(t)=0$ 으로 가정하고, 마르코프 퍼지 점프 시스템 (4)의 안정도를 살펴 보면 다음과 같다. 보조 정리 1과 정의 1, 2에 의해서 우리는 다음의 정리 1을 얻을 수 있다. 또한 제어 이득값 K_m 을 구하기 위한 정리 2를 다음에 나타낸다.

정리 1. 마르코프 퍼지 점프 시스템 (4)는 다음의 조건을 만족하는 양한정 대칭 행렬 $Q_l = Q_l^T > 0$ 이 존재하면, 확률적으로 안정하다.

$$\begin{bmatrix} A_l^T(h)Q_l + Q_l A_l(h) + \sum_{i=1}^s \pi_{lm} Q_i & * \\ A_{dl}^T(h)Q_l + Q_l A_{dl}(h) & -\sigma_l I \end{bmatrix} < 0, l \in T.$$

증명) 공간의 제약상 생략한다.

정리 2. 마르코프 퍼지 점프 시스템 (4)는 다음의 조건을 만족하는 양한정 대칭 행렬 $P_l = P_l^T > 0, Y_j, Z$ 이 존재하면, 퍼지 제어기 (6)에 의해서 안정화 시킬 수 있다. 이때 상태제한 제어기 이득값은 $K_m = Y_j Z^{-1}$ 이다.

$$\Pi_{l,ii} < 0, i = j$$

$$\frac{1}{r-1} \Pi_{l,ii} + \frac{1}{2} (\Pi_{l,ij} + \Pi_{l,ij}^T) < 0, i \neq j, l \in T$$

여기서

$$\Pi_{ij} = \begin{bmatrix} -Z - Z^T & * & * & * & * \\ A_{i,i} Z + B_{i,o} Y_j + P_k - \sigma_k P_k & * & * & * & * \\ Z & 0 & 0 & * & * \\ 0 & \chi_k & 0 & -P_k & * \\ A_{d,i} Z & 0 & 0 & 0 & -\sigma_m P_k \end{bmatrix}$$

증명) 공간의 제약상 생략한다.

3. 시뮬레이션 결과

도립 진자 시스템은 질량 m_1 인 수레에 질량이 m_2 이고 길이가 L 인 균일한 질량 분포를 갖는 도립 진자가 수레에 자유롭게 회전할 수 있는 구조로 연결되어 있다. 수레의 위치는 x 이며, θ 를 진자와 수직으로 이루는 각도이며, 마지막으로 u 는 제어 입력이다. 도립 진자의 운동 방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$x_1(k+1) = x_2(k)$$

$$x_2(k+1) = \frac{g \sin(x_1(k)) - a m l x_2^2 \sin(2x_1(k)) / 2 - a \cos(x_1(k)) u(k)}{4l/3 - a m l \cos^2(x_1(k))}$$

여기서 $g=9.8$ 로 중력 가속도이며, $a = \frac{1}{m+M}$ 이다. 상태변수 x_1 은 각도 θ 이며, x_2 는 각속도를 의미한다. 운동방정식의 각각의 파라미터의 값은 $M=1kg, m=0.5kg, L=1m$ 이다. 확률 전이행렬은 다음과 같다.

$$A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.3 & 0.6 & 0.1 \\ 0.3 & 0.6 & 0.1 \end{bmatrix}$$

다음과 같은 진자의 초기 위치에 따라 두 개의 국소 모델을 갖도록 다음의 퍼지 규칙을 이용하여 도립진자 시스템을 퍼지 모델로 변환할 수 있다.

