

〈논 문〉

사각보행기의 고속 보행제어를 위한 동적 모델링 및 해석

강성철* · 유홍희** · 김문상* · 이교일***

(1996년 7월 11일 접수)

A Dynamic Modeling and Analysis for High-speed Walking of a Quadrupedal Robot

Sungchul Kang, Honghee Yoo, Munsang Kim and Kyo-II Lee

Key Words : Quadrupedal Walking Robot(보행로봇), Dynamics(동역학), Trot Gait(트롯걸음새), Equation of Motion(운동방정식), Torque Redundancy(토크 리던던시), Dynamic Simulation(동역학 시뮬레이션)

Abstract

In order to control a dynamic gait of quadrupedal walking robot, the equations of motion of the whole mechanism are required. In this research, the equations of motion are formulated analytically using Kane's dynamic approach. As a dynamic gait model, a trot gait has been adopted. The degree of freedom of whole mechanism could be reduced to 7 by idealizing the kinematic feature of the trot gait. Using the equations of motion formulated, the results of the redundant-joint torque analysis and the simulation of dynamic walking motion are presented.

1. 서 론

4각 보행로봇의 보행속도를 높이고 에너지 관점에서 효율적인 운동을 구현하기 위해서는 동적걸음새 제어가 필요하다. 동적걸음새를 제어하기 위해서는 전체 모델에 대한 운동방정식이 요구된다. 운동방정식은 보행로봇의 모터 선정을 위한 토크해석을 위한 역동역학 모델로 이용되고, 보행운동 시뮬레이션을 위한 순동역학 모델로도 이용된다. 또한 동적걸음새를 제어하기 위한 제어기의 동적 모델로도 이용된다.

보행로봇의 동적 걸음새에 관한 연구는 2각, 4각 로봇에 대해서 활발히 진행되고 있다. Kimura⁽¹⁾은 안정도(stability), 최대 속도, 에너지소비량의 관

점에서 4각 보행기의 세가지 걸음새, 즉 트롯(trot), 페이스(pace) 그리고 바운드(bound)를 해석하였다. 여기서, Kimura는 안전성을 보장하는 최대 속도에서 트롯걸음새가 에너지소비량의 관점에서 가장 적합한 걸음새라고 주장하였다. Nakamura⁽²⁾는 뉴턴-오일러(Newton-Euler)방법을 이용하여 보행로봇에 대한 일반적인 시뮬레이션 방법을 제안하였고, 보행 중에 발과 지면에서 생기는 구속조건이 변경되므로 이를 고려하여 각 발의 적절한 구속조건을 지정하는 방식을 취하였다. Villard⁽³⁾의 연구에서도 뉴턴-오일러방법을 이용하였으며, 보행로봇을 3자유도의 플랫폼부와 2자유도의 다리부분을 분리하여 운동방정식을 생성한 후의 상호작용력을 고려하여 전체 시스템의 동역학을 해석하였다. Shih⁽⁴⁾의 연구에서는 스피링과 댐퍼로 구성된 컴플라이언스 조인트모델을 이용하여 동역학 시뮬레이션을 하였다. 이 연구에서는 케연쇄에서 생기는 기구학적 구속조건을 사용하는 대신 조

*회원, 한국과학기술연구원 기전연구부

**회원, 한양대학교 기계설계학과

***회원, 서울대학교 기계설계학과

인트와 발바닥을 컴플라이언스를 갖도록 모델링하고 이웃하는 링크간의 상호작용력 관계식을 이용하여 뉴턴-오일러방법으로 운동방정식을 유도하였다. 서영진 등⁽⁵⁾의 연구에서는 사각보행의 동적걸음새에 대한 설계조건을 제시하고, 최적화기법을 이용하여 동적걸음새를 설계하였다. 또한 Haug⁽⁶⁾의 연구를 기초로 하여 충격량과 마찰력을 추가로 고려한 동적 보행 알고리즘을 제시하였다.

보행로봇과 같은 다물체 시스템은 운동방정식을 해석적으로 전개하는 과정이 매우 복잡하다. 각 다리가 3자유도를 갖는 4각 보행로봇의 경우, 몸체는 최대 6자유도를 가지므로 전체 시스템의 자유도는 18이 된다. 그러나 보행로봇의 걸음새가 결정되면 이에 따른 기구학적 구속조건을 이용하여 전체 시스템의 자유도를 상당히 줄일 수 있다. 예를 들어 트롯걸음새의 경우 대각선 상의 두 다리가 한 쌍이 되어 같이 운동하고, 몸체는 3자유도만을 갖게 되므로 케연쇄부가 3자유도, 이동하는 개연쇄부가 4자유도가 되어 전체 자유도는 7이 된다.

이와 같이 다물체 시스템의 운동방정식을 해석적으로 전개하기 위해서는 체계적이고, 효율적인 전개방법이 요구된다. 앞서 언급한 기존의 연구^(2~4)에서는 뉴턴-오일러방법을 사용하는데, 이 방법은 운동방정식이 일반적으로 연쇄적인 형태(recursive form)로 유도되어 계산시간은 단축되나 운동방정식을 해석적으로 전개하는 과정에서 불필요한 비공헌력(non-contributing force)-조인트의 상호반력, 미끄러짐이 없는 경우의 발의 반력-을 구해야 하는 단점이 있다. 또한 라그랑지-오일러(Lagrange-Euler)방법은 각 링크의 가속도를 구하지 않아도 되나 라그랑지안(Lagrangian)을 편미분하는 과정에서 매우 복잡하고, 작용력을 라그랑지계수(Lagrangian multiplier)를 이용하여 구해야 하는 복잡성이 있다. 본 연구에서 이용한 Kane⁽⁷⁾ 동역학 이론은 불필요한 비공헌력을 구할 필요가 없고, 편속도(partial velocity)와 일반 작용력 및 일반 관성력의 개념을 이용하여 다물체 시스템의 운동방정식을 체계적으로 전개할 수 있다.

