

편심하중을 받는 박벽개단면 압축재의 임계하중

Critical Loads of Eccentrically Loaded Struts with Thin-Walled Open Sections

나 영 진*
Na, Young-Jin

이 수 곤**
Lee, Soo-Gon

요 약

박벽개단면을 갖는 단일 형강재는 압축재로 될 수 있는데 예를 들면 트러스에서 복재가 이런 경우이다. 이때에는 부재의 조립 때문에 발생하는 필연적 편심을 구조설계시에는 보통 무시한다. 그러나 편심의 영향은 부재를 설계할 때, 특히 압축부재의 설계에서는 고려되어야 할 사항이다. 비틀림이나 혹은 휨과 비틀림에 의해서 좌굴을 일으키는 압축재의 임계하중은 지배하는 비분방정식의 해를 구함으로써 결정된다. 본 논문에서는 채널(C), 등변 앵글(L), 리프 채널(C)의 편심변화에 따른 내하력을 도표로 나타내기로 한다. 또한 식이 복잡하므로 컴퓨터를 이용하여 계산한 후, 그 결과를 SURFER 프로그램을 사용하여 그래프로 표시하였다.

Abstract

Single angle or channel with thin-walled open section can be used as compression member for example as web member in truss. In this case the inevitable eccentricity due to fabrication is commonly neglected in structural design. However eccentricity effect should be considered in the member design, especially in case of compression member. The critical loads of compression members that buckle by twisting or by a combination of bending and twisting are to be determined by solving governing differential equations. In this paper, the investigations are limited to the rolled channels(C), equal-leg angles(L), lipped channels(C) and the applied loads are assumed to have some eccentricities.

Keywords : thin-walled open section, eccentric load, critical load, flexural buckling, torsional buckling, flexural-torsional buckling, flexural rigidity, torsional rigidity, warping rigidity

1. 서 론

압축재는 작용하중이 임계하중(critical load)을 넘어서면, 축방향으로 수축을 멈추고 횡방향으로 좌굴을 일으킨다. 이 때의 좌굴은 휨좌굴(flex-

ural buckling), 비틀림좌굴(torsional buckling) 혹은 휨-비틀림좌굴(flexural-torsional buckling) 중 어느 하나로 된다. 트러스 구조물의 복재(web member)와 같이 단일 형강재의 구조부재는 편심을 피할 수 없게 된다. 중심축 하중을 받는 L-형강

* 전남대학교 건축공학과 박사과정

** 정회원, 전남대학교 건축공학과 교수

• 이 논문에 대한 토론을 1997년도 3월 31일까지 본 학회에 보내주시면 1997년 6월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

의 임계하중을 구하는 방법은 A. Zureick의 논문에서 찾을 수 있으나, 본 논문에서는 하나의 대칭축을 갖는 박벽개단면(thin-walled open section)형강재에 편심하중(eccentric load)이 있을 때의 임계하중을 산정하는 방법에 대해 서술하도록 한다. 또한 이를 바탕으로 부재길이와 편심의 크기에 따른 임계하중 변화를 도표로 나타내기로 한다. 이들 결과를 강구조 한계상태 규준에 어떻게 반영시킬 것인가는 별도의 연구가 있어야 하겠다.

2. 편심하중을 받는 압축재의 임계하중

그림 1의 단면에 축방향으로 편심 e_x 와 e_y 를 갖는 하중 P 가 작용할 때 단면에는 x - y 축으로의 변형(u, v)과 회전변형(φ)이 동시에 일어나며, 휨과 비틀림좌굴을 지배하는 미분방정식은 다음 식으로 표현된다. ^{1, 3, 5, 6, 7)}

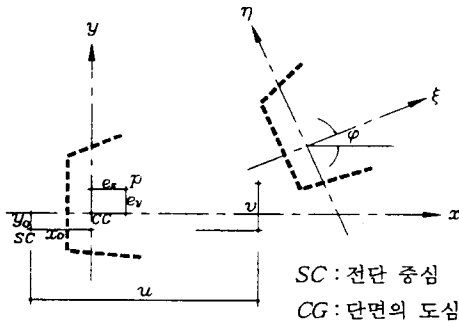


그림 1 Torsional-flexural buckling deformation

$$\begin{aligned}
 EI_x v^{IV} + P v'' + P(e_x - x_0) \varphi'' &= 0 \\
 EI_y u^{IV} + P u'' - P(e_y - y_0) \varphi'' &= 0 \\
 EI_w \varphi^{IV} - (GJ - Pr_0^2) \varphi'' - P(e_y - y_0) u'' \\
 + P(e_x - x_0) v'' &= 0
 \end{aligned} \tag{1}$$

