

〈논 문〉

경계요소법에 의한 축대칭 탄성체의 형상설계 민감도해석을 위한 직접미분법과 터빈 디스크의 형상 최적설계

이 부 윤*

(1995년 7월 6일 접수)

Direct Differentiation Method for Shape Design Sensitivity Analysis of Axisymmetric Elastic Solids by the BEM and Shape Optimization of Turbin Disc

Boo Youn Lee

Key Words : Shape Optimal Design(형상 최적설계), Sensitivity Analysis(민감도 해석), Axisymmetric(축대칭), Boundary Integral Equation(경계적분방정식), Boundary Element Method(경계요소법), Direct Differentiation Method(직접미분법), Turbine Disc(터빈디스크)

Abstract

A direct differentiation method is presented for the shape design sensitivity analysis of axisymmetric elastic solids. Based on the axisymmetric boundary integral equation formulation, a new boundary integral equation for sensitivity analysis is derived by taking material derivative to the same integral identity that was used in the adjoint variable method. Numerical implementation is performed to show the application of the theoretical formulation. For a simple example with analytic solution, the sensitivities by present method are compared with analytic sensitivities. As an application to the shape optimization, an optimal shape of a gas turbine disc to minimize the weight under stress constraints is found by incorporating the sensitivity analysis algorithm in an optimization program.

1. 서 론

기계요소를 설계할 때는 일반적으로 형상을 결정하는 단계를 거치게 된다. 고속으로 회전하는 터빈이나 압축기 로터의 디스크의 경우에는 무게를 최소화하는 것이 중요한 설계목표 중의 하나이므로, 변위와 응력을 주어진 제한치 내에 유지하면서 무게를 최소화하는 최적의 형상을 구해야 한다. 이와 같은 문제는 구조형상 최적설계의 범주에 해당

되며, 최적설계를 구하기 위해서는 일반적으로 비선형계획법(nonlinear programming method)이 사용된다. 수치적인 최적화를 수행할 때는 관련된 성능함수(performance function)의 형상에 관한 민감도를 최대한 정확하게 예측해야 한다. 왜냐하면 만일 예측된 민감도가 부정확하면 최적화에 소요되는 계산시간을 증가시킬 뿐만 아니라 원하는 최적의 설계로 수렴하지 않을 수도 있기 때문이다.

이러한 관점에서, 공학문제의 해석을 위해 널리 사용되는 경계요소법이 형상설계 민감도해석 분야에서도 많은 주목을 받아 왔다. 경계요소법 혹은 경계적분방정식을 이용한 형상설계 민감도해석방법

*회원, 한국중공업(주) 기술연구소

에 관한 연구 동향은 Burczynski⁽¹⁾에 상세히 기술되어 있는데, 그 방법은 크게 유한차원법(finite dimensional approach) 및 연속체법(continuum approach)으로 구분할 수 있다. 유한차원법에서는 먼저 상태방정식을 경계요소로 이산화한 후 시스템 행렬의 미분을 해석적으로 유도하거나⁽²⁻⁵⁾ 유한차분 개념으로 수치미분하는⁽⁶⁾ 반면, 연속체법에서는 상태방정식을 진미분(material derivative)⁽⁷⁾하여 연속체의 관점에서 민감도 공식을 먼저 유도한 후 수치계산을 위해 민감도 공식을 이산화한다. 연속체법은 다시 직접미분법(direct differentiation method)과 보조변수법(adjoint variable method)으로 나눌 수 있다. 보조변수법에서는 보조시스템을 도입하여 민감도 공식을 유도하는데,⁽⁸⁻¹⁰⁾ 보조시스템이 집중하중에 의한 특이(singular) 경계조건을 갖게 되어 수치계산의 어려움을 가져올 수 있다. 직접미분법^(8,11-14)에서는 설계 민감도를 경계적분방정식의 해에서 직접계산하게 되므로 이러한 특이문제를 피할 수 있다. 경계요소법에 기초한 형상설계 민감도해석을 다룬 연구는 많지만 터빈이나 압축기의 디스크와 같은 축대칭 문제에 적용될 수 있는 연구결과를 보인 문헌은 그다지 많지 않다. Saigal 등⁽³⁾은 유한차원법의 일환으로 축대칭 경계적분방정식을 경계요소로 이산화한 후 행렬의 미분을 해석적으로 유도하였고, Saigal⁽⁴⁾은 동일한 방법을 사용하고 체적력을 고려하였다. Rice와 Mukherjee⁽⁴⁾는 경계적분방정식을 미분하여 새로운 민감도 경계적분방정식을 유도하는 직접미분법을 축대칭 문제에 처음으로 적용하였다. Lee와 Kwak⁽¹⁰⁾은 열탄성문제에 보조변수법을 사용하였다.

본 연구에서는 축대칭 탄성체의 형상설계 민감도 해석을 위한 직접미분법을 제시하고자 한다. 2차원 문제를 다룬 Choi와 Kwak⁽⁸⁾의 방법을 축대칭 문제로 확장하여 새로운 민감도 경계적분방정식을 유도한다. 비록 Rice와 Mukherjee⁽⁴⁾가 축대칭 탄성체의 직접미분법을 제시했지만, 여기에서 사용하는 민감도 공식의 유도방법은 그것과 근본적으로 다르다. 본 논문에서는 민감도 경계적분방정식을 유도하기 위해 보조변수법에서 사용한 것과 동일한 경계적분항등식을 사용한다. 본 연구에서 제시된 민감도해석 방법의 수치적 예로서 해석적 해가 존재하는 중공 구 문제에 대해서 예측한 민감도와 해석적 민감도를 비교하고자 한다. 또한, 실제적인 형

상 최적설계에 대한 응용의 예로서 가스터빈 디스크의 측면 형상을 설계하고자 한다.

2. 축대칭 탄성체를 위한 경계적분방정식 정식화

본 연구에서 다루고자 하는 대상은 축대칭 선형 탄성체로서 원통형 좌표계를 사용하면 대칭 단면의 영역과 경계를 (R, Z) 평면 내에서 정의하고 Ω 와 Γ 로 나타낼 수 있다. 이 (R, Z) 평면 내의 위치는 x 나 x_0 로 표현하며, 점 x 와 x_0 의 좌표는 각각 (R, Z) 와 (R_0, Z_0) 으로 나타낸다. 텐서 표기를 따르는데 지수는 R 혹은 Z 성분을 가리킨다. 경계에서의 단위 수직 및 접선방향벡터는 각각 n_i 와 s_i 로 표현한다.

