대한수학회 회보
제11권제 1 호(1974), pp. 23-28

GAME 理論에서의 判定問題에 관하여

鄭 漢 永

1. 序 論

본 논문에서는 game 理論에서의 判定問題에 대하여 논하고자 한다. 平均値만을 생각하고 判定하려는 것은 위험한 일이므로 여기에 적어도 分散의 개념까지도 도입하여야 한다는 것을 강조하고자 한다. minimax 判定模型에 관한 문제를 다루고, minimax 判定에 대한 생각이 반드시 합리적인 것은 아니라는 사실과, 有限 game (또는 business decision)에서는 이 생각이 때때로 무용하다는 것을 밝혔다.

2. Game 理論

minimax 에 대한 사고방식에 따라서 game 理論(주로 確率을 부여하는 경우)을 생각하는 경우가 많다. 이 minimax 에 대한 사고방식은 확실히 합리적인 것이다. 그러나 어떤 사람은「이 사고방식은 너무 消極的이다, 좀 더 積極的인 사고방식이 틀림없이 있을 것이다」라고 주장한다. 어떤 관점에서 생각하면 이 사고방식은 無限回의 試行을 전제로 하고 차지할 몫(또는 줄 몫(loss))의 期待値만을 문제로 취급한 것이기 때문에 有限回의 행위에 대한 判定을 내릴 경우의 지침으로서는 오히려 危險性을 내포하고 있는것으로 생각된다. 이러한 상반된 두 견해「너무 소극적이다」,「위험하다」가 다같이 성립하는 까닭에 실제적인 면에서 생각했을 때, game 理論에는 약점이 있다. 물론 이런 경우에는 minimax 解이상으로 optimum 한 생각을 할 수 있겠지만, 有限回의 행위로 기인한 현실 문제에 적용하려는 것은 반드시 합리적이라고 할 수는 없다.「game 은 現象分析을 위한 model 작성에 필요한 예비지식을 얻기 위한 도구이다」라는 것은 충분히 인정되지만, minimax 만을 전제로 한 game 을 무조건 business 해명의 실마리로 삼는다는 것은 상술한 논거에 의하여 정곡을 결하고 있다.

소박하게 생각하드라도 적어도 차지할 몫 (또는 줄 몫)의 期待値와 分散정도는 고려하여야 한다. 分散이 큰 편을 취한다는 것은 (business 경영면에서 볼 때) 우리에게 위험한 것으로 생각되는 반면에, 分散이 적은 편을 취한다는 것은 우리의 마음속을 들어내는 것이 되어 패배를 의미하게 되기도 한다. 이들 사이의 관계를 명확히 하기 위하여 하나의 간단한 보기를 들어 고찰하여 보기

로 한다.

두 player I, II 를 생각하고 zero-sum two-person game 의 利得行列을 다음과 같이 취하면,

I \ II	a	b
α	1	−2
β	−1	2

minimax 解는

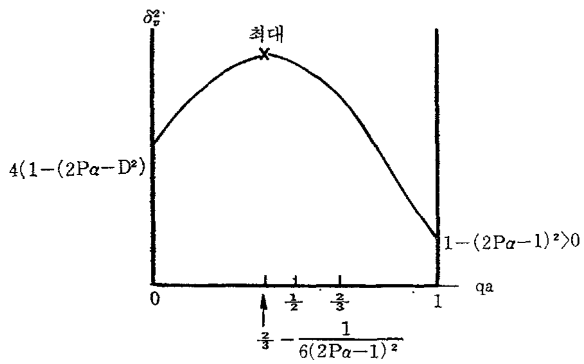
$$p_\alpha=\frac{1}{2},\ \ p_\beta=\frac{1}{2},\ \ q_a=\frac{2}{3},\ q_b=\frac{1}{3}$$

이고 game 의 期待値 V는 0 이다. 이때, game 의 期待値 V 및 그의 分散 $\sigma_V{}^2$ 을 p, q 로 나타내면

$$\begin{aligned} V&=p_\alpha q_a-2p_\alpha q_b-p_\beta p_a+2p_\beta q_b\\ &=(2p_\alpha-1)(3q_a-2),\\ \sigma_V{}^2&=p_\alpha q_a+4p_\alpha q_b+p_\beta q_a+4p_\beta q_b-V^2\\ &=4-3q_a-\{(2p_\alpha-1)(3q_a-2)\}^2 \end{aligned}$$

이다.