생성된 운동방정식을 이용하여 조인트토크 해석을 하면 트롯걸음새에 의한 기구학적 특성에 의하여 방정식의 수보다 구해야 할 미지토크의 수가 더 많게 되는 리던던시(redundancy) 문제가 발생한다. 이것은 트롯걸음새의 특성을 고려하여 추가의 구속조건을 부여함으로써 해결할 수 있다. 토크의

리던던시를 이용하면, 각 조인트에 걸리는 토크를 최대토크 범위내로 분산할 수 있는 장점이 있다. 또한 토크해석에서 적절한 조인트토크가 결정되면 이를 운동방정식에 대입하여 피드백제어기 구성을 위한 개루프 시뮬레이션을 함으로써 입력토크의 샘플링정도(sampling rate)에 따른 보행로봇의 운동 오차를 고찰할 수 있다.

본 연구에서는 Kane의 방법을 이용하여 운동방정식을 체계적으로 생성하고 트롯걸음새에 필요한 조인트 토크계산 및 토크 리던던시문제를 적절한 구속조건을 부여함으로써 고찰하며, 룽게-쿠타(Runge-Kutta)방법을 이용한 개루프제어 시뮬레이션을 수행함으로써 보행로봇의 동적걸음새운동을 검사하는 것을 그 목적으로 한다.

2. 기구학

보행로봇의 운동방정식을 유도하기 위해서는 먼저 각 링크의 위치, 속도, 가속도에 대한 관계가 정의되어야 한다. Fig. 1은 보행로봇의 트롯걸음새에 대한 기구학(kinematics) 모델을 보여준다.

2.1 기본 가정

본 연구에서 개발된 4각 보행기는 몸체의 6자유도, 즉 X, Y, Z , roll, pitch, yaw 그리고 각 다리가 Fig. 2에서와 같이 힙부분의 yaw방향 회전과 pitch방향 회전을 할 수 있고 무릎부분에서 pitch방향 회전을 할 수 있도록 제작되었다. 기구학적인 구속조건을 갖지 않는 경우 사각보행기가 가질 수 있는 최대 자유도는 몸체의 자유도, 6과 각 다리의 자유도, 3을 합하여 18이 되며, 3차원 공간상에서 운동을 한다. 그러나 동역학 모델링을 단순화하기 위한 기본 가정을 다음과 같이 설정함으로써 보행기의 운동을 2차원으로 제한하여 전체 시스템의 자유도를 7자유도로 줄였다. 그리고 이 가정으로 인해 발생할 수 있는 문제점에 대한 해결책을 설계사양의 관점에서 제시하였다.

(1) 보행기의 몸체는 X, Y, q_3 의 3자유도를 가진다. 시스템의 자유도를 줄이기 위하여 몸체가 전후로 기울어지는 pitch(q_3)방향의 회전만을 고려한다. 몸체의 좌우방향의 병진(Z) 및 회전(roll) 운동은 보행실험시 발을 장착함으로써 기구적으로 방지할 수 있다.⁽⁸⁾ 발의 폭은 몸체의 roll방향의 정적 모멘트 값을 계산하여 적절히 설계할 수 있다.