축대칭 문제의 경계적분방정식 정식화과정은 Lee와 Kwak⁽¹⁰⁾에 열탄성문제에 관하여 자세히 설명되어 있는데, 여기서는 관심 대상인 탄성 문제의 경우를 간단히 기술한다. Somigliana의 항등식을 이용하여 축대칭 탄성문제를 직접 경계적분방정식으로 나타내면 다음과 같다.⁽¹⁵⁻¹⁷⁾

$$c_{ij}(x_0) u_j(x_0) = \int_{\Gamma} \{t_j(x) G_{ij}(x_0, x) - u_j(x) F_{ij}(x_0, x)\} R ds + \int_{\Omega} f_j(x) G_{ij}(x_0, x) R dx, \quad x_0 \in \Omega \cup \Gamma \quad (1)$$

여기서, u_j, t_j, f_j 는 변위, 표면력, 체적력을 나타내며, $c_{ij}(x_0)$ 는 점 x_0 의 위치에 따라 결정되는 상수를, ds 와 dx 는 각각 경계 Γ 와 영역 Ω 에서 점 x 에 관한 적분을 나타낸다. 커널(kernel) G_{ij} 와 F_{ij} 는 각각 변위와 표면력의 기초해로서, 부록에 기술된 제1종과 제2종의 완전 타원형 적분의 함수로 표현된다. 경계 Γ 를 구성하는 Γ_u 와 Γ_t 에는 다음과 같은 경계조건이 지정된다.

$$u_j(x) = u_{j0}(x), \quad x \in \Gamma_u \\ t_j(x) = t_{j0}(x), \quad x \in \Gamma_t \quad (2)$$

한편, 다음과 같이 간접 경계적분방정식으로 표현되는 임의의 시스템의 변위와 표면력, u_j^* 와 t_j^* 를 정의할 수 있다.

$$u_j^*(x) = \int_{\Gamma} \rho_i^*(x_0) G_{ij}(x_0, x) R_0 ds_0 + \int_{\Omega} f_i^*(x_0) G_{ij}(x_0, x) R_0 dx_0,$$

$$\begin{aligned}
 x \in \Omega \cup \Gamma \\
 t_j^*(x) = c_{ij}(x) \rho_i^*(x) \\
 + \int_{\Gamma} \rho_i^*(x_0) F_{ij}(x_0, x) R_0 ds_0 \\
 + \int_{\Omega} f_i^*(x_0) F_{ij}(x_0, x) R_0 dx_0, \\
 x \in \Gamma
 \end{aligned} \quad (3)$$

식 (3)에서 ρ_i^* 와 f_i^* 는 각각 경계와 영역에 분산되어 있는 가상적인 근원 밀도(source density)를 나타낸다. 직접 경계적분방정식 (1)에 경계에 정의된 임의의 함수 ρ_i^* 를 곱하고, 경계를 따라 점 x_0 에 대하여 적분한 후에 간접 경계적분방정식 (3)을 적용하면 다음과 같은 경계적분방정식을 얻을 수 있다.

$$\int_{\Gamma} (u_j t_j^* - t_j u_j^*) R ds = \int_{\Omega} (f_j u_j^* - u_j f_j^*) R ds \quad (4)$$

이 항등식은 직접 및 간접 경계적분방정식 (1)과 (3)으로 각각 정의되는 u_j , t_j , f_j 와 u_j^* , t_j^* , f_j^* 의 임의의 두 축대칭 탄성 시스템 사이에 성립하는 Betti의 역정리와 일치함을 알 수 있다. Lee와 Kwak⁽¹⁰⁾은 열탄성 문제의 보조변수법에서 보조 시스템을 유도하기 위해 식 (4)와 유사한 열탄성 역정리의 항등식을 사용했으나, 본 연구에서는 항등식 (4)를 직접미분법의 민감도 경계적분방정식을 유도하기 위한 기본 식으로 사용한다.

3. 형상설계 민감도해석을 위한 직접미분법

전미분 개념⁽⁷⁾을 사용하여 경계적분방정식 (4)를 미분하고, 다소 복잡한 과정을 통하여 정리하면 다음과 같은 표현식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}
 \int_{\Gamma} f_j^* (\dot{u}_j - u_{j,i} V_i) R dx + \int_{\Gamma} (\dot{u}_j t_j^* - t_j \dot{u}_j^*) R ds \\
 = \int_{\Gamma} [- (\sigma_{ij} V_k c_{ik}) u_{j,s}^* + u_{j,i} V_i t_j^* \\
 + \{ t_j (V_{i,ss_i} + V_R/R) + f_j V_i n_i \\
 - \sigma_{00} V_i n_i \delta_{jR}/R \} u_j^*] R ds
 \end{aligned} \quad (5)$$

식 (5)에서 \dot{u}_j 와 \dot{t}_j 는 각각 변위와 표면력의 전미분 항을, $V = \{V_R, V_Z\}$ 는 설계속도(design velocity) 벡터를, δ_{ij} 는 크로네커 델타(Kronecker delta)를 나타내며, c_{ik} 는 다음과 같은 스칼라 텐서이다.

$$[c_{ik}] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

u_j^* 와 t_j^* 는 간접 경계적분방정식 (3)으로 정의되므로 식 (5)의 $u_{j,s}^*$ 는 u_j^* 를 경계선의 접선 방향으로 미분하면 다음과 같이 간접 경계적분방정식으로 표현된다.

$$\begin{aligned}
 u_{j,s}^*(x) = d_{ij}(x) \rho_i^*(x) \\
 + \int_{\Gamma} \rho_i^*(x_0) P_{ij}(x_0, x) R_0 ds_0 \\
 + \int_{\Omega} f_i^*(x_0) P_{ij}(x_0, x) R_0 dx_0, \\
 x \in \Gamma
 \end{aligned} \quad (7)$$

