Bull. Korean Math. Soc.
Vol. 12, No. 2, 1975

分離的多元環의 GALOIS 理論

吳 承 浩

F를 標數 0을 가지는 體라 하자. [1]과 [4]에서 F上의 Galois 理論에 관한 硏究를 볼수 있다. 더욱 可換環에 關連된 Galois 理論은 Child [2]와 Kanazaki [5]에 의하여 硏究되어 왔다. 1를 가지는 可換環 R上의 separable R-algebra 에 대한 Galois 理論의 硏究는 [3]에서 찾을 수 있다. 이 論文에서는 separable F-algebra에 관한 Galois理論을 취급하려 한다〔定理 7〕.

다음에 F는 標數 0을 가진 주어진 體라고 가정한다. A를 F-algebra라 하고 A°를 A의 雙對 F-algebra라 하자. 이때 $A^e=A\otimes_F A^\circ$는 A의 enveloping algebra 라고 부른다.

定義 1. 左側 A^e-module homomorphism

$\mu: A^e\to A$를 $\mu(\sum_i a_i\otimes a_i^\circ)=\sum_i a_i a_i^\circ$와 같이 정의한다. 여기서 $a_i\in A$, $a_i^\circ\in A^\circ$이다. 만약 完全列

$$0\to\ker\mu \to A^e \xrightarrow{\mu} A \to 0$$

이 split되면 A는 *separable F-algebra*라 한다. A가 separable F-algebra라면 A는 μ-structure 아래에서 左側 projective A^e-module가 된다. 그리고 A^e는 $\mu(e)=1$, $Je=0$ ([3])인 separablity idempotent e를 포함한다. 특히 모든 F-module 는 F위에서 vector space가 되고 모든 射影的 separable F-algebra는 有限生成되기 때문에 separable F-algebra는 有限生成되고 射影的 F-module이다.

定義 2. 可換環 K가 F-algebra이면 그것은 F의 *extension*이라 부른다 (F가 體이기 때문에 각 F-algebra는 *faithful* F-algebra라는 것에 주의). 이 경우에 있어서 우리는 F가 K의 部分環임을 볼 수 있다. F-自己同型寫像은 K의 同型寫像으로 F의 元을 不變으로 하는 것을 뜻 하기도 한다. K의 모든 F-自己同型寫像은 有限群이며 $G(K,F)$로 表示한다. H를 $G(K,F)$의 部分群이라고 하자. 그리고 $K_H=\{x\in K|\sigma(x)=x,\ {}^\forall\sigma\in H\}$라 하자. 또 K를 F의 *separable extension*이라 하자(즉 K는 separable 이고 F의 extension이다). $G(K,F)$의 部分群 G와 F를 포함하는 K의 部分環 S를 취하자. 만약 S가 다음 조건을 만족하는 경우 *Galois群* G를 가진 F의 *Galois extension*이라 부른다.

(i) $S_G=F$

(ii) S는 separable F-algebra이다.

(iii) S에 있어서 각 non-zero idempotent e에 대하여 또 G에 있어서의 짝 $\sigma\neq\tau$에 대하여 $\sigma(x)e\neq\tau(x)e$가 되는 元 x가 存在한다.

S를 Galois群 G를 가지는 F의 Galois extension이라 하자. S-module에 대하여 自由基 $\{\Delta_\sigma|\sigma\in G\}$를 생각하고 이 S-module에 대한 乘法을 $(a\Delta_\sigma)\cdot(b\Delta_\tau)=a\sigma(b)_{\sigma,\tau}$와 같이 定義한다. 여기서 $a,b\in S$ 그리고 $\sigma,\tau\in G$이다. 다음에 우리는 새로운 F-algebra $\Delta(S:G)$를 얻는다. $\{\nabla_\sigma|a\in G\}$를 S-module에 대한 基가 되게 함으로서 S-algebra $\nabla(S:G)$를 만들자. 그리고 모든 $\sigma,\tau\in G$와 $a,b\in S$에대하여 $(a\nabla_\sigma)\cdot(b\nabla_\tau)=ab\nabla_\sigma\delta_{\sigma,\tau}$라고 乘法을 定義하자. 여기서 만약 $\sigma\neq\tau$이면 $\delta_{\sigma,\tau}=0$, $\sigma=\tau$이면 $\delta_{\sigma,\tau}=1$이다.