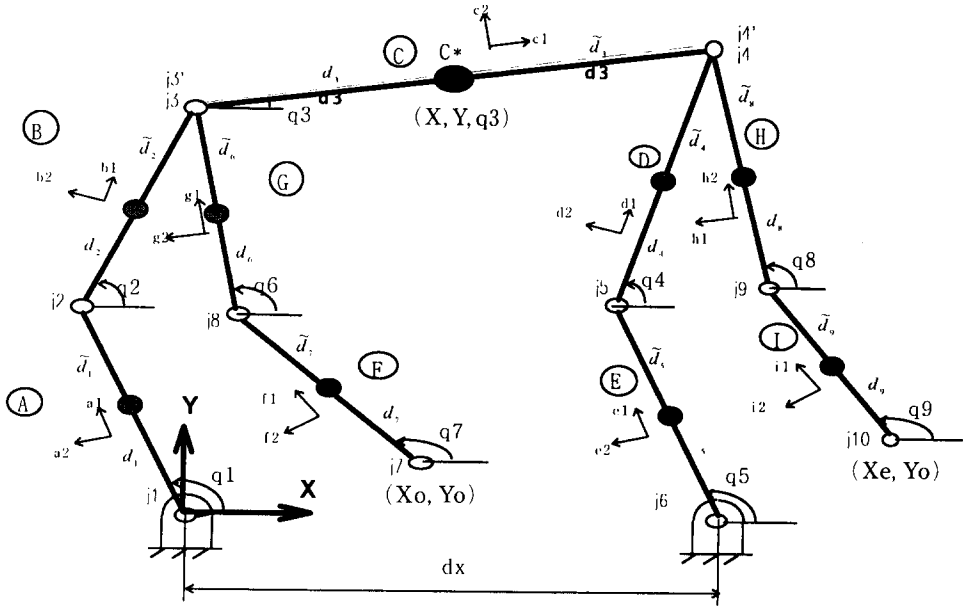


Fig. 1 Kinematic model of quadrupedal robot with trot gait motion

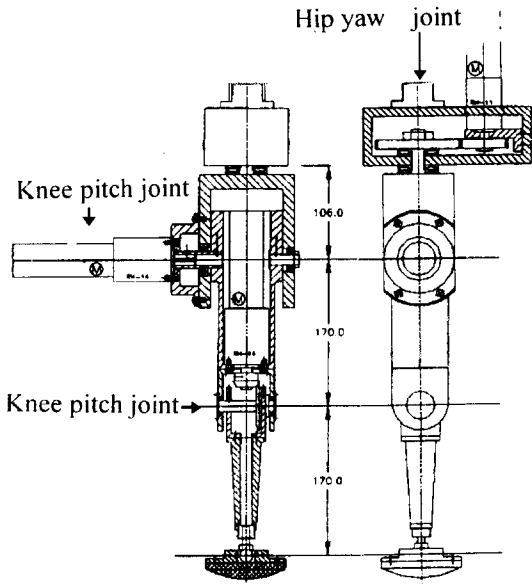


Fig. 2 Structure of single leg mechanism

(2) 걸음새는 트롯걸음새 모델로 한정한다.

(3) 디듀티팩터(duty factor) $\beta = \left(\frac{T_{\text{SUP PORT}}}{T} \right)$ 는 1/2로 한다. 단, 실제보행시 좌우방향의 회전을 방지하기 위해서 각 다리의 지지구간과 이동구간이 교차되는 반주기시에 적절한 시간지연(0.5초)을 둔다. 이는 roll방향의 회전방지뿐만 아니라 제어시각 다리의

동기성(synchronization)을 보장하기 위해서도 필요하다.

(4) 지지구간에서 발과 지면과의 미끄러짐을 일어나지 않는다. 보행시 미끄러짐을 최소화하기 위해서 발바닥부에 마찰계수가 큰 고무패드를 장착하고 또한, 착지시 지면과의 면접촉을 보장하기 위해서 비구동 발목관절에서 저장성의 코일 스프링을 장착하는 방법이 적용될 수 있다.

(5) 몸체는 직진보행을 한다. 따라서 각 다리의 힘 부분의 yaw방향 관절은 고정되므로 곡선 보행 경로에 필요한 몸의 yaw방향 회전은 고려하지 않는다.

4각 보행기구의 몸체 진행방향이 두개의 지지 다리(standing legs)가 이루는 평면위에 있지 않으나 보행기가 트롯걸음새인 경우 직진운동만을 한다고 가정하면, 링크장치(linkage)상의 모든 점은 일정 평면에서 운동하므로 평면 링크장치라고 볼 수 있다. 따라서 Fig. 3와 같이 지지다리부(standing linkage)가 지면과 이루는 케연쇄가 X-Y 평면에 투영된 평면 링크장치로 보고 해석할 수 있다. 또한 이동다리부(swing linkage)도 같은 방법으로 해석할 수 있다.

2.2 자유도 및 일반좌표

2차원 링크장치에 대한 Grubler-Kutzbach조건식

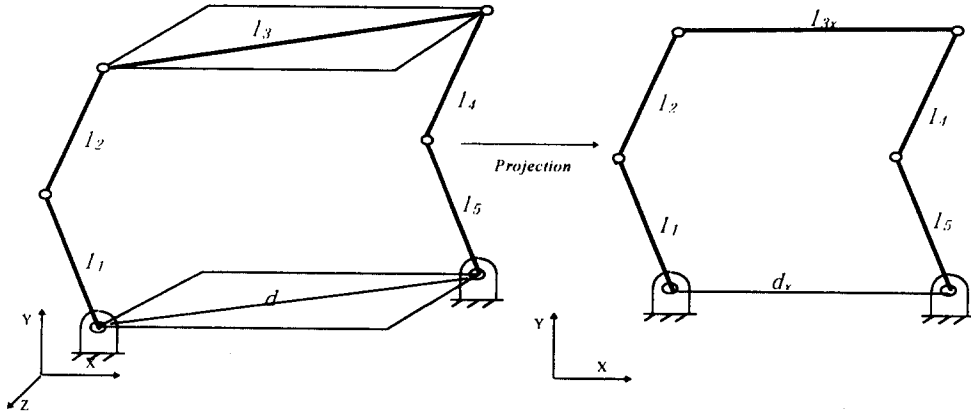


Fig. 3 2-dimensional projection of standing phase linkage

에 의하여 보행기의 자유도 n 은 다음과 같이 계산된다.

$$n=3(b-1)-2c \equiv 7 \quad (1)$$

여기서, b 는 링크의 개수로 10이며, c 는 조인트의 갯수로 10이다.

그리고, 이 시스템은 동역학적으로 홀로노믹 시스템이므로, 자유도와 일반좌표의 수가 같으며, 일반좌표는 다음과 같이 정의하였다.

X =몸체의 x 좌표

Y =몸체의 y 좌표

q_3 =몸체의 pitch angle

X_o =front swing foot의 x 좌표

Y_o =front swing foot의 y 좌표

X_e =rear swing foot의 x 좌표

Y_e =rear swing foot의 y 좌표

2.3 위치해석

지지구간(standing phase)에 있는 두 발과 몸체는 폐연쇄를 이루며, 다음과 같은 형태구속조건(configuration constraint)을 갖는다.

$$\begin{aligned} l_1 \sin(q_1) + l_2 \sin(q_2) + l_3 \sin(q_3) + l_4 \sin(q_4) \\ + l_5 \sin(q_5) = d \\ l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_2) + l_3 \cos(q_3) + l_4 \cos(q_4) \\ + l_5 \cos(q_5) = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

일반좌표로 정의된 $X, Y, q_3, X_o, Y_o, X_e, Y_e$ 와 각 조인트각도는 다음과 같은 비선형적 관계를 가진다. 따라서 각 조인트각도를 구하기 위해서는 역기구학 루틴이 필요하다. 본 연구에서는

Newton-Raphson방법을 이용하여 반복적으로 역기구학해를 구하였다.