계수 d_{ij} 는 두 점 x 와 x_0 가 일치할 때 발생하는 커널 P_{ij} 의 특이성때문에 나타난다. 새 커널 P_{ij} 는

$$\begin{aligned}
 P_{ij}(x_0, x) &\equiv G_{i,j,s}(x_0, x) \\
 &= G_{i,j,k}(x_0, x) s_k(x)
 \end{aligned} \quad (8)$$

와 같이 G_{ij} 에 설계 상의 접선방향 미분을 취해 얻을 수 있는데, 부록에 $G_{i,j,k}$ 를 상세히 수록하였다. 이제 간접 경계적분방정식 (3)과 (7)을 식 (5)에 대입하고 그 결과식을 경계와 영역 상의 임의의 근원 밀도 ρ_i^* 와 f_i^* 에 대하여 성립하게 하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}
 c_{ij}^0 \dot{u}_j^0 + \int_{\Gamma} (\dot{u}_j F_{ij} - t_j \dot{G}_{ij}) R ds \\
 = - d_{ij}^0 (\sigma_{jk} V_k c_{ik})^0 - \int_{\Gamma} (\sigma_{jk} V_k c_{ik}) P_{ij} R ds \\
 + c_{ij}^0 (u_{j,k} V_k)^0 + \int_{\Gamma} (u_{j,k} V_k) F_{ij} R ds \\
 + \int_{\Gamma} \{ t_j (V_{k,ss_k} + V_R/R) + f_j V_k n_k \\
 - \sigma_{00} V_k n_k \delta_{jR}/R \} G_{ij} R ds, \\
 x_0 \in \Gamma
 \end{aligned} \quad (9)$$

식 (9)에서 상첨자 0는 점 x_0 에서의 값을 가리킨다. 이 식을 수치적분할 때 만일 점 x 와 x_0 가 일치하면, 즉 $r \equiv |x - x_0| = 0$ 이면 커널 F_{ij} 와 P_{ij} 의 차수(order)가 $O(1/r)$ 이므로 강한 특이성이 발생한다. F_{ij} 에 기인하는 특이적분은 축대칭 물체의 변형 모드⁽¹⁷⁾를 이용하여 피할 수 있다. 축대칭 탄성체가 Z 축 방향으로 강체 병진을 할 경우에 성립하는

$$u_R = 0, \quad u_Z = 1, \quad t_R = t_Z = 0 \quad (10)$$

와 R 방향으로 선형 팽창할 경우에 성립하는

$$\begin{aligned} u_R &= R, \quad u_Z = 0 \\ t_R &= 2(\lambda + \mu) n_R, \quad t_Z = 2\lambda n_Z \end{aligned} \quad (11)$$

의 두가지 관계식을 경계적분항등식 (4)에 대입하여 만들어진 결과식에 식 (3)을 대입하고 정리하면

$$\begin{aligned} & c_{ij}^0 (u_{j,k} V_k)^0 R_0 + (u_{j,k} V_k)^0 R_0 \int_{\Gamma} F_{ij} R ds \\ &= (u_{R,k} V_k)^0 \int_{\Gamma} \left[2\{(\lambda + \mu) n_R \delta_{jR} + \lambda n_Z \delta_{jZ}\} G_{ij} \right. \\ & \quad \left. - (R - R_0) \delta_{jR} F_{ij} \right] R ds, \\ & x_0 \in \Gamma \end{aligned} \quad (12)$$

와 같은 식을 얻을 수 있다. P_{ij} 에 기인하는 특이 적분을 다음과 같이 변위의 연속성을 이용하여 피할 수 있다.

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} d(u_j^* R) &= 0 \\ &= \int_{\Gamma} (u_j^* R)_{,s} ds \\ &= \int_{\Gamma} (u_{j,s}^* R + u_j^* s_R) ds \end{aligned} \quad (13)$$

이 식에 간접 경계적분방정식 (3)과 (7)을 대입하고 정리하면

$$\begin{aligned} & d_{ij}^0 (\sigma_{jk} V_k e_{kl})^0 + (\sigma_{jk} V_k e_{kl})^0 \int_{\Gamma} P_{ij} R ds \\ &= -(\sigma_{jk} V_k e_{kl})^0 \int_{\Gamma} G_{ij} s_R ds, \\ & x_0 \in \Gamma \end{aligned} \quad (14)$$

와 같은 표현식을 얻을 수 있다. 특이 적분을 피하기 위해 유도한 식 (12)와 (14)를 식 (9)에 대입하여 정리하면 새로운 민감도 경계적분방정식은 근원 점 x_0 가 Z축 상에 있지 않을 경우, 즉 $R_0 \neq 0$ 일 때는

$$\begin{aligned} & c_{ij}^0 \dot{u}_j^0 + \int_{\Gamma} (\dot{u}_j F_{ij} - \dot{t}_j G_{ij}) R ds \\ &= \int_{\Gamma} [-(A_j - A_j^0) P_{ij} + \{(B_j - B_j^0) - \delta_{jR} B_R^0 (R - R_0) / R_0\} F_{ij} + C_j G_{ij}] R ds, \quad x_0 \in \Gamma \end{aligned} \quad (15a)$$

근원 점 x_0 가 Z축 상에 있을 경우 즉, $R_0 = 0$ 일 때는

$$\begin{aligned} & c_{ij}^0 \dot{u}_j^0 + \int_{\Gamma} (\dot{u}_j F_{ij} - \dot{t}_j G_{ij}) R ds \\ &= \int_{\Gamma} [-A_j - A_j^0] P_{ij} + (B_j - B_j^0) F_{ij} \\ & \quad + C_j G_{ij} R ds, \\ & x_0 \in \Gamma \end{aligned} \quad (15b)$$

와 같이 표현된다. 여기서, A_j, B_j, C_j 는 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} A_j &= \sigma_{jk} V_k e_{kl} \\ B_j &= u_{j,k} V_k \\ C_j &= t_j (V_{k,s} s_R + V_R / R) + A_j^0 s_R / R \\ & \quad + 2B_R^0 / R_0 \{(\lambda + \mu) n_R \delta_{jR} + \lambda n_Z \delta_{jZ}\} \\ & \quad + (f_j - \sigma_{\theta\theta} \delta_{jR} / R) V_k n_k, \quad \text{if } R_0 \neq 0 \\ C_j &= t_j (V_{k,s} s_R + V_R / R) + A_j^0 s_R / R \\ & \quad + (f_j - \sigma_{\theta\theta} \delta_{jR} / R) V_k n_k, \quad \text{if } R_0 = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