定理 3. Galois群 G를 가지는 F의 Galois extension S에 대하여 다음것들은 同等하다.

(i) $\sum_{j=1}^{n}x_j\sigma(y_j)=\delta_{\sigma,1}$이 되는 元 $x_1,x_2,\cdots,x_n,y_1,y_2,\cdots,y_n$이 S에 存在한다.

(ii) $x\in S$에 대하여 $(\phi(a\Delta_\sigma))(x)=a\sigma(x)$로 定義되어지는 F-algebra 準同型寫像 $\phi:\Delta(S:G)\to\mathrm{Hom}_F(S,S)$는 同型寫像이다.

(iii) $\phi(a\otimes b)=\sum_{\sigma\in G}a\sigma(b)\nabla_\sigma$에 의하여 定義되어지는 S-algebra 準同型寫像 ϕ: $S\otimes_F S\to\nabla(S:G)$은 同型寫像이다.

(iv) S의 각 maximal ideal M에 대하여 또 각 $1\neq\sigma\in G$에 대하여 $(\sigma(x)-x)\notin M$와 같은 元 x가 S에 있다.

證明. (i)⇒(ii) : $h\in\mathrm{Hom}_F(S,S)$에 대하여 $\omega=\sum_{\sigma\in G}\sum_{j=1}^{n}h(x_j)\sigma(y_j)\Delta_\sigma$이 $\Delta(S:G)$의 元이 되게 한다. 그러면 $x\in S$에 대하여

$$\begin{aligned}\phi(\omega)(x)&=\phi\Big(\sum_{\sigma\in G}\sum_{j=1}^{n}h(x_j)\sigma(y_j)\Delta_\sigma\Big)(x)\\&=\sum_{\sigma\in G}\sum_{j=1}^{n}h(x_j)\sigma(y_j)\sigma(x)\\&=\sum_{\sigma\in G}\sum_{j=1}^{n}h(x_j)\sigma(y_jx)=\sum_{j=1}^{n}h(x_j)\Big(\sum_{\sigma\in G}\sigma(y_jx)\Big)\\&=h\Big(\sum_{\sigma\in G}\sum_{j=1}^{n}x_j\sigma(y_jx)\Big)\qquad\Big(\sum_{\sigma\in G}\sigma(y_jx)\in F\Big)\\&=h\Big(\sum_{\sigma\in G}\sum_{j=1}^{n}x_j\sigma(y_j)\sigma(x)\Big)\\&=h(x)\quad((\mathrm{i})\text{에서})\end{aligned}$$

이와 같이 하여 ϕ는 全射이다. ϕ가 單射라는 것을 證明하기 위하여 $u=\sum_{\sigma\in G}a_\sigma\Delta_\sigma$ $(a_\sigma\in S)$ $\in\Delta(S:G)$가 되게하고 $\phi(u)=0$라 假定한다. 그러면

$$0=\sum_{j=1}^{n}\sum_{\sigma\in G}\phi(u)(x_j)\sigma(y_j)\Delta_\sigma$$

$$=\sum_{\sigma\in G}\sum_{\tau\in G}a_\tau\tau(x_j)\sigma(y_j)\varDelta_\sigma$$
$$=\sum_{\sigma\in G}\sum_{\tau\in G}a_\tau\ \tau\left(\sum_{j=1}^{n}x_j\tau^{-1}\right)\sigma(y_j)\varDelta_\sigma$$
$$=\sum_{\sigma\in G}a_\sigma\varDelta_\sigma=u$$

(ii)$\Rightarrow$(iii) : $t=\sum_{\sigma\in G}\varDelta_\sigma$라 하자. 이때 $\phi(t\cdot S)=\mathrm{Hom}_F(S,F)$이다. $a\in S$, $x\in S$에 대하여 $(\phi(t\cdot a))(x)=\sum_{\sigma\in G}\sigma(ax)\in F$, 따라서 $\phi(t\cdot S)\subseteqq\mathrm{Hom}_F(S,F)$이다. 그러므로 $\phi:\varDelta(S:G)\cong\mathrm{Hom}_F(S,S)$ 또 $F\subset S$, 각 $f\in\mathrm{Hom}_F(S,F)$에 대하여 $\phi(u)=f$와 같은 元 $u\in\varDelta(S:G)$가 存在한다. $u=\sum_{\sigma\in G}a_\sigma\varDelta_\sigma$라 하자. 그러면 임의의 $x\in S$에 대하여 $\phi(u)(x)=\sum_{\sigma\in G}a_\sigma\sigma(x)\in F$, 또 이리하여 임의의 $\rho\in G$에 대하여

$$\rho\left(\sum_{\sigma\in G}a_\sigma\sigma(x)\right)=\sum_{\tau\in G}\rho(a_{\rho^{-1}\tau})\tau(x)$$
$$=\sum_{\tau\in G}a_\tau\tau(x)$$