$I_x, I_y = x$ 축, y 축에 관한 단면 2차모멘트
 $x_0, y_0 =$ 전단 중심부터 도심까지 거리
 $E =$ 탄성계수($2.1 \times 10^3 \text{ t/cm}^2$)
 $G =$ 전단 탄성계수($8.1 \times 10^2 \text{ t/cm}^2$)
 $r_0 =$ 전단 중심에 관한 단면의 극이차반경

$J, I_w =$ 비틀림상수, 뒤틀림상수

(1)식에 포함된 변형 u 와 v 그리고 회전변형 φ 를 각각 다음과 같은 형으로 가정한다.

$$\begin{aligned}
 u &= Au_0(z) - \frac{Pe_x}{2EI_y} z(L-z) \\
 v &= Bv_0(z) - \frac{Pe_y}{2EI_x} z(L-z), \quad \varphi = C\phi_0(z)
 \end{aligned} \tag{2}$$

(2)식에서 $u_0(z), v_0(z), \phi_0(z)$ 는 기하학적 경계조건을 만족하는 함수들로 단순지지단(simple support)일 때는 $\sin(\pi z/L)$ 가 기하학적 경계조건을 만족시키는 함수이다. 자세한 내용은 참고문헌을 참조하기 바란다. (2)식을 (1)식에 대입한 후 정리하면, 다음 행렬식을 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix}
 P_y - P & 0 & Ph_2 K'_{13} \\
 0 & P_x - P & -Ph_1 K'_{23} \\
 Ph_2 K'_{31} & -Ph_1 K'_{32} & r_0^2 (P_z - P)
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 A \\
 B \\
 C
 \end{bmatrix} =
 \begin{bmatrix}
 -P^2 e_x K_1 / P_y \\
 -P^2 e_y K_2 / P_x \\
 P^2 [(h_1 e_x / P_y) - (h_2 e_y / P_x)] K_3
 \end{bmatrix} \tag{3}$$

윗 식에서 $h_1 = e_x - x_0$ 이고 $h_2 = e_y - y_0$ 이며 K_{ij}, K_{ji} 등은 경계조건에 따른 계수로 표 1과 같다.

표 1 Coefficients K

조 건	Coefficients										
	K_{11}	K_{22}	K_{33}	K_1	K_2	K_3	K_{13}	K_{31}	K_{23}	K_{32}	K_{23}
①	1.0000	1.0000	1.0000	1.2732	1.2732	1.2732	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
②	1.0000	4.1223	1.0000	1.2732	1.2732	1.0000	1.0000	0.5507	1.4171	0.8834
③	4.1223	4.1223	1.0000	1.2732	0.5507	1.4171	0.5507	1.4171	0.8834
④	1.0000	4.1223	4.1223	1.2732	0.6597	1.4171	0.5507	1.0000	0.8834	1.0000
⑤	4.1223	4.1223	4.1223	0.6597	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
⑥	1.0000	1.0000	4.1223	1.2732	1.2732	0.6597	1.4171	1.4171	1.4171	0.5507	0.8834
①	$u' = v' = \theta' = 0$			$u' = v' = \theta' = 0$			$u' = v' = \theta' = 0$				
④	$u' = v' = \theta' = 0$			$u' = v' = \theta' = 0$			$u' = v' = \theta' = 0$				

표 1에서 $K_{23} = \sqrt{K'_{23} K'_{32}}$ 이다.

(2)식에 살펴보면 변형계수(A, B, C)의 크기가 커짐에 따라 변형(u, v, φ)도 증가하며, 변형이 무한대가 될 때 압축재는 불안정 상태에 도달한

다. (3)식에서 변형계수의 크기가 무한대가 되려면 다음의 관계식이 성립하여야 한다.

$$\det \begin{vmatrix} P_y - P & 0 & Ph_2K'_{13} \\ 0 & P_x - P & -Ph_1K'_{23} \\ Ph_2K'_{31} & -Ph_1K'_{32} & r_0^2(P_2 - P) \end{vmatrix} = 0$$

위의 행렬식을 정리하면 다음의 3차방정식을 얻을 수 있으며, 임계하중(critical load)은 이 방정식의 해중에서 최소값이다.

