대한수학회 회보
제11권제 1 호 (1974), pp. 29-33

VOLTERRA 積分方程式의 解의 存在性에 關하여

李 樟 雨

I. 序 言

Volterra 型積分方程式의 理論的硏究에 關한 中心問題는 그方程式의 連續解의 存在와 唯一性에 關한 定理이다. 이定理는 普通 相反定理와 反轉의 操作으로써 證明된다 [1].

近來에 Romano M. De Santis [2]는 正射影作用素와 有界線形作用素로서 Hilbert 空間에서 一般化된 Volterra 積分方程式의 解가 唯一히 存在하는 것에 關한 基本定理를 確立하였다.

本論文은 複素 Banach 空間 L_p 에 있어서 Volterra 作用素와 Resolvent 核과의 關係에서 Volterra 方程式의 解가 唯一히 存在하는 몇가지 基本定理를 얻고자 한다.

앞으로 複素 Banach 空間 L_p 에서 R 로 寫像하는 配置集合을 $F(L_p)$로서 表現하고 連續逆이라는 用語를 簡單히 記號 CI 로서 나타내기로 한다.

II. L_p 型의 Volterra 作用素

複素 Banach 空間 L_p 上에서 $k(x, y)$가 $y\leq x$ 에 對해서 p-可積分函數이고 $y>x$ 에 對해서 零일때 積分作用素 K:

$$K: \varphi(x)\to\int_0^x k(x, y)\varphi(y)dy \quad (0\leq y\leq x\leq T) \tag{1}$$

를 Volterra 作用素라한다˙ Volterra 作用素 K의 norm 는

$$\|K\|=\left\{\int_0^T\left[\int_0^x |k(x, y)|^p dy\right]dx\right\}^{1/p} \tag{2}$$

로서 定義하고 $\|K\|\leq M<\infty$ 일때 作用素 K는 L_p에서 有界作用素라 한다. 두개의 Volterra 作用素를

$$K_1: \varphi(x)\to\int_0^x k_1(x, y)\varphi(y)dy, \quad K_2: \varphi(x)\to\int_0^x k_2(x, y)\varphi(y)dy$$

이라할때 積分核 k_1과 k_2 上의 制限下에서 作用素 K_1과 K_2와의 合成을

$$K_1K_2: \varphi(x)\to\int_0^x k_1*k_2(x, y)\varphi(y)dy \tag{3}$$

로定義하고 여기서

$$k_1 * k_2(x, y) = \int_y^x k_1(x, z) k_2(z, y) dz \tag{4}$$

이다. Volterra 作用素의 合成은 作用素의 合成으로서 이루어지지 않고 核空間과 合成 $k_1 * k_2$ 로서 이루어진다 [3].

(4)에 依하면 세개의 核 k_1, k_2 및 k_3 에 對해서 結合律, 즉

$$(k_1 * k_2) * k_3 = k_1 * (k_2 * k_3) = k_1 * k_2 * k_3$$

이成立되고 따라서

$$k^n = k * k * \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots * k \qquad (n \text{ 개의 因子}) \tag{5}$$

임을 알수 있다.

合成 Volterra 作用素의 norm 는 (2)와 (5)에 依해서 $L = K^n$ 일때

$$\|L\| = \|K^n\| \leq \|K\|^n \tag{6}$$

임을 알수 있다.

<命題 1> 核 $k(x, y)$가 分解核 즉 $k(x, y) = g(x) h(y)$ 일때 Volterra 作用素 K는

$$K : \varphi(x) \to g(x) \int_0^x h(y) \varphi(y) dy \tag{7}$$

이고 K의 合成作用素 K^m 는

$$K^m : \varphi(x) \to \int_0^x k^m(x, y) \varphi(y) dy \tag{8}$$

로서 定義되며 여기서

$$\alpha(x, y) = \int_y^x g(z) h(z) dz, \quad k^m(x, y) = g(x) h(y) \frac{\alpha(x, y)^{m-1}}{(m-1)!} \tag{9}$$

이다.

(증명) $k(x, y) = g(x) h(y)$이고 (3)과 (4)에 依하여

$$\begin{aligned} k^2(x, y) = k ※ k(x, y) &= \int_y^x k(x, z) k(z, y) dz \\ &= g(x) h(y) \int_y^x g(z) h(z) dz \\ &= g(x) h(y) \alpha(x, y) \end{aligned}$$

이다. 數學的歸納法으로서 $m-1$ 일때 成立假定하고 m 일때를 증명하면

$$\begin{aligned} k^m(x, y) = k * k^{m-1}(x, y) &= \int_y^x k(x, z) k^{m-1}(z, y) dz \\ &= \int_y^x g(x) h(z) [g(z) h(y) \alpha(z, y)^{m-2} / (m-2)!] dz \\ &= g(x) h(y) \int_y^x [\alpha(z, y)^{m-2} / (m-2)!] g(z) h(z) dz \end{aligned}$$