여기서, 식 (15)에 나타나는 $(A_j - A_j^0), (B_j - B_j^0), (R - R_0)$ 의 차수는 $O(r)$ 로서 차수가 $O(1/r)$ 인 커널 F_{ij}, P_{ij} 와 곱하면 특이성이 사라지게 되므로 표준 가우스 적분을 사용하여 수치적분을 수행할 수 있다. 새로이 유도된 식 (15)의 좌변을 살펴 보면 원래의 경계적분방정식 (1)의 적분 연산자와 동일함을 알 수 있다. 따라서, 경계요소법을 사용하여 상태변수의 해를 구할 때 식 (15)의 좌변을 계산하여 그 행렬을 미리 저장해 두면 민감도 해석시에는 식 (15)의 우변만 추가로 계산하면 된다. 실제 강체 ϕ 를 형상 매개변수 b_i 로 표시하면 상태변수의 전미분 항과 실제속도장은 다음과 같이 형상 매개변수로 직접 표현할 수 있다.

$$\mathbf{V} = \frac{\partial \phi}{\partial b_j} \delta b_j, \quad \dot{u}_i = \frac{\partial u_i}{\partial b_j} \delta b_j, \quad \dot{t}_i = \frac{\partial t_i}{\partial b_j} \delta b_j \quad (17)$$

한편, 이 식을 식 (15)와 (16)에 대입하면 설계변수, 즉 형상 매개변수(shape parameter)에 관한 변위와 표면력의 민감도가 새로운 경계적분방정식의 상태 변수로 된다. 따라서 민감도 경계적분방정식을 경계요소로 이산화하고 해를 구하면 변위와 표면력의 민감도가 직접 계산되는데, 이것이 보조변수법에 대한 직접미분법의 상대적인 장점이라고 할 수 있다. 그 이유는 경계의 임의 점에서의 민감도를 계산할 때 보조변수법에서는 보조시스템의 경계조건이 그 점에서의 집중하중으로 나타나므로 경계요소 해석의 어려움이 발생하나 본 직접미분법에서는 이러한 문제점이 완전히 해소되기 때문이다.

4. 응력의 형상 민감도

변위와 표면력의 민감도를 민감도 경계적분방정식 (15)를 이용하여 해석한 후에는 축대칭 문제의

여러 응력 성분의 민감도를 경계에서의 변위와 응력의 관계식 등을 이용하여 유도할 수 있다.

경계에서의 여러 응력성분은 다음과 같이 변위와 표면력을 사용하여 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \sigma_{nn} &= \sigma_{ij} n_i n_j = t_i n_i \\ \sigma_{ns} &= \sigma_{ij} n_i s_j = t_i s_i \\ \sigma_{ss} &= \sigma_{ij} s_i s_j = C_1 \epsilon_{ss} + C_2 \epsilon_{\theta\theta} + C_3 \sigma_{nn} \\ \sigma_{RR} &= \sigma_{nn} n_R^2 + \sigma_{ss} n_Z^2 - 2\sigma_{ns} n_R n_Z \\ \sigma_{ZZ} &= \sigma_{nn} n_Z^2 + \sigma_{ss} n_R^2 + 2\sigma_{ns} n_R n_Z \\ \sigma_{\theta\theta} &= C_1 \epsilon_{\theta\theta} + C_2 \epsilon_{ss} + C_3 \sigma_{nn} \end{aligned} \quad (18)$$

하첨자 n 과 s 는 각각 경계에서의 수직과 접선 방향 성분을 가리키며

$$\epsilon_{ss} = u_{i,s} s_i \quad (19)$$

이고, C_1, C_2, C_3 는 다음과 같은 상수 항을 나타낸다.

$$C_1 = \frac{2\mu}{1-\nu}, \quad C_2 = \frac{2\mu\nu}{1-\nu}, \quad C_3 = \frac{\nu}{1-\nu} \quad (20)$$

축대칭 문제의 특성을 고려하면 von Miss 유효 응력을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \sigma_e &= (\sigma_{nn}^2 + \sigma_{ss}^2 + \sigma_{\theta\theta}^2 + 3\sigma_{ns}^2 - \sigma_{nn}\sigma_{ss} \\ &\quad - \sigma_{nn}\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\theta\theta}\sigma_{ss})^{1/2} \end{aligned} \quad (21)$$

여러 응력성분들의 형상 민감도는 식 (18)과 (21)을 전미분하여 유도하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{nn} &= t_i \dot{n}_i + t_i n_i \\ \dot{\sigma}_{ns} &= t_i s_i + t_i s_i \\ \dot{\sigma}_{ss} &= C_1 \dot{\epsilon}_{ss} + C_2 \dot{\epsilon}_{\theta\theta} + C_3 \dot{\sigma}_{nn} \\ \dot{\sigma}_{RR} &= \dot{\sigma}_{nn} n_R^2 + \dot{\sigma}_{ss} n_Z^2 - 2\dot{\sigma}_{ns} n_R n_Z + 2\sigma_{nn} n_R \dot{n}_R \\ &\quad + 2\sigma_{ss} n_Z \dot{n}_Z - 2\sigma_{ns} (n_R \dot{n}_Z + n_Z \dot{n}_R) \\ \dot{\sigma}_{ZZ} &= \dot{\sigma}_{nn} n_Z^2 + \dot{\sigma}_{ss} n_R^2 + 2\dot{\sigma}_{ns} n_R n_Z + 2\sigma_{nn} n_Z \dot{n}_Z \\ &\quad + 2\sigma_{ss} n_R \dot{n}_R + 2\sigma_{ns} (n_R \dot{n}_Z + n_Z \dot{n}_R) \quad (22) \\ \dot{\sigma}_{\theta\theta} &= C_1 \dot{\epsilon}_{\theta\theta} + C_2 \dot{\epsilon}_{ss} + C_3 \dot{\sigma}_{nn} \\ \dot{\sigma}_e &= \frac{1}{2\sigma_e} \left\{ 2(\sigma_{nn} \dot{\sigma}_{nn} + \sigma_{ss} \dot{\sigma}_{ss} + \sigma_{\theta\theta} \dot{\sigma}_{\theta\theta}) - \sigma_{nn} \dot{\sigma}_{ss} \right. \\ &\quad \left. - \sigma_{ss} \dot{\sigma}_{nn} - \sigma_{nn} \dot{\sigma}_{\theta\theta} - \sigma_{\theta\theta} \dot{\sigma}_{nn} - \sigma_{ss} \dot{\sigma}_{\theta\theta} \right. \\ &\quad \left. - \sigma_{\theta\theta} \dot{\sigma}_{ss} + 6\sigma_{ns} \dot{\sigma}_{ns} \right\} \end{aligned}$$