여기서 $\tau=\rho\sigma$이다. ϕ는 同型寫像이니 모든 $\sigma\in G$에 대하여 $\rho(a_{\rho^{-1}\tau})=a_\tau$ 혹은 $a_\sigma=\sigma(a_1)$ (1은 G의 單位元)이다. 그러므로 $y=\sum_{\sigma\in G}\sigma(a_1)\cdot\varDelta_\sigma=t\cdot a_1$, 또 $\mathrm{Hom}_F(S,F)=\phi(t\cdot S)$이다. 이때 다음의 同型寫像을 가지게 된다.

$$S\otimes_F S\ \overset{\cong}{\rightarrow}\ S\otimes_F t\cdot S\ \overset{\cong}{\rightarrow}\ S\otimes_F\mathrm{Hom}_F(S,F)\ \overset{\cong}{\rightarrow}\ \mathrm{Hom}_F(S,S)$$
$$\overset{\cong}{\rightarrow}\ \varDelta(S:G)\ \overset{\cong}{\rightarrow}\ \nabla(S:G),$$

또 이들 同型寫像의 合成寫像이 바로 ϕ이다([3], [2]와 [5]).

(iii)$\Rightarrow$(i) : $\phi^{-1}(\nabla_1)=\sum_{j=1}^{n}x_j\otimes y_j$라 하자. 이 때 $\sum_{j=1}^{n}x_j\sigma(y_j)=\delta_{\sigma,1}$은 ϕ의 定義에 의하여 明白하다.

(i)$\Rightarrow$(iv) : G속의 어떤 $\sigma\neq1$과 또 S의 어떤 maximal ideal M에 대하여 $(1-\sigma)S\in M$이다. 이때 (i)에 의하여 $1=\sum_{j=1}^{n}x_j(y_j-\sigma(y_j))\in M$이다. ($\sum_{j=1}^{n}x_jy_j=1$ 임을 주의하라). 이것은 모순이다.

(iv)$\Rightarrow$(i) : $1\neq\sigma\in G$에 대하여 $\sum_{j=1}^{n}x_j(1-\sigma)y_j$ 모양의 元들에 대하여 生成된 ideal은 (iv)에 의하여 S의 모두이다. 이리하여 $\sum_{j=1}^{n}x_j(y_j-\sigma(y_j))=1$와 같은 S에는 $x_1,x_2,\cdots,x_n,y_1,y_2,\cdots,y_n$가 있다. $x_{n+1}=-\sum_{j=1}^{n}x_j\sigma(y_j)$ 또 $y_{n+1}=1$라 하면

$$\sum_{j=1}^{n+1}x_j\sigma(y_j)=\delta_{1,\sigma}\ \text{이다.}$$

G_1과 G_2가 G의 單位元을 가지는 G의 임의의 2개의 部分集合이 되게하자. 그리고 그것에 대하여 모든 $\sigma\in G_1$ 또 $\sigma'\in G_2$이

$$\sum_{j=1}^{n} x_j\sigma(y_j)=\delta_{\sigma,1} \quad \sum_{k=1}^{m} x_k'\sigma'(y_k)=\delta_{\sigma',1}$$

되게 하는 $x_1, x_2, \cdots, x_n, y_1, y_2, \cdots, y_n$; $x_1', x_2', \cdots, x_m', y_1', y_2', \cdots, y_m'$가 S에 있다. 다음에 임의의 $\tau\in G_1\cup G_2$에 대하여

$$\sum_{(j,k)=(1,1)}^{(n\,m)} x_jx_k'\tau(y_jy_k')=\delta_{\sigma',1} \text{ 이다.}$$

$G=\bigcup_{\sigma\neq 1}\{1, \sigma\}$이니 證明은 完成되었다.