우선 minimax 解로는 分散이 最小로 되지않는다는 것을 안다. q_a 를 一定하게 ($q_a\fallingdotseq 2/3$)보고, p_α 에 관하여 생각하면 $p_\alpha=1/2$ 일 때 $\sigma_V{}^2$ 은 最小로 되므로 player I 은 $p_\alpha=1/2$ 을 취하기를 겁내지 않을 수 없다고 생각된다. 그러나 만약에 player II 가 $q_a=2/3$ 를 취할 때는 player I 은 자신의 힘으로는 分散도 期待値도 바꿀 수 없게 되므로 대단히 불리하다. 그러나 player I 이 $p_\alpha=1/2$



을취한다면 $V=0$ 이 되어, player II 에게는 分散이 적은 편이 유리하므로 q_a 를 크게 취하는 편이 이로울 것으로 생각될 것이다 ($q_a>2/3$). player I 이 여기 까지를 알아차린다면, $p_\alpha>1/2$ 로 취하고 $V>0$ 로 하려고 생각할 것이다. 이때 分散도 더욱 작게 되기 때문이다. 역으로 player II 가 여기에까지를 알아차린 다면 $q_a=2/3$ 로까지 確率을 내리게 된다. 그러나 더욱 내리켜서 $p_\alpha>1/2$ 일 때 $q_a<2/3$ 로 하면 $V<0$ 로 되므로, player II 로서는 利得을 보기를 바라겠으나,

$$q_a=\frac{2}{3}-\frac{1}{6(2p_\alpha-1)^2},\quad \left(p_\alpha\neq\frac{1}{2},\ 0<q_a\leq 1\right)$$

에서 分散이 最大로 되므로, 여기까지는 내릴 수 없다.

그림에서 알 수 있듯이 q_a 가 1 보다 작아지면 分散은 커지므로, 이 경우에도 q_a 를 2/3 보다 더 내린다는 것은 좋은 생각이 아닐것이다. 한편, $q_a<2/3$ 로 되면 그에 대응하여 $p_\alpha<1/2$ 도 생각하게 된다. 그래서 이와 같은 방법으로 player II 가 分散을 작게 하려고 2/3 와 1 사이의 값을 q_a 로 취하면 player I 은 1/2 과 1 사이의 값을 p_α 로 취하게 되며, 또 이에 따라서 player II 가 q_a 를 2/3 보다 조금 작게 취하여 利得을 보려고 한다면, player I 도 그에 대응해서 p_α 를 1/2 보다 조금 작게 취한다는 것도 생각할 수 있다.

따라서 分散까지도 생각하고 1 회의 행위를 문제로 삼을 때는 minimax 解가 合理的인 것이 아님을 이해하게 된다.

차지할 몫(또는 줄 몫)의 변동을 생각한다면 어떤 常數 k 에 대하여

player I 은 차지할 몫 $P=V-k\sigma_V$ 가 最大로 되게

player II 는 줄 몫 $L=V+k\sigma_V$ 가 最小로 되게

행동하는 것이 타당하다고 생각된다. 즉, 동일한 量을 두 player 가 minimax 로 생각하고, 행위 결정을 판정하는 것이 아니고, 서로 다른 量을 머리에 두고 행위결정을 판정하는 것이 된다. 또한 n 회의 試行후에는 player I, II 는 각각 $nV-k\sqrt{n}\sigma_V$, $nV+k\sqrt{n}\sigma_V$ 를 생각하게 된다.

$k=5$ 인 경우에 대하여 L 을 도시하여 본다.