변위와 표면력 그리고 각각의 형상 민감도를 일단 계산한 후에 위의 식 (22)에 의해 각종 응력 성분의 형상 민감도를 직접 계산할 수 있다. 단, \dot{n}_i 와 \dot{s}_i 는 각각 경계의 수직과 접선방향 단위벡터의

전미분 항으로서 다음과 같이 설계 속도를 이용하여 정의할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{n}_i &= (V_s H - V_{n,s}) s_i \\ \dot{s}_i &= (V_{n,s} - V_s H) n_i \end{aligned} \quad (23)$$

V_n 과 V_s 는 각각 경계에서 수직과 접선방향의 설계 속도이며, H 는 경계 형상의 곡률을 나타낸다. 식 (22)에 나타나는 변형도의 전미분 항도 다음과 같이 설계속도와 변위의 전미분으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{ss} &= \dot{u}_{i,s} + u_{i,s} n_i (V_{n,s} - V_s H) \\ &\quad - \epsilon_{ss} (V_n H + V_{s,s}) \\ \dot{\epsilon}_{\theta\theta} &= \frac{1}{R} \{ \dot{u}_R - \epsilon_{\theta\theta} (n_R V_n - n_Z V_s) \} \end{aligned} \quad (24)$$

5. 수치예제

5.1 중공 구 문제

제시한 축대칭 탄성체의 형상설계 민감도해석 이론의 응용 예를 보이기 위해 Fig. 1과 같이 해석적 해를 갖는 중공 구 문제를 고려하여, 본 연구에서 제시한 민감도해석 방법으로 계산한 결과를 해석적 민감도와 비교하였다. 이 중공 구는 바깥 표면에 균일한 인장 하중을 받으며, Timoshenko와 Goodier⁽¹⁸⁾에 본 문제의 해석적 해가 수록되어 있다. 구의 내경 a 와 외경 b 는 각각 4와 8 inch이다. 구의 외면에 가해지는 균일한 인장 하중은 1,000 psi이다. 대칭을 고려하여 구 단면의 반만 모델링 하였으며, Fig. 2와 같이 총 30개의 2차 경계요소를 사용하였다. 단면에서 대칭축 상에 존재하는 경

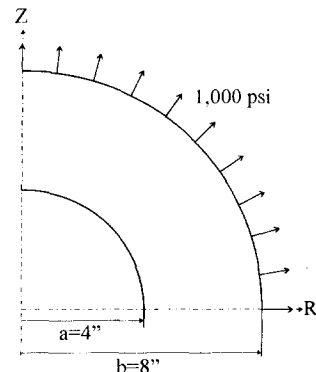


Fig. 1 A hollow sphere problem

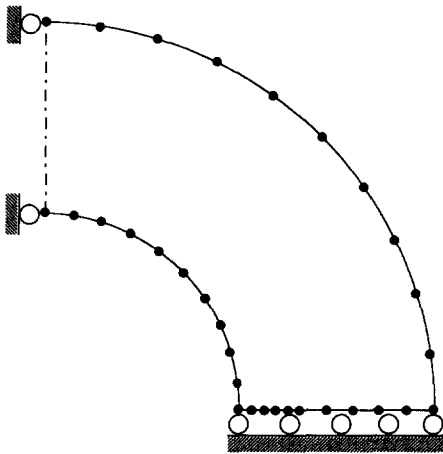


Fig. 2 A quadratic boundary element model of the hollow sphere problem

계는 Fig. 2에서 볼 수 있듯이 두 끝 점만 모델링하였다. 축대칭 경계적분방정식에서 근원점이 Z축상에 있을 때는 특별한 주의가 요구되는데, Bakr⁽¹⁷⁾의 문헌에 명기된 정확한 커널을 사용하였다. 본 논문의 모든 수치적 계산은 실리콘 그래픽스 R3000 워크스테이션에서 FORTRAN 77로 프로그래밍하여 수행하였으며 2배 정밀도(double precision)를 사용하였다. 탄성계수 E 와 프와송 비 ν 는 각각 30×10^6 psi와 0.3의 값을 사용하였다.

이 예제에서는 제시된 방법으로 내경 a 에 관한 민감도를 경계요소의 각 절점에서 예측하여 해석적 민감도와 비교하도록 한다. 변위와 후프 응력의 해석적 민감도는 문헌⁽³⁾에 나와 있다. 구의 반경을 따라 내면에서 외면까지 각 절점에서 구한 변위의 민감도를 Fig. 3에, 후프 응력의 민감도해석 결과를 Fig. 4에 해석적 민감도와 함께 나타내었다. 그림에서 알 수 있듯이 민감도해석 결과는 전체적으로 매우 정확하나, 구의 내면 근처에서는 작은 오차가 나타난다. 이것은 민감도 공식 자체가 오차가 있기 때문이 아니다, 단지 경계요소 이산화와 컴퓨터에 의한 수치 계산시의 오차에서 기인하는 것이다.