$$P^3 + a_2P^2 + a_1P + a_0 = 0 \tag{4}$$

(4)식에서 3차방정식의 계수 $a_i(i=0, 1, 2)$ 는 다음과 같으며,

$$a_0 = \frac{1}{H} [r_0^2 (P_x P_y P_z)]$$

$$a_1 = \frac{1}{H} [-r_0^2 (P_x P_y + P_x P_z + P_y P_z)]$$

$$a_2 = \frac{1}{H} [(P_x + P_y + P_z) r_0^2 - (e_y - y_0)^2 K'_{13}$$

$$K'_{31} P_x] - (e_x - x_0)^2 K'_{23} K'_{32} P_y]$$

$$H = (e_y - y_0)^2 K'_{13} K'_{31} + (e_x - x_0)^2 K'_{23} K'_{32} - r_0^2$$

(3)식에 포함된 P_x 와 P_y 그리고 P_z 에 관한 정의는 x 축과 y 축에 관한 휨 좌굴하중 그리고 비틀림 좌굴하중이며, 다음과 같다.

$$P_x = K_{11} \frac{\pi^2 EI_x}{L^2}$$

$$P_y = K_{22} \frac{\pi^2 EI_y}{L^2} \tag{5}$$

$$P_z = \frac{1}{r_0^2} \left[GJ + K_{33} \frac{\pi^2 EI_w}{L^2} \right]$$

EI : 휨강성 (flexural rigidity)

GJ : 비틀림 강성 (torsional rigidity)

EI_w : 뒤틀림 강성 (warping rigidity)

L : 부재 길이 (length of member)

본 논문에서는 3차방정식인 (4)식의 해를 아래와 같은 Kline법을 응용하여 구하였다.

$$\text{즉, } M = \frac{3a_1 - a_2}{9} < 0$$

$$N = \frac{9a_1 a_2 - 2a_2^3 - 27a_0}{54}$$

$$\theta = \arccos \frac{N}{\sqrt{-M^3}}$$

이라 할때, (4)식의 실근은 다음과 같다.

$$P_1 = -\frac{a_2}{3} + 2\sqrt{-M} \cos \frac{\theta}{3}$$

$$P_2 = -\frac{a_2}{3} + 2\sqrt{-M} \cos \left(\frac{\theta}{3} + \frac{2\pi}{3} \right) \tag{6}$$

$$P_3 = -\frac{a_2}{3} + 2\sqrt{-M} \cos \left(\frac{\theta}{3} + \frac{4\pi}{3} \right)$$

기술한 바와 같이 (4)식의 해 (P_1, P_2, P_3) 중 최소값이 압축재가 편심하중을 받을 때 휨과 비틀림을 고려한 임계하중을 나타낸다.

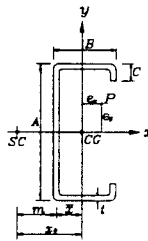


그림 2-a

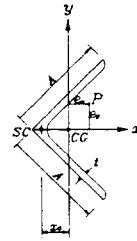


그림 2-b

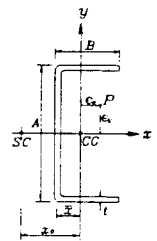


그림 2-c

그림 2 Thin-walled open section

여기서는 그림 2와 같은 박벽개단면에 관하여만 논하기로 한다. 그림과 같은 단면의 비틀림 상수 J 와 비틀림상수 I_w 는 다음과 같다.^{2,3}

<C-형강(그림 2-a 참조)>

$$J = \frac{t^3}{3} (a + 2b + 2c) \tag{7-a}$$

$$I_w = \frac{t^2}{Ag} \left\{ \frac{x A_g a^2}{t} \left(\frac{b^2}{3} + m^2 - mb \right) - \tag{7-b}$$

$$+ \frac{A_g}{3t} [m^2 a^3 + b^2 c^2 (2c + 3a)]$$

$$- \frac{I_x m^2}{t} (2a + 4c) + \frac{m c^2}{3} \{ 8b^2 c + 2m$$

$$[2c(c-a) + b(2c-3a)] + \frac{b^2 a^2}{6} [(3c+b)(4c+a) - 6c^2] - \frac{m^2 a^4}{4}$$

여기서 $a=A-t$, $b=B-t$, $c=C-t/2$ 이고 A_g 는 단면적이다.