만약 S가 $G(S, F)=G$를 가지는 F의 正規擴大體이면 ([4]) S는 그것의 idempotent로서 다만 0과 1를 가지고 또 S는 F위에서 有限次元의 vector 空間이다. 주어진 體 F의 모든 擴大體는 F-algebra로서 古典的의미에서 分離的이기 때문에 S는 群 G를 가지는 F의 Galois 擴大이다. 이것은 古典的 Galois理論이 우리의 Galois 理論에 包含된다는 것을 뜻한다. 위의 定理의 證明에 있어서 S이 群 G를 가진 F의 Galois 擴大이고 $t_r=\phi(\sum_{\sigma\in G}\Delta_\sigma)\in \mathrm{Hom}_F(S, F)$라면 t_r은 右側 S-module로서 $\mathrm{Hom}_F(S, F)$의 自由生成元이다. 群 G를 가진 F의 Galois 擴大 S는 F위에서 有限的으로 生成되고 사영적이고 faithful이니 S는 하나의 generator F-module ([3])이고 $\sum_{j=1}^{n} f_j(x_j)=1$이 되는 $x_1, x_2, \cdots, x_n\in S$와 $\mathrm{Hom}_F(S, H)$ 내에는 $f_1, f_2, \cdots, f_n$가 存在한다. 그러므로 어떤 $c_i\in S$에 대하여 $f_i=t_r(c_i-)$이고 또

$$1=\sum_{i=1}^{n} t_r(c_ix_i)=t_r(\sum_{i=1}^{n} c_ix_i)\text{을 얻는다.}$$

이것은 $c=\sum_{i=1}^{n} c_ix_i$이기 때문에 $t_r(c)=1$이 되는 하나의 元 c가 S에 存在한다는 것을 意味한다. 더욱 群 G를 가지는 F의 Galois 擴大 S에 대하여 만약 T가 可換 F-algebra이고 $\sigma\in G$, $t\in T$ 그리고 $s\in S$에 대하여 $\sigma(t\otimes S)=t\otimes\sigma(s)$에 의하여 $T\otimes_F S$는 群 G를 가진 T의 Galois 擴大이다([5]).

定理 4. S가 群 G를 가진 F의 Galois 擴大라 하자. 그러면 $\dim_F(S)$ $(=\mathrm{Rank}_F(S))=$the order of G $(=[G:1])$.

證明 $S\otimes_F S\cong\nabla(S:G)$가 됨을 상기하면

$$\begin{aligned}\{\mathrm{Rank}_F(S)\}^2&=\dim_F(S\otimes_F S)\ (=\mathrm{Rank}_F(S\otimes_F S))\\&=\mathrm{Rank}_F\ (\nabla(S:G))\\&=\{G:1\}\cdot\mathrm{Rank}_F(S)\text{이다.}\end{aligned}$$

그리고 이것은 $\mathrm{Rank}_F(S)=[G:1]$임을 의미한다.

補題 5. T가 可換 separable F-algebra가 되게하고 $h: T\to F$가 F-algebra 準同形寫像이 되게하자. 그러면 모든 $t\in T$에 대하여 $h(t)e=te$이고 또 $h(e)=1$이 되는 T에는 유일한 idempotent e가 있다. 더욱 h_i $(i=1,2,\cdots,n)$가 T에서 F에의 F-algebra 準同型寫像이고 그리고 e_i $(i=1,2,\cdots,n)$가 對應하는 idempotent 들이면 $e_ie_j=e_j\delta_{ij}$이다.

證明. $\sum_{j=1}^{n} x_jy_j=1$를 가지는 T에 대하여 separability idempotent $\sum_{j=1}^{n} x_j\otimes y_j$가 있고 또 $\mu(x\otimes y)=xy$에 대하여 $\mu: T\otimes_F T\to T$ 임을 회상한다. 하나의 idempotent의 準同型像은 또한 idempotent임을 주의하자. 이와 같이 하여 多元環準同型 $h: T\to F$에 對하여 $e=\sum_{j=1}^{n} h(x_j)y_j\in T$는 idempotent이다. $t\in T$에 대하여

$$
\begin{aligned}
te(=1\otimes te)=1\otimes t\cdot\mu\Big(\sum_{j=1}^{n} h(x_j)\otimes y_j\Big)&=\mu(h\otimes 1)\ \sum_{j=1}^{n} x_j\otimes y_jt\\
&=\mu(h\otimes 1)\Big(\sum_{j=1}^{n} tx_j\otimes y_j\Big)\\
&=\sum_{j=1}^{n} h(tx_j)y_j=h(t)\sum_{j=1}^{n} h(x_j)\,y_j\\
&=h(t)e \text{ 이다.}
\end{aligned}
$$