그런데 (9)에 依하면 $\partial\alpha(z, y) / \partial z = g(z) h(z)$ 이므로

$$\int_y^x \left[\frac{\alpha(z,y)^{m-2}}{(m-2)!}\right] g(z)h(z)dz = \frac{\alpha(z,y)^{m-1}}{(m-1)!}\Bigg]_{z=y}^{z=x}$$
$$= \frac{\alpha(x,y)^{m-1}}{(m-1)!} - \frac{\alpha(y,y)}{(m-1)!} = \frac{\alpha(x,y)^{m-1}}{(m-1)!}$$

이고 따라서

$$k^m(x,y) = g(x)h(y)\alpha(x,y)^{m-1}/(m-1)!$$

故로 모든 自然數 m에 對해 成立한다.

Volterra 作用素 K의 積分核 $k(x,y)$가 다음 네가지 條件을 滿足할때 作用素 K를 L_p 型의 Volterra 作用素라 하자. 즉 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ 일때

A]: $k(x,y)$가 $[0,T]$에서 p-可積分函數이고 $y>x$ 일때 $k(x,y)=0$ 이다.

B]: $[0,T]$의 거의 모든 x에 對해서 $k(x,y)$가 y의 函數일때 $k(x,y)\in L_p[0,T]$

C]: $[0,T]$이 거의 모든 y에 對해서 $k(x,y)$가 x의 函數일때 $k(x,y)\in L_p[0,T]$ 이다.

D]: 아래것들은 모두 有限이다.

$$\int_0^T\left\{\int_0^T|k(x,y)|^q dy\right\}^{p/q}dx<\infty,\quad \int_0^T\left\{\int_0^T|k(x,y)|^p dx\right\}^{q/p}dy<\infty \tag{10}$$

上述한 定義와 命題에 依해서 아래와 같은 L_p 型의 Volterra 作用素에 對한 命題를 얻을 수 있다.

<命題 2> Volterra 作用素 K가 L_p 型이면, 그合成作用素 K^m도 L_p 型이고

$$G(x)=\int_0^x|k(x,y)|^q dy,\qquad H(y)=\int_y^T|k(x,y)|^p dx\quad (0\leq x\leq T) \tag{11}$$

$$\alpha(x,y)=\int_y^x G(z)^{p/q}dz\qquad (0\leq y\leq x\leq T) \tag{12}$$

이라 할때 $m\geq 2$에 對해서

$$|k^m(x,y)|\leq G(x)^{1/q}H(y)^{1/p}\left\{\frac{\alpha(x,y)^{m-2}}{(m-2)!}\right\}^{1/p} \tag{13}$$

이다.

(증명) $k^2(x,y)$에 對해서 Hölder 不等式을 使用하면

$$|k^2(x,y)|\leq\int_y^x|k(x,z)||k(z,y)|dz$$
$$\leq\left\{\int_y^x|k(x,z)|^q dz\right\}^{1/q}\left\{\int_y^x|k(z,y)|^p dz\right\}^{1/p}$$
$$\leq\left\{\int_0^x|k(x,z)|^q dz\right\}^{1/q}\left\{\int_y^T|k(z,y)|^p dz\right\}^{1/p}$$
$$=G(x)^{1/q}H(y)^{1/p}$$

(10)에 依해서 k^2은 L_p 型이므로 따라서 K^2도 L_p 型이다.

數學的歸納法으로 $m-1$ 일때 成立함을 假定하고 m일때 (13)을 증명하면

$$\begin{aligned}|k^m(x,y)| &\leq \int_y^x |k(x,z)||k^{m-1}(z,y)|dz \\ &\leq \left\{\int_y^x |k(x,z)^q dz\right\}^{1/q}\left\{\int_y^x |k^{m-1}(z,y)^p dz\right\}^{1/p} \\ &\leq \left\{\int_0^x |k(x,z)|^q dz\right\}^{1/q}\left\{\int_y^x G(z)^{p/q}H(y)\ \frac{\alpha(z,y)^{m-3}}{(m-3)!}dz\right\}^{1/p} \\ &= G(x)^{1/q}H(y)^{1/p}\left\{\int_y^x \frac{\alpha(z-y)^{m-3}}{(m-3)!}G(z)^{p/q}dz\right\}^{p/q}\end{aligned}$$

(12)에 依하여 $\partial\alpha(z,y)/\partial z = G(z)^{p/q}$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_y^x \left\{\frac{\alpha(z,y)^{m-3}}{(m-3)!}\right\}G(z)^{p/q}dz &= \alpha(z,y)^{m-2}/(m-2)!\ \Big|_{z=y}^{z=x} \\ &= \frac{\alpha(x,y)^{m-2}}{(m-2)!} - \frac{\alpha(y,y)^{m-2}}{(m-2)!} = \alpha(x,y)^{m-2}/(m-2)!\end{aligned}$$

따라서

$$|k^m(x,y)| \leq G(x)^{1/q}H(y)^{1/p}[\alpha(x,y)^{m-2}/(m-2)!]^{1/p}$$

이다.