(1) 지지구간(standing phase)

$$\begin{aligned} x &= l_1 \sin(q_1) + l_2 \sin(q_2) + d_3 \sin(q_3) \\ y &= l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_2) + d_3 \cos(q_3) \end{aligned} \quad (3)$$

(2) 이동구간(swing phase)

$$\begin{aligned} x - x_o &= l_1 \sin(q_6) + l_2 \sin(q_2) + d_3 \sin(q_3) \\ y - y_o &= l_1 \cos(q_6) + l_2 \cos(q_2) + d_3 \cos(q_3) \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} x - x_e &= l_5 \sin(q_9) + l_4 \sin(q_8) + \tilde{d}_3 \sin(q_3 + \pi i) \\ y - y_e &= l_1 \cos(q_9) + l_4 \cos(q_8) + \tilde{d}_3 \cos(q_3 + \pi i) \end{aligned} \quad (5)$$

여기서, 발의 이동시 궤적은 Sakakibara⁽⁹⁾가 제안한 타원형 궤적을 사용하였으며, 그 식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} x_e &= L \cos\left(\frac{-2(\pi+2\theta)t}{T} + \pi + \theta\right) + L \cos(\pi + \theta) \\ y_e &= R \sin\left(\frac{-2(\pi+2\theta)t}{T} + \pi + \theta\right) - R \sin(\pi + \theta) \end{aligned}$$

여기서, $\theta = 26.24^\circ$

$$L = S / \cos \theta$$

$$R = H / (\sin \theta + 1) \quad (6)$$

여기서, L 은 타원의 장반경이고, R 은 타원의 단반경이다. 또한 S 는 보폭(step length)의 1/4이고, H 는 이동다리의 지면으로부터의 최대높이이다.

2.4 속도해석

각 조인트의 각속도 q 는 일반속력 u 를 이용해서

다음과 같이 기술할 수 있다.

$$\dot{q}_i = \sum_{j=1}^7 a_{ij} \dot{u}_j \quad i=1, \dots, 9, \quad j=1, \dots, 7 \quad (7)$$

여기서, i 는 링크의 수를 가리키며, j 는 일반좌표의 수를 가리킨다. $[a]_{9 \times 7}$ 는 조인트의 각속도를 일반속력으로 표현하기 위한 계수행렬이다.

각 링크의 각속도가 결정되면 링크의 질량중심의 선속도는 다음과 같은 일반적인 속도관계식으로 표현된다. 강체 B 에 붙어있는 점 P, Q 에 대하여 ${}^A V^P$ 는

$${}^A V^P = {}^A V^Q + {}^A \omega^B \times r \quad (8)$$

로 표현되고, ${}^A V^P, {}^A V^Q$ 는 각각 기준틀 A 에 대한 점 P, Q 의 속도이고, ${}^A \omega^B$ 는 기준틀 A 에 대한 강체 B 의 각속도이며, r 은 위치벡터 \overline{PQ} 이다.

2.5 가속도해석

각 링크의 각가속도는 식 (7)을 시간에 대하여 미분하여 구할 수 있으며, 다음과 같은 형태로 정리된다.

$$\ddot{q}_i = \sum_{j=1}^7 a_{ij} \ddot{u}_j + \gamma_i \quad (9)$$

각 링크 질량중심의 가속도는 식 (8)을 시간에 대하여 미분하여 구할 수 있으며, 다음과 같이 표현된다.

$${}^A a^P = {}^A a^Q + {}^A \omega^B \times ({}^A \omega^B \times r) + {}^A \dot{\omega}^B \times r \quad (10)$$

여기서, ${}^A a^P, {}^A a^Q$ 는 각각 기준틀 A 에 대한 P, Q 에 가속도이고, ${}^A \dot{\omega}^B$ 는 기준틀 A 에 대한 강체 B 의 각가속도이다.

3. 운동방정식

4각 보행기의 동역학적 모델은 Fig. 4와 같다. 트롯걸음새에서는 지면으로부터의 지지하는 두개의 발에 작용하는 반력(f_1, f_2)와 조인트의 모터토크($T_i, i=1, \dots, 8$)가 외력으로 작용한다. 여기서 발에 작용하는 반력은 접촉점에서 x, y 방향의 반력만이 작용한다고 가정한다. 이 가정은 몸체가 직진 보행시 롤(roll)방향(x 축)으로 기울어지지 않는 경우 타당한 가정이다. 또한, 조인트토크는 작용-반작용토크로서 인접하는 두 개 링크에 동시에 같은 토크를 작용시킨다.