또한 $h(e)=h\Big(\sum_{j=1}^{n} h(x_j)\,y_j\Big)=\sum_{j=1}^{n} h(x_j)h(y_j)=h\Big(\sum_{j=1}^{n} x_jy_j\Big)$

$$=h(1)=1 \text{ 이다.}$$

만약 e'가 모든 $t\in T$에 對하여 $te'=h(t)e'$를 가지는 또 하나의 idempotent이고 $h(e')=1$이면 $ee'=h(e)e'=e'=e'e=h(e')e=e$ 이다. 이와 같이하여 e의 유일성이 證明된다. 이제 補題의 둘째部分을 證明하기로 한다. 하나의 짝(i,j) $(1\leq i,\ j\leq n)$에 대하여 $h_j(e_i)$은 F의 한 idempotent이다. 그러므로 $h_j(e_i)=1$ 혹은 0이다. $h_j(e_i)=1$이면 임의의 $t\in T$에 대하여

$$
\begin{aligned}
h_j(t)&=h_j(t\cdot 1)=h_j(t)h_j(1)=h_j(t)h_j(e_i)=h_j(te_i)\\
&=h_j(h_i(t)e_i)=h_i(t)h_j(e_i)=h_j(t) \text{ 이고}
\end{aligned}
$$

이와 같이하여 $h_i=h_j$이면 $j=i$, 즉 $h_j(e_i)=\delta_{i,j}$이다. 결국 $e_ie_j=h_j(e_i)e_j=\delta_{i,j}e_j=e_j\cdot\delta_{i,j}$ 이다.

系 6. S가 하나의 可換 separable F-algebra가 되게 하자. 그리고 T가 0과 1 이외의 idempotent를 가지지 않는 可換 F-algebra라 하자. 그러면 S로부터 T에의 $\mathrm{Rank}_F(S)$개수만큼의 準同型寫像이 있다. 만약 S가 群 G를 가진 F의 Galois 擴大이면 또 g와 f가 S에서 T에의 2개의 多元環準同型寫像이면 $g=f\sigma$를 가지는 σ가 G에 唯一하게 存在한다. 더욱 S가 그것의 idempotent로서 0와 1만 가진다면 S에서 S에의 F-準同型寫像은 G속의 自己準同型寫像이다.

證明. F는 體이니 有限的으로 生成된 separable F-algebra이다. 그러므로 $T \otimes_F S$는 有限的으로 生成된 separable T-algebra이다 ([3]). S에서 T에의 多元環準同型寫像 $\sigma_1, \cdots, \sigma_m$가 있고 $x \in T$와 $y \in S$에 대하여 $h_i(x \otimes y) = x\sigma_i(y)$가되는 $T \otimes_F S$에서 T에의 서로 다른 T-algebra homomorphism $h_1, \cdots, h_m$가 存在한다. 이리하여 앞의 補題로 부터 모든 $\omega \in T \otimes S$와 $h_i(e_j) = \delta_{i,j}$에 대하여 $\omega e_i = h_i(\omega) e_i$를 가지는 直交 idempotent $e_1, \cdots, e_m$이 $T \otimes_F S$ 속에 있다. 이와같이 하여 $h(T \otimes_F S) \subset T \cong T \otimes 1$ 이기 때문에 $(T \otimes_F S) e_i = (T \otimes 1) e_i$이다. 그리고 $(x \otimes 1) e_i = 0$은 $(x \otimes 1) h_i(e_i) = x \otimes 1 = x = 0$ 임을 의미한다. 그러므로 이때 $T \in (T \otimes_F S) e_i$이다. e_i가 直交이니

$$T \otimes_F S \cong (T \otimes_F S) e_1 \oplus \cdots \oplus (T \otimes_F S) e_m \oplus (T \otimes_F S)(1 - e_1 - \cdots - e_m) \cong \underbrace{T \oplus \cdots \oplus T}_{m\text{項}} \oplus (T \otimes_F S)(1 - e_1 - \cdots\cdots - e_m)$$