5.2 터빈 디스크 문제

개발한 직접 미분법의 민감도 해석 알고리즘을 형상 최적설계에 사용하기 위해 최적화 프로그램인 IDESIGN⁽¹⁹⁾과 연결하여 최적화 과정을 수행하도록 하였다. 여기서는 제시된 민감도해석 방법의 실

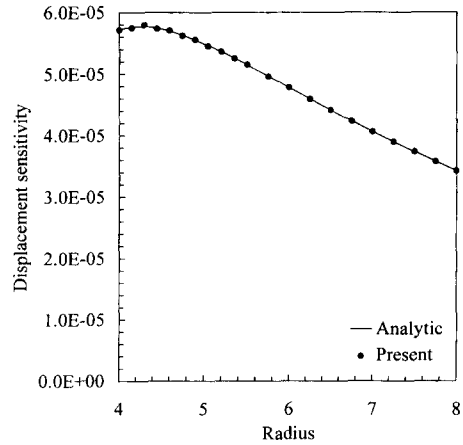


Fig. 3 Displacement sensitivities of the hollow sphere problem

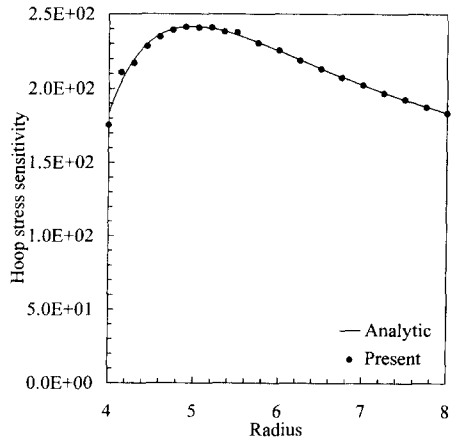


Fig. 4 Hoop stress sensitivities of the hollow sphere problem

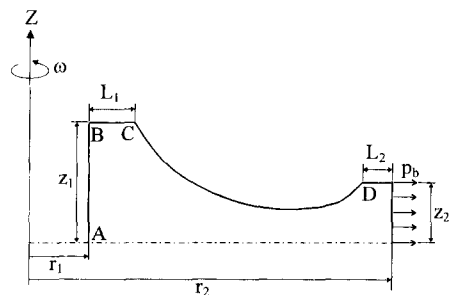


Fig. 5 A turbine disk problem

제적 적용 예제로서, Fig. 5와 같은 축대칭 가스터빈 디스크의 형상 최적설계 문제를 다루고자 한다. 이 디스크는 일정한 각속도 ω 로 회전하며, 끝

(rim) 부분에는 체결된 블레이드(blade)의 회전으로 인한 균일한 인장 하중 p_b 가 가해진다. 디스크의 치수변수인 $r_1, r_2, z_1, z_2, L_1, L_2$ 는 각각 0.7874, 4.7244, 1.5748, 0.7874, 0.5906, 0.3937 inch로 가정하였고, ω 와 p_b 는 20,000 rpm과 2.9007×10^4 psi의 값을 사용하였다. 탄성계수, 푸아송비, 밀도는 각각 2.6159×10^7 psi, 0.3, 0.2784 lbm/in³으로 정하였다.

최소화할 목적함수는 디스크의 무게로 정의하였고, 경계에서 von Mises 유효 응력이 허용응력보다 작아야 한다는 응력제한조건을 부과하였다. 허용응력은 1.2618×10^5 psi로 정의하였다. 디스크는 Fig. 6과 같이 54개의 2차 경계요소로 모델링하였다. 설계경계는 CD 구간으로 하고, Fig. 6에 표시된 바와 같이 CD구간을 R 방향으로 등분하는 일곱 점의 Z 좌표를 설계변수로 정의하였다. 설계경계의 형상은 설계변수인 일곱 조절점과 양 끝점 C와 D로 정의되는 스플라인으로 나타내었다. 스플라인의 끝단조건은 곡률이 0인 이완조건(relaxed end condition)을 사용하였다.

설계 경계 CD를 직선으로 가정한 초기 설계에서 시작하여 10회의 반복과정 만에 최적 설계로 수렴하였다. 최적 형상은 Fig. 7에 나타내었다. 초기 설계에서 1.0인 목적함수, 즉 디스크의 무게는 최적 설계일 때는 0.3060으로 크게 감소하였다. 최적 설계에 도달하는 데 소요된 CPU 시간은 343.4초이다. 초기와 최적 설계에서 유효 응력의 등고선을

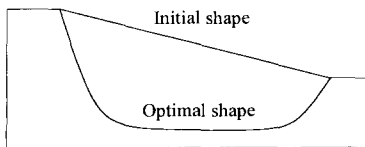


Fig. 6 A quadratic boundary element model of the turbine disk problem

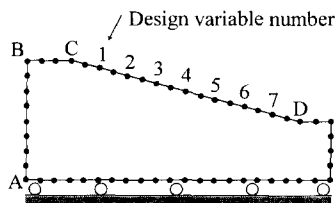


Fig. 7 The initial and optimal shapes

Fig. 8과 9에 각각 나타내었는데, 초기설계에 비해서 최적 설계에서는 유효 응력이 거의 극한 상태에 도달했음을 알 수 있다. Fig. 10은 초기 및 최적 설계에서 경계 ABCD 상의 유효 응력의 분포를 나타낸다. 초기에 전체적으로 낮은 분포를 보인 응력 값이 최적 형상에서는 허용 응력에 가까운 응력 상태에 도달함을 알 수 있다.