Rule 1 : IF x_1 is about 0
THEN $x(k+1) = A_1 x(k) + B_1 u(k) + A_{d1} x(k-\tau)$

Rule 2 : IF x_1 is about $\pm \frac{\pi}{2}$
THEN $x(k+1) = A_2 x(k) + B_2 u(k) + A_{d2} x(k-\tau)$

도립 진자의 운동을 묘사하는 위의 T-S 퍼지 모델에서는 각 국소 선형 모델이 서로 다른 입력 행렬을 갖는다. 이때 각각의 행렬은 다음과 같다.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 17.29 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 9.36 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.18 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.01 \end{bmatrix}$$

초기 조건을 $x_1(0)=x_2(0)=0$ 으로 가정하고, 정리 2에서 구한 퍼지 제어기의 이득값을 이용하여 상태 변수의 그래프를 그려보면 다음의 그림 1, 2와 같다. 그림에서 보여지듯이 본 논문에서 설계한 퍼지 제어기를 이용하면 시스템의 각각의 상태 변수들이 $k \rightarrow \infty$ 일 때 0으로 수렴함을 확인할 수 있다.

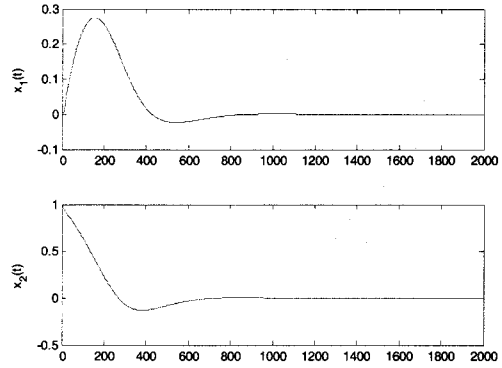


그림 1. 상태 시스템의 시간 응답

4. 결 론

본 논문은 시간 지연을 가지는 마르코프 비선형 점프 시스템의 퍼지 제어기 설계에 대해서 논의하였다. 마르코프 퍼지 점프 시스템의 안정도를 판별하기 위하여 확률적인 안정성을 정의하고, 이를 바탕으로 마르코프 퍼지 점프 시스템의 안정도를 분석하였다. 이를 바탕으로 불확실한 마르코프 퍼지 점프 시스템의 퍼지 제어기 이득값을 제시하였다. 선형 행렬 부등식을 이용하여 퍼지 제어기의 이득값을 설계하며, 상태 방정식의 안정도를 판별하였다. 본 논문에서 제시된 수치적 예제로부터 제안된 기법의 효용성을 입증하였다.

감사의 글 : 본 연구는 2008년 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국과학재단의 지원을 받아 수행된 연구임(과제번호: R01-2008-000-20844-0)

[참 고 문 헌]

- [1] P. Zitek, "Anisochronic state observers for hereditary systems," Int. J. Control, Vol. 42, pp. 581-599, 1998.
- [2] M. Hou, P. Zitek, and R. J. Patton, "An observer design for linear time-delay systems," IEEE Trans. Autom. Control, Vol. 47, pp. 121-125, 2002.
- [3] Z. Wang, J. Lam, and K. J. burnham, "Stability analysis and observer design for neutral delay systems," IEEE Trans. Autom. Contro, Vol. 47, pp. 478-483, 2002..
- [4] M. S. Mahmoud, "Robust control and filtering for time-delay systems," New York.
- [5] C. H. Lien and J. D. Chen, "Discrete-delay-independent and discrete-delay-dependent criteria for a class of neutral systems", ASME J. Dyn. Syst., Vol 125, pp. 33-41, 2003
- [6] E. Fridman, "New Lyapunov-Krasovskii functionals for stability of linear retarded and neutral type systems," Systems & Control letters, Vol 43, pp. 309-319, 2001
- [7] P. Park, "A delay-dependent stability criterion for systems with uncertain time-invariant delays", IEEE Trans. Automat. Contr. Vol 44, pp. 876-887, 1999.
- [8] Lee H. J., Park J. B., and Joo Y. H., "Robust control for uncertain Takagi-Sugeno fuzzy systems with time-varying input delay," ASME J Dyn Syst Meas Control, vol. 127, pp. 302-306, 2005.