또한 $T \otimes_F S \cong T \oplus \cdots \oplus T$ $(\mathrm{Rank}_F(S)$-項$)$이기 때문에 $m \leqq \mathrm{Rank}_F(S)$가 된다. 이와 같이 S가 群 G를 가지는 Galois 擴大이면 $[G:1] = \mathrm{Rank}_F(S)$이니 $m \leqq [G:1]$ 이다. 만약 f가 S에서 T에의 F-準同型寫像이고 $f\sigma = f$ $(\sigma \in G)$이면 모든 $x \in S$에 대하여 $f(\sigma(x) - x) = 0$이고 定理 3 은 $\sigma = 1$임을 암시한다. 그러므로 集合 $\{f\sigma | \sigma \in G\}$은 $[G:1]$개의 서로 다른 元을 포함한다. 만약 g가 S에서 T에의 또 하나의 F-準同型寫像이면 $g \in \{f\sigma | \sigma \in G\}$이고 이와 같이하여 $g = f\sigma$인 唯一한 $\sigma \in G$가 있다.

위의 準備段階를 가지고 우리는 다음의 主定理를 證明하려고 한다.

定理 7. (主定理) K가 Galois群 $G = G(K, F)$를 가지는 F의 Galois 擴大라 하자. 그러면 $[G:1] = \mathrm{Rank}_F(K)$이고 G의 部分群과 F를 가지는 K의 部分環 사이에는

$$H \to K_H, \quad S \to \{\sigma \in G | \sigma(x) = x \text{ for all } x \in S\}$$

인 1對1對應이 있고 F위에서 separable이 된다. 만약 對應部分環 S이 F의 Galois 擴大이면 部分群 H는 G에서 normal이다.

證明. 假定과 定理 4 에 의하여 $[G:1] = \mathrm{Rank}_F(K)$는 明白하다. 다음에 對應 $H \to K_H$는 G의 部分群에서 F를 가지는 K의 部分環에 1對1이고 또 F위에서 separable이다. 앞의 記述에 의하여 (定理 3 에서) 모든 $\sigma \in G$에 대하여 $\sum_{j=1}^{n} x_j \sigma(y_j) = \delta_{1,\sigma}$가 되는 $x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n$가 K안에 있다. 이 條件을 使用하면 K는 K_H의 Galois 擴大이고 系 6 에 의하여 H'가 $H \neq H'$인 G의 部分群이면 $K_H \neq K_{H'}$이다. $t_r \in \mathrm{Hom}_{K_H}(K, K_H)$를 $t_r = \sum_{\sigma \in H} \sigma$에 의하여 주어진 trace map라 하자 그러면 $t_r(c) = 1$를 가지는 元 $c \in K$가 있다. $a_j = t_r(x_j)$되게 하고 $b_j = t_r(y_j c)$ 그

라고 $e=\sum_{j=1}^{n} a_j\otimes b_j\in K_H\otimes_F K_H$라 하자. 그러면

$$\sum_{j=1}^{n} a_jb_j=\sum_{j=1}^{n}\sum_{\sigma\in H}\sum_{\tau\in H}\sigma(x_j)\tau(y_jc)=\sum_{\sigma}\sum_{\tau}\left(\sum_{j} x_j\sigma^{-1}\tau(y_j)\right)\sigma^{-1}\tau(c)=1$$

이다. 또한 임의의 $x\in K_H$에 대하여도 $\sum_{j=1}^{n} xx_j\otimes y_j=\sum_{j=1}^{n} x_j\otimes y_jx$ 이니

$$\begin{aligned}(x\otimes 1)e&=\sum_{j=1}^{n} xa_j\otimes b_j=\sum_{j=1}^{n}\sum_{\sigma\in H}\sum_{\tau\in H} x\sigma(x_j)\otimes\tau(y_jc)\\&=\sum_{\sigma\in H}\sum_{\tau\in H}(\sigma\otimes\tau)\left(\sum_{j=1}^{n}(xx_j\otimes y_j)\right)(1\otimes c)\\&=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{\sigma\in H}\sigma(x_j)\otimes\sum_{\tau\in H}\tau(y_jc)\right)(1\otimes x)\\&=(1\otimes x)\sum_{j=1}^{n} a_j\otimes b_j=(1\otimes x)e\text{이다.}\end{aligned}$$