A: 79768 B: 72516 (psi)
C: 65265 D: 58013
E: 50761 F: 43510

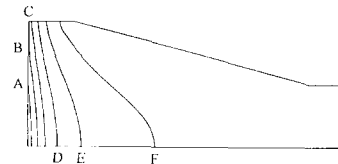


Fig. 8 Effective distribution at the initial design for the turbine disk

A: 116026 B: 101523 (psi)
C: 87020 D: 72516
E: 58013 F: 43510
G: 29007 H: 14503

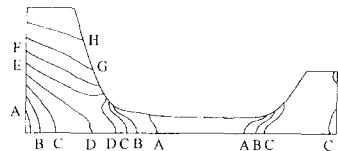


Fig. 9 Effective stress distribution at the optimal design for the turbine disk

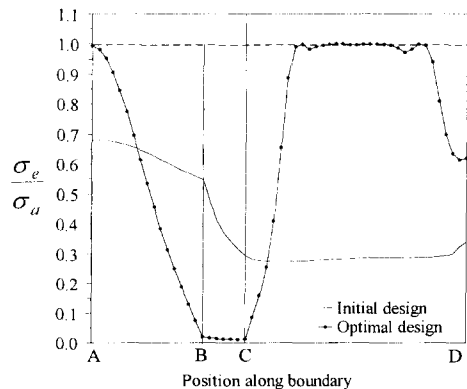


Fig. 10 Effective stress distribution on the surface of the turbine disk

6. 결 론

축대칭 탄성체의 형상설계 민감도해석을 위한 새로운 방법으로서 경계요소법에 근거한 직접미분법을 제시하였다. 새로운 민감도 경계적분방정식을 유도하였으며, 형상에 관한 상태변수의 민감도논의를 경계요소법으로 해석하여 직접 구할 수 있으므로 기존의 보조변수법에서 발생 가능한 특이성 문제를 해소하였다. 해석적 해를 갖는 예제의 수치적 계산을 통하여 제시된 민감도 해석 이론의 정확성을 보였다. 실제적인 형상 설계의 예로서 가스터빈 디스크의 무게 최소화 문제를 다룬 결과, 응력 제한조건 하에서 최적 형상을 성공적으로 결정하였다. 본 연구에서 제시한 민감도 해석 이론은 축대칭 탄성체의 형상 최적설계를 위한 유용한 도구로 사용될 수 있다.

참고문헌

- (1) Burczynski, T., 1993, "Recent Advances in Boundary Element Approach to Design Sensitivity Analysis-A Survey," in M. Kleiber and T. Hisada [ed.], *Design-Sensitivity Analysis*, Atlanta Technology Publications, Atlanta, pp. 1~25.
- (2) Kane, J.H., 1986, "Optimization of Continuum Structures Using a Boundary Element Formulation," Ph.D. Thesis, Univ. of Connecticut.
- (3) Saigal, S., Borggaard, J.T. and Kane, J.H., 1989, "Boundary Element Implicit Differentiation Equations for Design Sensitivities of Axisymmetric Structures," *Int. J. Solids Struct.*, Vol. 25, pp. 527~538.
- (4) Saigal, S., 1989, "Treatment of Body Forces in Axisymmetric Boundary Element Design Sensitivity Formulation," *Int. J. Solids Struct.*, Vol. 25, pp. 947~959.
- (5) Yamazaki, K., Sakamoto, J. and Kitano, M., 1994, "Three-Dimensional Shape Optimization Using the Boundary Element Method," *AIAA J.*, Vol. 32, pp. 1295~1301.
- (6) Wu, S.J., 1986, "Applications of the Boundary Element Method for Structural Shape Optimization," Ph.D. Thesis, Univ. of Missouri-Columbia.
- (7) Haug, E.J., Choi, K.K. and Komkov, V., 1986, "Design Sensitivity Analysis of Structural Systems," Academic Press, New York.
- (8) Choi, J.H. and Kwak, B.M., 1990, "A Unified Approach for Adjoint and Direct Method in Shape Design Sensitivity Analysis Using Boundary Integral Formulation," *Eng. Anal. Boundary Elements*, Vol. 7, pp. 39~45.
- (9) Meric, R.A., 1987, "Boundary Elements in Shape Design Sensitivity Analysis of Thermoelastic Solids," in C.A. Mota Soares [ed.], *Computer Aided Optimal Design: Structural and Mechanical Systems, Proceedings of the NATO ASI*, Springer, Berlin, pp. 643~652.
- (10) Lee, B.Y. and Kwak, B.M., 1992, "Axisymmetric Thermoelastic Shape Sensitivity Analysis and Its Application to Turbine Disc Design," *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 33, pp. 2073~2089.
- (11) Barone, M.R. and Yang, R.J., 1988, "Boundary Integral Equations for Recovery of Design Sensitivities in Shape Optimization," *AIAA J.*, Vol. 26, pp. 589~594.
- (12) Barone, M.R. and Yang, R.J., 1989, "A Boundary Element Approach for Recovery of Shape Sensitivities in Three-Dimensional Elastic Solids," *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 74, pp. 69~82.
- (13) Choi, J.H. and Choi, K. K., 1990, "Direct Differentiation Method for Shape Design Sensitivity Analysis Using Boundary Integral Formulation," *Comp. Struct.*, Vol. 34, pp. 499~508.
- (14) Rice, J.S. and Mukherjee, S., 1990, "Design Sensitivity Coefficients for Axisymmetric Elasticity Problems by Boundary Element Methods," *Eng. Anal. Boundary Elements*, Vol. 7, pp. 13~20.
- (15) Banerjee, P.K. and Butterfield, R., 1981, *Boundary Element Methods in Engineering Science*, McGraw-Hill, New York.
- (16) Brebbia, C.A., Telles, J.C.F. and Wrobel, L.C., 1984, *Boundary Element Techniques*, Springer, Berlin.
- (17) Bakr, A.A., 1986, *The Boundary Integral*

Equation Method in Axisymmetric Stress Analysis Problems, Springer, Berlin.

- (18) Timoshenko, S.P. and Goodier, J.N., 1970, *Theory of Elasticity*, 3rd edn., McGraw-Hill, New York.

- (19) Arora, J.S., 1984, *An Algorithm for Optimum Structural Design without Line Search*, in E. Atrek[ed.], *New Directions in Optimum Structural Design*, John Wiley, New York, pp. 429 ~ 441.