<등변 L-형강(그림 2-b 참조)>

$$J = \frac{2t^3 a}{3} \quad (7-c)$$

$$I_w = \frac{t^3 a^3}{18} \quad (7-d)$$

여기서 $a=A-t/2$ 이다.

<경량 [-형강(그림 2-c 참조)>

$$J = \frac{t^3}{3}(a+2b) \quad (7-e)$$

$$I_w = \frac{t a^2 b^3}{12} \left(\frac{3b+2a}{6b+a} \right) \quad (7-f)$$

여기서 $a=A-t$, $b=B-t/2$ 이다.

또한 전단 중심에 관한 단면의 극이차반경 r_0 는 다음과 같이 구할 수 있으며, 이 때에 x_0 와 \bar{x} 의 부호는 (-)이다.

$$r_0^2 = x_0^2 + y_0^2 + i_x^2 + i_y^2 + \beta_x e_y + \beta_y e_x \quad (8)$$

$i_x, i_y = x$ 축, y 축에 관한 단면 2차반경

$$\beta_x = \frac{1}{I_x} \left(\int y^3 dA + \int x^2 y dA \right) - 2y_0 = 0 \quad (9-a)$$

$$\beta_x = \frac{1}{I_y} \left(\int x^3 dA + \int x y^2 dA \right) - 2x_0 = \frac{\beta_w + \beta_f + \beta_l}{I_y} - 2x_0 \quad (9-b)$$

<C-형강>

$$\beta_w = \frac{t x a^3}{12} + t x^3 a$$

$$\beta_f = \frac{t}{2} [(b-\bar{x})^4 - \bar{x}^4] + \frac{a^2 t}{4} [(b+\bar{x})^2 - \bar{x}^2]$$

$$\beta_l = 2ct(\bar{x}+b)^3 + \frac{2t(x+b)}{3} -$$

$$\left[\left(\frac{a}{2} \right)^3 - \left(\frac{a}{2} - c \right)^3 \right]$$

<등변 L-형강>

$$\beta_w = \beta_l = 0$$

$$\beta_f = -\frac{t}{\sqrt{2}} [(\bar{x}+b')^4 - \bar{x}^4 + \frac{4}{3} \bar{x} b'^3 + b'^4]$$

$$b' = a/\sqrt{2} = b/\sqrt{2}, \bar{x} = x_0 = \frac{a\sqrt{2}}{4}$$

<경량 [-형강>

$$\beta_l = 0, \beta_w = \frac{t x a^3}{12} + t x^3 a$$

$$\beta_f = \frac{t}{2} [(b+\bar{x})^4 - \bar{x}^4] + \frac{a^2 t}{4} \times [(b+\bar{x})^2 - \bar{x}^2]$$

3. 임계하중(critical load) 변화 분석

앞서 기술한 방법을 이용하여 양단이 단순지지

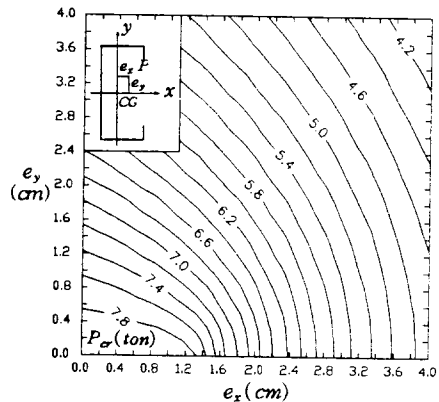


그림 3 L=2.0m, C-120×40×20×3.2

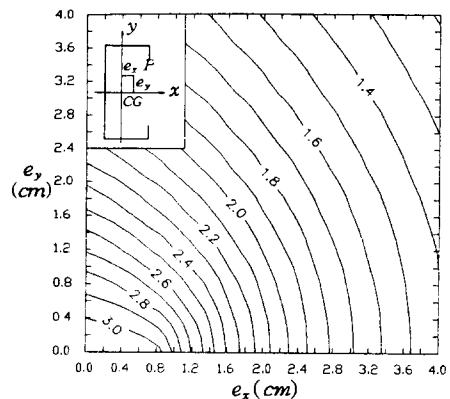


그림 4 L=1.5m, C-60×30×10×2.3

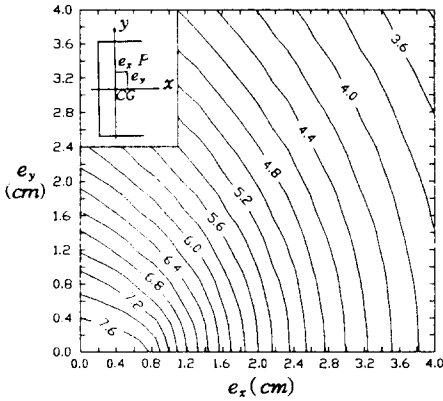


그림 5 L=2.0m, [-100×50×3.2(경량형강)]