Kane 동역학 이론⁽¹⁰⁾에 의한 운동방정식을 유도

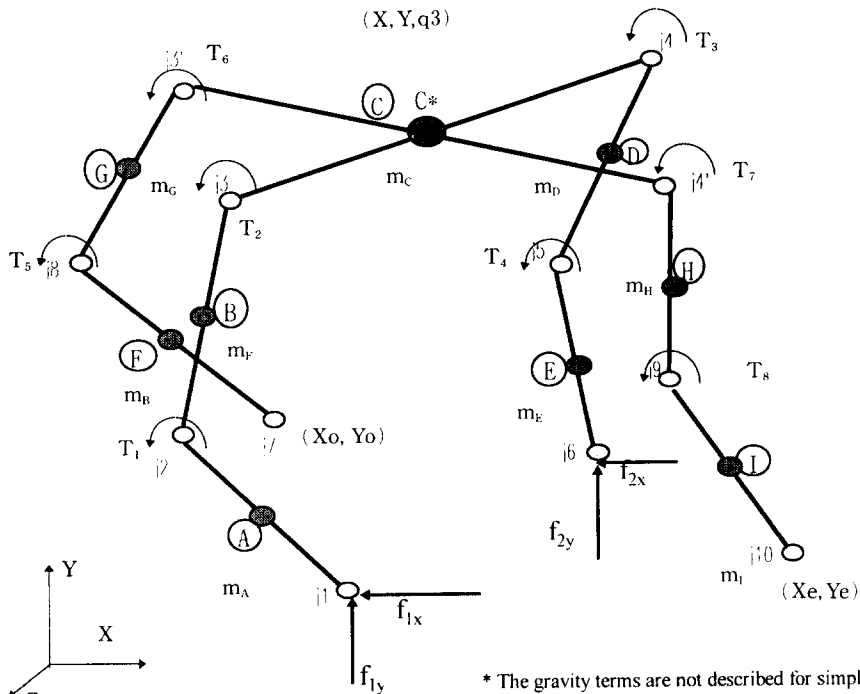


Fig. 4 Dynamic model quadrupedal robot with trot gait motion

하기 위해서, 먼저 각 링크의 편속도와 편각속도를 계산한다. 이를 각각의 작용력 및 관성력에 내적하여 일반 작용력과 일반 관성력을 구한 후, 방향 코사인을 이용하여 모든 좌표를 뉴턴니언(Newtonian) 좌표계에 대한 값으로 표현함으로써 최종적인 운동방정식을 유도한다.

3.1 편속도와 편각속도

4각 보행로봇의 동역학 모델과 같은 홀로노믹 시스템에서 각 링크의 속도 및 각속도는 편속도와 편각속도에 의하여 각각 다음과 같이 기술된다.

$$v = \sum_{r=1}^n v_r u_r + v_i$$

$$\omega = \sum_{r=1}^n \omega_r u_r + \omega_i \tag{11}$$

위의 정의에 따라 편속도와 편각속도는 각각 링크 질량중심의 속도와 각속도를 일반속력으로 편미분함으로써 결정할 수 있다.

3.2 작용력 및 작용토크

Fig. 4에서 보는 바와 같이, 보행로봇에 작용하는 작용력(active force)은 중력과 지지하는 발에 작용하는 반력들이다. 또한 작용토크(active torque)는 모터에 의해 작용하는 토크이다. 단 발에 작용하는 반력 f_1, f_2 는 발과 지면사이에서 미끄러짐이 없다는 가정에 의하여 작용점에서 운동을 일으키지 않으므로, 비공헌력(noncontributing force)이다. Kane 동역학 이론에 의하면 비공헌력은 운동방정식에 기술되지 않는다.

3.3 관성력 및 관성토크

관성력과 관성토크는 각 링크의 질량과 질량관성모멘트에서 기구학 해석에서 결정된 각 링크의 가속도와 각속도 및 각가속도에 의하여 다음과 같이 결정된다.

$$R^* = -Ma^*$$

$$T^* = -a \cdot I - \omega \times I \cdot \omega \tag{12}$$

3.4 운동방정식

각 링크의 작용력 및 관성력이 결정되면 해당하는 편속도 혹은 편각속도를 내적하여 일반작용력(generalized active force) 및 일반관성력(generalized inertia force)을 구한다. 유도된 일반작용력은 다음과 같이 표현된다.

$$F_i = \bar{F}_A \cdot \bar{v}_i^* + \bar{R}_B^* \cdot \bar{v}_i^* + \dots + \bar{F}_L \cdot \bar{v}_i^* + \bar{T}_A \cdot \bar{\omega}_i^* + \bar{T}_B \cdot \bar{\omega}_i^* + \dots + \bar{T}_L \cdot \bar{\omega}_i^* \tag{13}$$

$i=1, 2, \dots, 7$

또한 일반관성력은 다음과 같이 표현된다.

$$F_i^* = \bar{R}_A^* \cdot \bar{v}_i^* + \bar{R}_B^* \cdot \bar{v}_i^* + \dots + \bar{R}_L^* \cdot \bar{v}_i^* + \bar{T}_A^* \cdot \bar{\omega}_i^* + \bar{T}_B^* \cdot \bar{\omega}_i^* + \dots + \bar{T}_L^* \cdot \bar{\omega}_i^* \tag{14}$$

$i=1, 2, \dots, 7$

최종적으로 운동방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$F_i = F_i^* \quad i=1, 2, \dots, 7 \tag{15}$$

운동방정식에 이용되는 기구학, 동역학 계수와 유도된 운동방정식의 일반작용력과 일반관성력을 부록에 나타내었다. 유도된 운동방정식은 Knae 동역학 이론에 근거하여 개발된 기호화된 운동방정식 생성 프로그램 AutoLev⁽¹¹⁾을 이용하여 검증하였다. 각 링크의 질량 및 질량관성모멘트는 KIST에서 제작된 정동식 사각보행기⁽¹²⁾의 각 링크를 분해하여 실험적으로 구하였다.