이와 같이하여 K_H는 F위에서 separable이다. K는 群 H를 가지는 K_H의 Galois 擴大이니 K는 K_H의 有限的으로 生成된 擴大이다. 만약 H가 G의 正規部分群이면 G/H는 모든 $\sigma H\in G/H$와 $x\in K_H$에 대하여 $\sigma H(x)=\sigma(x)$에 의하여 K_H의 自己擴大同型群으로 作用한다. $(K_H)_{G/H}=F$이기 때문에 K_H는 Galois群 G/H를 가지는 F의 Galois 擴大이다. S가 F를 포함하고 그리고 F위에서의 separable인 K의 部分環이 되게하고 $H=\{\sigma\in G\mid\sigma(x)=x \text{ for all } x\in S\}$라 하자. 그러면 H는 G의 部分群이고 또 $S\subseteqq K_H$이다. $\sigma_1,\cdots,\sigma_n$을 $\sigma_1=1$을 가지는 G의 H에 의한 서로 다른 左側 coset의 代表元의 全體라고 하자. h_i를 $h_i(x\otimes y)=x\sigma_i(y)$ $(i=1,\cdots,n)$에 의하여 定義된 $K\otimes_F S$에서 K에의 K-algebra homomorphism이라 하자. 그러면 $K\otimes_F S$는 separable K-algebra이고 K는 0와 1以外의 다른 idempotent를 가지지 않는다. 이와 같이하여 補題 5에 의하여 모든 $\omega\in K\otimes_F S$에 대하여 $h_1(\omega)e_1=\omega e_1$이고 또 $h_i(e_1)=\delta_{i,1}(i=1,\cdots\cdots,n)$을 가지는 $K\otimes_F S$안에는 idempotent e_1이 있다.

$$e_1=\sum_{j=1}^{n} k_j\otimes s_j \text{ 되게 하라. 그러면 } h_i(e_1)=\sum_{j=1}^{n} k_j\sigma_i(s_j)=\delta_{1,i}$$

이고 또 $\sum_{j=1}^{n} k_j\sigma(s_j)=\begin{cases}1 & (\sigma\in H)\\ 0 & (\sigma\notin H)\end{cases}$ 이다.

결국 우리는 다음과 같은 것을 얻는다.

$$\sum_{j=1}^{n}\tau(k_j)s_j=\begin{cases}1 & (\tau\in H)\\ 0 & (\tau\notin H)\end{cases}$$

$(\sigma^{-1}(1)=1$임을 주의). $\sum_{\sigma\in H}\sigma(c)=1$인 $c\in K$, 그리고 $a\in K_F$라 하면 이때

$$a=\sum_{\sigma\in H}\sigma(a)=\sum_{\sigma\in G}\sum_{j=1}^{n}\sigma(k_jca)\,s_j$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{\sigma\in G}\sigma(k_jca)s_j\right) \text{ 이다.}$$

$\sum_{\sigma\in G}\sigma(k_jca)\in F$ 그리고 $s_j\in S$, $a\in S$ 또 $S=K_H$ 이기때문에 최종적으로 S를 Galois 擴大되게 하고 그리고 $S=K_H$되게 하자. 모든 $\sigma\in G$에 대하여 $\sigma H\sigma^{-1}=H$와 모든 $\sigma\in G$에 대하여 $\sigma(S)=S$는 同値임을 관찰하라. 系 6에 의하여 S에서 K에의 임의의 準同型寫像은 S의 自己準同型寫像이다. 이와 같이 하여 모든 $\sigma\in G$에 대하여 $\sigma(S)=S$이다.

參 考 文 獻

[1] E. Artin: *Galois Theory*, Notre Dame Mathematical Lectures, No. 2.

[2] L. N. Childs: *A note on the fixed ring of a Galois extensions*, Osaka J. Math., 4. (1967).

[3] F. De Meyer & E. Ingraham: *Separable Algebras over commutative rings*, Lecture Notes in Mathematics, No. 181, Springer-Verlag (1971).

[4] I. N. Herstein: *Topics in Algebra*, Blaisdell Publishing Company (1964).

[5] T. Kanazaki: *On Galois extensions of rings*, Nagoya Math. J. 27 (1966).

漢陽大學校