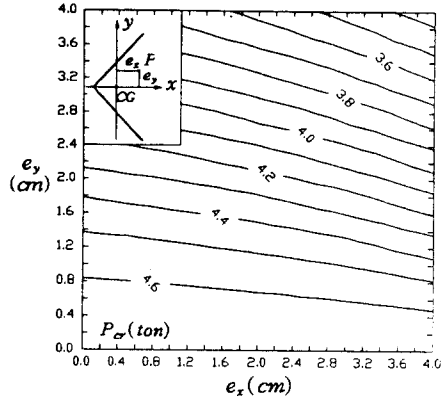


그림 7 L=1.0m, L-40×40×5.0

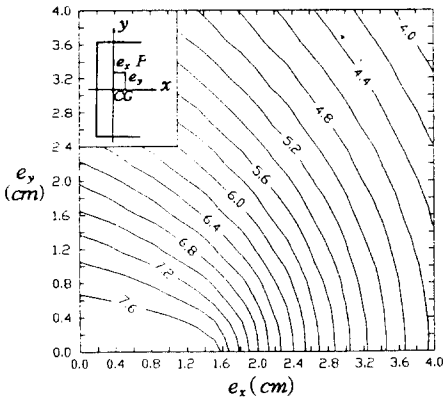


그림 6 L=1.5m, [-120×40×3.2(경량형강)]

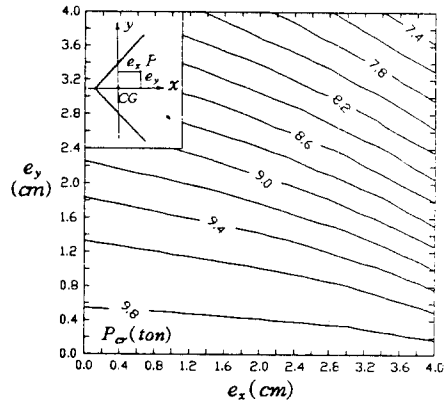


그림 8 L=2.0m, L-75×75×6.0

(simple support)된 C-형강과 등변 L-형강 그리고 경량 [-형강의 임계하중을 좌굴길이 L 과 편심의 크기에 따라서 그래프로 나타내면, 다음과 같다. 이 때의 계산과정에 대한 절차는 부록에 나타내었다.

4. 결 론

편심하중을 받는 박벽개단면 압축재의 임계하중 산정에서 다음과 같은 결론을 얻었다.

- 1) 편심거리에 따른 임계하중 변화의 그래프를 살펴보면, 예상대로 편심이 증가함에 따라 임계하중은 감소현상을 보인다.
- 2) 강축 편심(e_x)이 변화할 때보다 약축 편심

(e_y)이 변화할 때의 임계하중 변화폭이 비교적 크게 나타났으며, 부재의 편심거리가 0에 가까울수록 임계하중 변화폭은 점차 작아짐을 알 수 있다.

3) 이러한 결과를 강구조 한계상태설계 기준에 반영시키는 방법은 별도로 연구되어야 한다.

참 고 문 헌

1. W. F. Chen and T. Atsuta : "Theory of beam-columns", Vol. 2, pp. 158~177, McGraw-Hill, 1977
2. R. NARAYANAN : "Axially compressed structures-stability and strength", pp. 191~198, Applied Science Publishers, 1982

3. Wei-Wen Yu : "Cold-formed steel structures", pp. 255~265, pp. 420~427, McGraw-Hill, 1973
4. A. Zureick : "Design strength of concentrically loaded single angle struts", AISC Engineering Journal, Vol. 30, No. 1, 1993
5. S. P. Timoshenko and J. M. Gere : "Theory of elastic stability", pp. 212~250, McGraw-Hill, 1963
6. Friedrich Bleich : "Buckling strength of metal structures", pp. 104~138, McGraw-Hill, 1952
7. Alexander Chajes : "Principles of structural stability", pp. 195~228, Prentice-Hall, 1974
(접수일자 : 1996. 8. 14)