4. 토크해석

보행로봇의 설계시 모터선정을 위하여 목표하는 운동조건에 대한 조인트 토크를 계산하기 위해서 토크해석이 필요하다. 토크해석(torque analysis)을 위해서는 운동방정식을 각 링크의 운동조건, 즉 위치, 속도, 가속도를 입력으로 하고, 조인트토크를 출력으로 하는 역동역학 방정식(inverse dynamic equation)으로 재구성한다.

4.1 역동역학 방정식

식 (15)을 일반속력의 1차 미분항에 대한 선형 방정식의 형태로 정리하면 다음과 같다.

$$[a]\{\dot{u}\} = \{f\} \tag{16}$$

여기서, $[a]_{7 \times 7}$ 는 $\{\dot{u}\}$ 의 계수행렬이고, $\{f\}$ 는 $\{\dot{u}\}$ 항을 제외한 나머지 항, 즉 작용력, 구심력, 코리올리력 그리고 중력과 관련된 모든 항을 정리한 벡터이다. $\{f\}$ 에 조인트토크 항이 선형적으로 포함되어 있으므로, 다음과 같이 $\{f\}$ 에서 토크벡터 $\{T\}$ 를 분리할 수 있다.

$$\{f\} = \{f'\} = -[\gamma]^T \{T\} \tag{17}$$

여기서, 조인트토크 $\{T\}$ 는 각 관절에 장착된 모터에 의해서 구동되는 토크이므로 작용-반작용토크

가 된다. 따라서 $[\gamma]$ 는 식 (7)에 의해서 결정된 a_i 의 선형조합의 형태로 정의된다(부록의 일반작용력 항 참조).

최종적으로 역동역학 방정식은 다음과 같이 정리된다.

$$[\gamma]^T \{T\} = \{f'\} - [a]\{\dot{u}\} \quad (18)$$

4.2 운동조건

본 연구에서는 가정한 보행조건은 몸체가 트롯 걸음새를 유지하며, 평지에서 직진보행을 하는 것이다. 따라서 몸체는 항상 지면과 수평을 유지하며 보행하므로, 이동하는 두 발의 궤적은 서로 같다. 몸체의 속도는 사다리꼴형 속도형태(trapezoidal velocity profile)를 갖는다고 가정하였다. 이상적인 트롯걸음새의 경우, 디딤돌이 1/2이므로 반주기

에 대한 운동만으로 전체 보행운동을 설명할 수 있다. 따라서 본 연구에서는 반주기 운동만을 고려하였다. 운동의 경계조건은 Tables 1, 2에 나타냈으며, 로봇의 초기자세 및 반주기 후의 자세는 Figs. 5, 6와 같다.

- (1) 몸체의 경계조건
- (2) Front foot의 경계조건
- (3) 초기 자세와 반주기 후의 자세
- (4) 몸체와 발의 궤적

반주기 동안 몸체와 발이 운동하는 시간에 대한 궤적은 Figs. 7, 8과 같다.

4.3 토크 리던던시 문제

Fig. 4에서 보는 바와 같이 전체 시스템의 운동 방정식은 7개인데 결정해야 할 조인트토크는 8개가

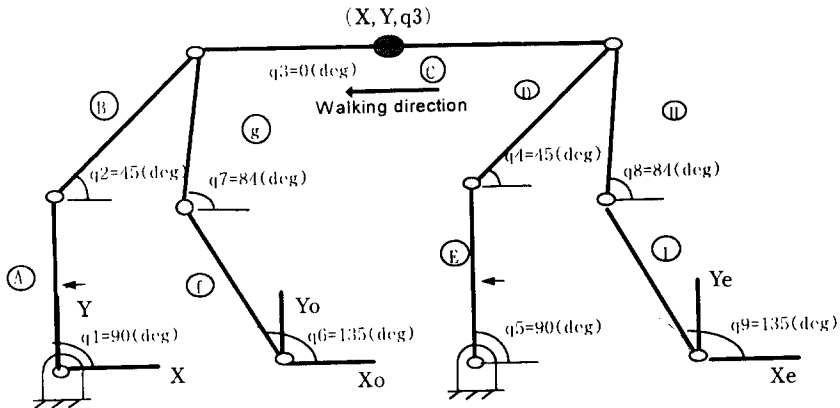


Fig. 5 Initial configuration (t=0)

Table 1 Initial/final condition of body motion

<Start>	X	Y	q ³	<End>	X	Y	q ³
Position (m)	0.291	0.341	0	Position (m)	0.141	0.341	0
Vel. (m/s)	0	0	0	Vel. (m/s)	0	0	0
Acc. (m/s ²)	-1	0	0	Acc. (m/s ²)	1	0	0

Table 2 Initial/final condition of a swing foot motion

<Start>	X ₀	Y ₀	<End>	X ₀	Y ₀
Position (m)	0.15	0	Position (m)	-0.15	0
Vel. (m/s)	1.6	0.66	Vel. (m/s)	1.6	-0.66
Acc. (m/s ²)	68.6	7.04	Acc. (m/s ²)	68.6	7.04

(X, Y, q3)