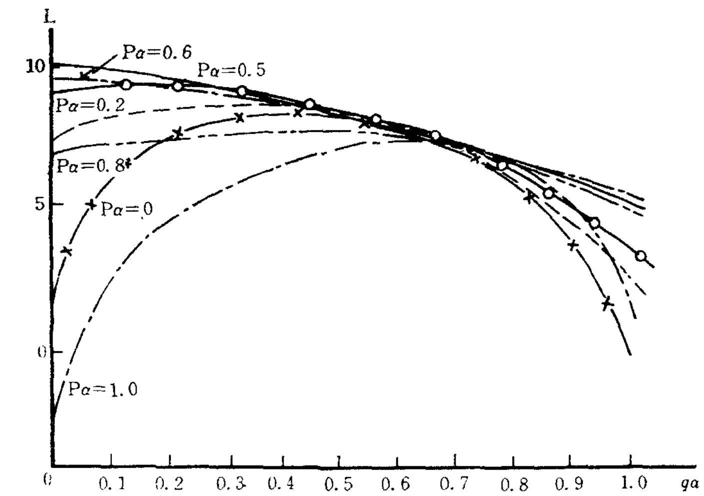
p_α 의 값에 의한 L 의 변화상태를 보면 q_a 를 어떻게 취할 것인지를 파악할 수 있을 것이다. p_α 의 값과 1/2 과의 差가 그다지 크지 않을 경우, L 의 값은 q_a 를 일정하게 할 때 p_α 의 변화에는 둔하다. 이것은 player II 가 행동할 때의 이점이다. q_a 를 2/3 보다 적게 할 때 p_α 가 클 경우에는, L 의 값은 그다지 적어지지는 않는다. 또 어떤 p_α 의 값에 대하여 L 이 最小로 되는 것은 $q_a=2/3$ 일 때가 아니다. 다음의 그림 및 V, σ_V 와 p, q 의 관계를 검토하여 볼 때 player II 로서는 「위험하지 않다」고 하는 뜻은 q_a 의 값을 2/3 보다 크게 잡는 것이 일반적으로 타당한 행위가 됨을 뜻한다. $q_a>2/3$ 이고 $p_\alpha>1/2$ 일 때는 $V>0$

로 되지만 σ_V 가 커지지 않는 점으로 보아, L 은 커지지 않고 오히려 player *II* 에게 유리하다는 것을 안다. 특히 $p_\alpha=0$ 이라던가 $p_\alpha=1$ 과 같이 특별한 경우를 제외하고는 L 을 작게 한다는 것은 일반적으로 $q_\alpha>2/3$ 일 때 바람직하다. player *II* 가 q_α 를 2/3 보다 작게 취하는 경우에는, P 의 값을 작게 할 수 있지만 이것은 player *II* 의 이득의 變化의 幅의 許容性에 의하여 결정될 문제이다. 이를 종합하여 볼 때 player *II* 가 $L-P$ 를 문제로 삼는다(작게하려고 한다)던가, 혹은 $\alpha L-\beta P$, $\alpha+\beta=c$(常數)를 문제로 삼는다면, 양자는 分散만의 문제로 된다.

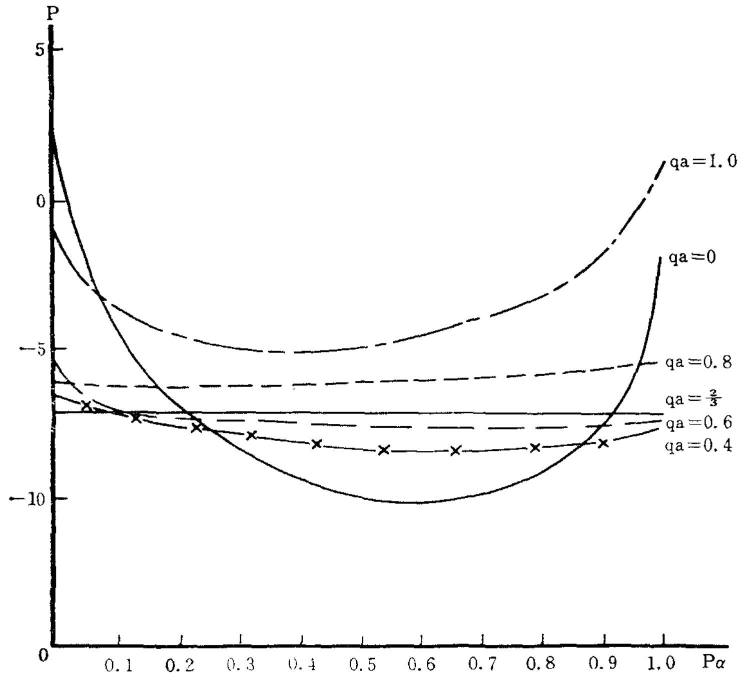
다음에 player *I*이 차지할 몫 P 를 본다면, $q_\alpha=0$ 이라는 극한적인 경우를 제외하고는 일반적으로 q_α 가 커지면 이득도 커진다. 즉 game 이 player II 에게 유리하게 진행될 경우에는 player *I* 에게도 역시 유리하게 된다는 것을 알 수 있다. 그러나, player *I* 은 자기가 game 을 진행시키는 방법에 따라서 이득을 그렇게 많이 변화시킬 수 없음을 안다. 이것은 game 의 주도권을 player *II* 가 쥐고 있다는것을 의미한다(특히 $p_\alpha \doteqdot 1/2$ 일 때는 player *II* 가 주도권을 완전히 쥔다).