부 록

식 (8)의 $G_{ij,k}$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned}
 G_{RR,R} &= \frac{A}{R_0 R^2 (a+b)} \left[2(3-4\nu) R^2 \sqrt{a+b} K + \left\{ (3-4\nu) (R^2 + R_0^2) + 4(1-\nu) \bar{Z}^2 \right\} \right. \\
 &\quad \times \left\{ K_{,R} R \sqrt{a+b} - K \left(\sqrt{a+b} + \frac{R(R+R_0)}{\sqrt{a+b}} \right) \right\} - \left\{ 2(3-4\nu) (R+R_0) + \frac{2\bar{Z}^2 (R_0 a - Rb)}{(a-b)^2} \right\} \\
 &\quad \times ER \sqrt{a+b} - \left\{ (3-4\nu) (a+b) + \frac{\bar{Z}^2 a}{a-b} \right\} \left\{ E_{,R} R \sqrt{a+b} - E \left(\sqrt{a+b} + \frac{R(R+R_0)}{\sqrt{a+b}} \right) \right\} \Big] \\
 G_{RR,Z} &= \frac{A}{RR_0 (a+b)} \left[8(1-\nu) \bar{Z} \sqrt{a+b} K + \left\{ (3-4\nu) (R^2 + R_0^2) + 4(1-\nu) \bar{Z}^2 \right\} \right. \\
 &\quad \times \left(K_{,Z} \sqrt{a+b} + K \frac{\bar{Z}}{\sqrt{a+b}} \right) - \left\{ 2(3-4\nu) \bar{Z} + \frac{2\bar{Z} (a^2 - ab - \bar{Z}^2 b)}{(a-b)^2} \right\} E \sqrt{a+b} \\
 &\quad - \left\{ (3-4\nu) (a+b) + \frac{\bar{Z}^2 a}{a-b} \right\} \left(E_{,Z} \sqrt{a+b} - E \frac{\bar{Z}}{\sqrt{a+b}} \right) \Big] \\
 G_{RZ,R} &= \frac{A\bar{Z}}{R_0 (a+b)} \left[-K_{,R} \sqrt{a+b} + K \frac{R+R_0}{\sqrt{a+b}} + \frac{2\{R(a-b) - (R^2 - R_0^2 + \bar{Z}^2)(R-R_0)\}}{(a-b)^2} E \sqrt{a+b} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{R^2 - R_0^2 + \bar{Z}^2}{a-b} \left(E_{,R} \sqrt{a+b} - E \frac{R+R_0}{\sqrt{a+b}} \right) \right] \\
 G_{RZ,Z} &= \frac{A}{R_0 (a+b)} \left[-K \sqrt{a+b} - \bar{Z} \left(K_{,Z} \sqrt{a+b} - K \frac{\bar{Z}}{\sqrt{a+b}} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{(R^2 - R_0^2 + 3\bar{Z}^2)(a-b) - 2\bar{Z}^2 (R^2 - R_0^2 + \bar{Z}^2)}{(a-b)^2} E \sqrt{a+b} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\bar{Z} (R^2 - R_0^2 + \bar{Z}^2)}{a-b} \left(E_{,Z} \sqrt{a+b} - E \frac{\bar{Z}}{\sqrt{a+b}} \right) \right] \\
 G_{ZR,R} &= \frac{A\bar{Z}}{R^2 (a+b)} \left[K_{,R} R \sqrt{a+b} - K \left(\sqrt{a+b} + \frac{R(R+R_0)}{\sqrt{a+b}} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{2\{R(a-b) + (R_0^2 - R^2 + \bar{Z}^2)(R-R_0)\}}{(a-b)^2} ER \sqrt{a+b} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{R_0^2 - R^2 + \bar{Z}^2}{a-b} \left\{ E_{,R} R \sqrt{a+b} - E \left(\sqrt{a+b} + \frac{R(R+R_0)}{\sqrt{a+b}} \right) \right\} \right] \\
 G_{ZR,Z} &= \frac{A}{R (a+b)} \left[K \sqrt{a+b} + \bar{Z} \left(K_{,Z} \sqrt{a+b} - K \frac{\bar{Z}}{\sqrt{a+b}} \right) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{(R_0^2 - R^2 + 3\bar{Z}^2)(a-b) - 2\bar{Z}^2 (R_0^2 - R^2 + \bar{Z}^2)}{(a-b)^2} E \sqrt{a+b} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\bar{Z} (R_0^2 - R^2 + \bar{Z}^2)}{a-b} \left(E_{,Z} \sqrt{a+b} - E \frac{\bar{Z}}{\sqrt{a+b}} \right) \right] \\
 G_{ZZ,R} &= \frac{2A}{a+b} \left[(3-4\nu) \left(K_{,R} \sqrt{a+b} - K \frac{R+R_0}{\sqrt{a+b}} \right) - \frac{2\bar{Z}^2 (R-R_0)}{(a-b)^2} E \sqrt{a+b} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\bar{Z}^2}{a-b} \left(E_{,R} \sqrt{a+b} - E \frac{R+R_0}{\sqrt{a+b}} \right) \right]
 \end{aligned}$$

$$G_{zz,z} = \frac{2A}{a+b} \left[(3-4\nu) \left(K_{,z} \sqrt{a+b} - K \frac{\bar{Z}}{\sqrt{a+b}} \right) + \frac{2\bar{Z}(a-b) - 2\bar{Z}^3}{(a-b)^2} E \sqrt{a+b} \right. \\ \left. + \frac{\bar{Z}^2}{a-b} \left(E_{,z} \sqrt{a+b} - E \frac{\bar{Z}}{\sqrt{a+b}} \right) \right]$$

단, ν 는 푸아송비를 나타내며

$$\bar{Z} = Z - Z_0, \quad a = R^2 + R_0^2 + \bar{Z}^2, \quad b = 2RR_0, \quad A = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)}$$

와 같은 표기를 사용하였다. K 와 E 는 각각 제1종과 제2종의 완전 타원형 적분으로서 다음과 같이 정의 된다.

$$K(m) = \int_0^{\pi/2} (1 - m \sin^2 \xi)^{-1/2} d\xi \quad E(m) = \int_0^{\pi/2} (1 - m \sin^2 \xi)^{1/2} d\xi$$

여기서,

$$m = \frac{2b}{a+b}$$

K 와 E 의 미분은 다음과 같이 표현된다.

$$K_{,R} = \frac{2(R_0 a - R b)}{(a+b)^2} \left\{ \frac{E}{1-m} - \frac{K-E}{m} \right\}$$

$$K_{,z} = -\frac{2b\bar{Z}}{(a+b)^2} \left\{ \frac{E}{1-m} - \frac{K-E}{m} \right\}$$

$$E_{,R} = -\frac{2(R_0 a - R b)}{(a+b)^2} \left\{ K - \frac{E - (1-m)K}{m} \right\}$$

$$E_{,z} = \frac{2b\bar{Z}}{(a+b)^2} \left\{ K - \frac{E - (1-m)K}{m} \right\}$$