여기서 $G(x)^{1/q} < \infty$, $H(y)^{1/p} < \infty$ 이고 $[\alpha(x,y)^{m-2}/(m-2)!]^{1/p}$ 은 有限이므로 K 가 L_p 型이면 K^m 도 L_p 型이다.

III. 解의 存在에 關한 定理

第 2 種의 Volterra 積分方政式;

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x k(x,y)\varphi(y)dy \quad (0 \leq y \leq x \leq T) \tag{14}$$

에서 이方程式의 Resolvent 核 $R_K(x,y)$는

$$R_K(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} k^m(x,y) \tag{15}$$

로 이루어진다 [1]. 方程式 (14)를 Volterra 作用素 $K \in F(L_p)$로서 表現하면 (14)의 解 φ는

$$\varphi = (1-K)^{-1}f$$

이다.

(14)의 解가 存在한다는것은

Neumann 級數가 收束 $\Longleftrightarrow$ $(1-K)$의 CI 가 存在

이므로 命題 2 의 結果로서 다음 定理를 얻을수 있다.

<定理 1> Volterra 作用素 K 가 L_p 型이면 任意의 $m > \alpha(x,y)$에 對해서 方方程式 (14)는 唯一한 解를 갖는다.

(증명) (13)과 (15)에 依하면

$$|R_K(x,y)| \leq \sum_{m=1}^{\infty} |k^m(x,y)| \leq G(x)^{1/q} H(y)^{1/p} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{\alpha(x,y)^{m-1}}{(m-1)!} \right]^{1/p}$$

이고 이곳에 比較判定法을 適用시키면 任意의 $m > \alpha(x,y)$에 對해서

$$\left\{ \frac{\alpha(x,y)^m/m!}{\alpha(x,y)^{m-1}/(m-1)!} \right\}^{1/p} = \left\{ \frac{\alpha(x,y)}{m} \right\}^{1/p} < 1$$

따라서 Resolvent에 對한 Neumann 級數는 收束하고 方政式(14)의 解가 唯一히 存在한다는 것은 Resolvent 核이 存在하는것에 지나지 않으므로 $m > \alpha(x,y)$에 對해서 唯一한 解를 갖는다.

〈系〉 만일에 $\int_0^T G(z)^{p/q} dz < 1$ 이면 L_p 空間上에서 作用素 $(1-K)$가 CI 를 갖는다.

(증명) $|\alpha(x,y)| = \int_y^x G(z)^{p/q} dz < 1 \leq m$, 따라서 定理에 依해서 成立한다.

<定理 2> $G(T) < 1$ 이면 L_p 空間上에서 作用素 $(1-K)$가 CI 를 갖는다.

(증명) $\|K\varphi\| = \sup_{\|\varphi\|=1} \|K\varphi\| = \sup_{\|\varphi\|=1} \cdot \sup_{0 \leq x \leq T} |K\varphi(x)|$

$$\begin{aligned}
&= \sup_{\|\varphi\|=1} \cdot \sup_{0 \leq x \leq T} \int_0^x |k(x,y)\varphi(y)| dy \\
&\leq \sup_{\|\varphi\|=1} \int_0^T |k(T,y)\varphi(y)| dy \\
&\leq \sup_{\|\varphi\|=1} \left\{ \left(\int_0^T |k(T,y)|^q dy \right)^{1/q} \left(\int_0^T |\varphi(y)|^p dy \right)^{1/p} \right. \\
&= \left(\int_0^T |k(T,y)|^q dy \right)^{1/q} = G(T)^{1/q}
\end{aligned}$$

그런데 作用素$(1-K)$가 CI를 갖기 위한 充分한 條件은 $\rho(K) < 1$ 이므로 [4] [5]. $G(T) < 1$ 이면 $\rho(K) \leq \|K\| \leq G(T) < 1$ 이고 따라서 作用素 $(1-K)$는 CI 를 갖는다.

참고 문헌

[1] James Alan Cohran, *The analysis of linear integral equations*, McGraw-Hill Book Company Newyork, 1972.

[2] Romano M. De Santis, *On a generalized Volterra equation in Hilbert space*, Proc. Amer. Math. Soc. Vol. 38, No. pp. 563-570, May, 1973.

[3] J.M. Freeman, *Volterra operators similar to* $J: f(x) \to \int_0^x (y)dy$, Trans. Amer. Math. Soc. Vol. 126, pp. 181-192. 1967.

[4] Edgar Raymond Lorch, *Spectral theory*, Newyork, Oxford University Press, 1962.

[5] Taylor, A., *Introduction to functional analysis*, John Willey, Newyork, 1958.

한양대학교