平均値 V 와 標準偏差 σ_V 의 表　　(上段 : V, 下段 : σ_V)

p_α \ q_α	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0	2.00 0	1.70 0.90	1.40 1.20	1.10 1.38	0.80 1.47	0.50 1.50	0.20 1.47	−0.10 1.38	−0.40 1.20	−0.70 0.90	−1.00 0
0.1	1.60 1.20	1.36 1.36	1.12 1.47	0.88 1.53	0.64 1.55	0.40 1.53	0.16 1.48	−0.08 1.38	−0.32 1.22	−0.56 0.99	−0.80 0.60
0.2	1.20 1.60	1.02 1.63	0.84 1.64	0.66 1.63	0.48 1.60	0.30 1.55	0.12 1.48	−0.06 1.38	−0.24 1.24	−0.42 1.06	−0.60 0.80
0.4	0.40 1.96	0.34 1.89	0.28 1.82	0.22 1.75	0.16 1.67	0.10 1.58	0.04 1.48	−0.02 1.38	−0.08 1.26	−0.14 1.13	−0.20 0.98
0.5	0 2.00	0 1.92	0 1.84	0 1.76	0 1.67	0 1.58	0 1.48	0 1.38	0 1.27	0 1.14	0 1.00
0.6	−0.40 1.96	−0.34 1.89	−0.28 1.82	−0.22 1.75	−0.16 1.67	−0.10 1.58	−0.04 1.48	0.02 1.38	0.08 1.26	0.14 1.13	0.20 0.98
0.8	−1.20 1.60	−1.02 1.63	−0.84 1.64	−0.66 1.63	−0.48 1.60	−0.30 1.55	−0.12 1.48	0.06 1.38	0.24 1.24	0.42 1.06	0.60 0.80
0.9	−1.60 1.20	−1.36 1.36	−1.12 1.47	−0.88 1.53	−0.64 1.54	−0.40 1.53	−0.16 1.47	−0.08 1.37	−0.32 1.22	−0.56 0.99	−0.8 0.6
1.0	−2.00 0	−1.70 0.90	−1.40 1.20	−1.10 1.38	−0.80 1.47	−0.50 1.50	−0.20 1.47	0.10 1.38	0.40 1.20	0.70 0.90	1.00 0


L
10
5
0
Pα=0.6
Pα=0.5
Pα=0.2
Pα=0.8
Pα=0
Pα=1.0
0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1.0 qa

(k=5인 경우)


P
5
0
−5
−10
0
qa=1.0
qa=0
qa=0.8
qa=⅔
qa=0.6
qa=0.4
0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1.0 Pα

(k=5인 경우)

일반적으로 σ_V의 값이 V에 비하여 크다는 것을 알 수 있다. 그래서 위에서 지적한 바와 같이 중요한 시기에 σ_V의 값을 크게 좌우할 수 있는 힘이 없는 player I에게는 이 game은 유리하지 않다고 생각된다. 따라서 player I은 오히려 game을 하지않는 편이 바람직한 일이 된다.

따라서 심각한 문제에 있어서 有限回만 행하게 되는 判定에서는 minimax 사고방식이 완전한 것은 아님을 거듭 강조하여 둔다.

참고 문헌

[1] Thomas S. Ferguson, *Mathematical Statistics, Decision Theoretic Approach*, Academic Press, New York and London, (1967).

[2] John Von Neumann and Oskar Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behavior*, John Wiley and Sons, Inc., New York, (1967).

서울 대학교