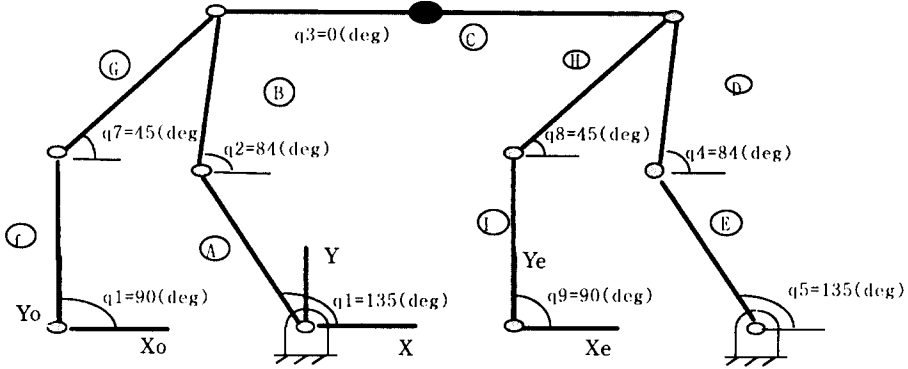


Fig. 6 Final configuration (t=T/2)

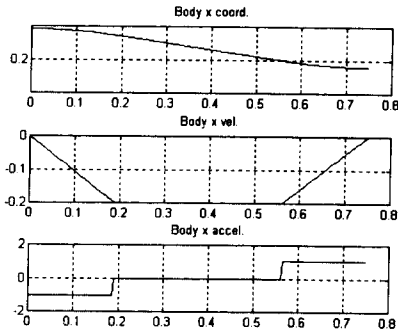


Fig. 7 Trajectory of body in X-direction

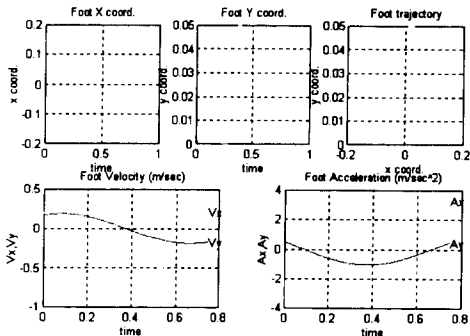


Fig. 8 Trajectory of a swing foot in X, Y-direction

된다. 이러한 토크 리던던시 문제를 해결하기 위해서 토크간의 적절한 구속조건을 추가로 설정하거나 적절한 목적함수를 정의하여 최적화기법을 사용할 수 있다. 첫째로 토크간의 적절한 구속조건을 찾는 문제를 고려하면, 트롯걸음새에서 서로 대응되는 조인트토크, 즉 T1과 T4, T2와 T3, T5와 T8 혹

은 T6과 T7을 서로 갖게 갖게 놓음으로써 하나의 구속조건을 생성할 수 있다. 그러나 이렇게 결정된 구속조건은 몸체의 pitch 각(q_3)이 0이 아닌 경우 대응되는 토크의 값의 차이가 커지게 되므로 적절하다고 볼 수 없다. 따라서 본 연구에서는 등식구속조건(equality constraints)을 갖는 파라미터 최적화기법⁽¹³⁾을 사용하여 토크를 결정하는 방법을 취하였다. 이 방법은 사각보행기의 운동(각 조인트의 위치, 속도, 가속도)이 결정된 7개의 운동방정식을 선형의 등식구속조건(equality constraint)으로 하고, 각 토크의 제공의 합 혹은 절대값의 합을 최소화하는 토크를 구하는 문제로 귀착된다. 최적 토크를 구하기 위한 목적함수 J 는 매 샘플링시간 마다의 에너지를 최소화하는 목적으로 다음과 같이 두 가지로 설정된다.

$$J = T_1^2 + T_2^2 + \dots + T_8^2 \quad (19)$$

$$J = |J_1| + |J_2| + \dots + |J_8| \quad (20)$$

식 (18)의 역동역학 방정식을 등식구속조건으로 표현하면 다음과 같다.

$$[a]^T \{T\} - \{f'\} - [a]\{\dot{u}\} = 0 \quad (21)$$

식 (19), (20)의 목적함수를 최소화하기 위하여 결정된 토크는 각각 Figs. 9, 10와 같다.

Fig. 9에서의 토크 범위가 Fig. 10에서의 범위보다 좁게 나타났다. 모터의 최대토크 범위가 한정되어 있으므로 토크의 리던던시를 이용하여 작용토크 절대값의 최대치가 적은 식 (19)의 목적함수를 이용한 결과(Fig. 9)가 식 (20)의 경우보다 바람직하다고 볼 수 있다. 여기서, 정의한 성능지수 식

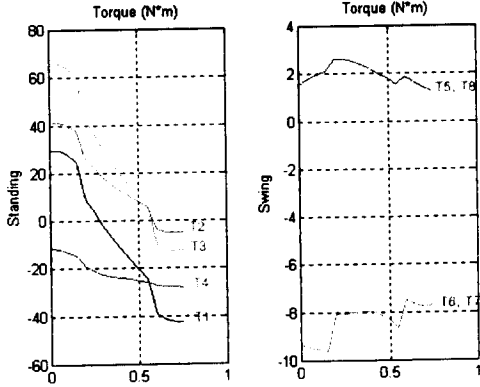


Fig. 9 Torque result from the object function (19)

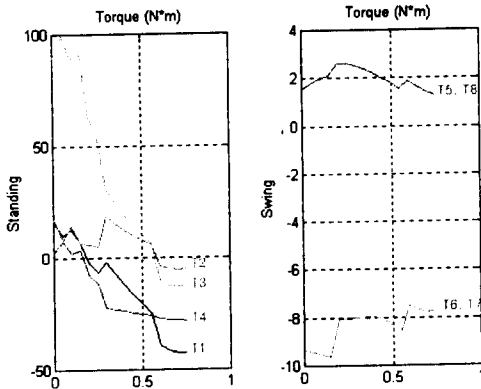


Fig. 10 Torque result from the object function (20)

(19)가 이차함수(quadratic function) 형태이므로 동식 구속조건들이 상호독립인 경우 초기값에 관계 없이 수렴이 가능하며, 최적의 해를 구할 수 있다.

5. 동역학 시뮬레이션

토크해석과정에서 계산된 조인트토크값을 검증하고 입력토크에 대한 보행로봇의 운동을 검사하기 위해서 동역학 시뮬레이션(dynamic simulation)을 수행하였다. 운동방정식 (16)에서 기술된 7개의 2차상 미분방정식을 14개의 1차상 미분방정식으로 변환하여 4차 룽게-쿠타방법을 이용하여 적분하였다. 시뮬레이션에서 얻어진 실제궤적(actual trajectory)과 명령 궤적(desired trajectory) 비교는 Figs. 11, 12, 13, 14와 같다. 그림에서 'a'는 실제 궤적, 그림에서 'd'는 명령궤적을 나타낸다. 이 결과는 토크샘플링시간 0.005초, 적분단위시간 0.005

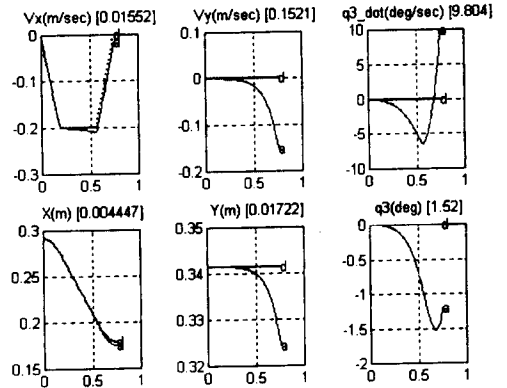


Fig. 11 X, Y and Pitch trajectory of body ([] : error)

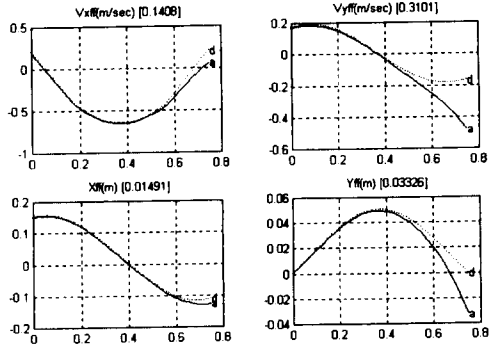


Fig. 12 Velocity and position of the front swing foot in X, Y-direction ([] : error)

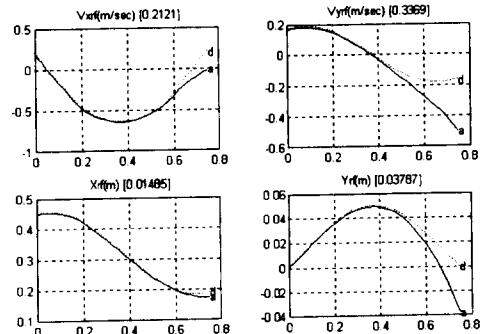


Fig. 13 Velocity and position of the rear swing foot in X, Y-direction ([] : error)

초인 경우에 대한 것이며, 각 그래프마다 최대적분 오차를 표시하였다. 시스템의 동역학 모델의 불확실성(uncertainty)이나 외란(disturbance)을 고려하지 않더라도 입력토크가 샘플링정도에 의해 이산적(discrete)으로 명령되므로 시뮬레이션에서 명령

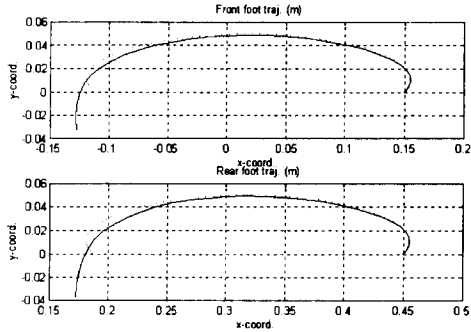


Fig. 14 Trajectories of two swing feet in X-Y plane

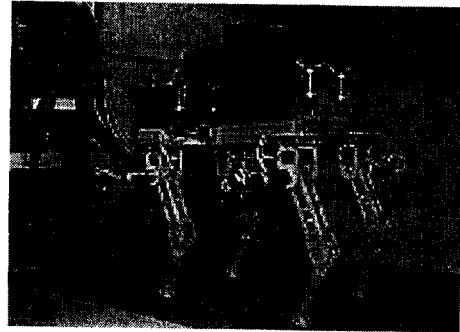


Fig. 16 Quadrupedal walking robot (Centaur) developed in KIST

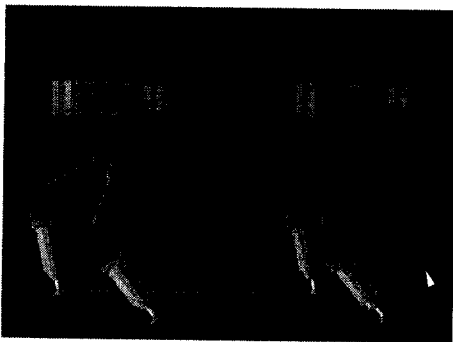


Fig. 15 Graphic simulation of trot gait motion

본 연구에서 유도된 운동방정식은 사각보행로봇의 동적걸음새제어를 위한 토크계산제어방식 (computed torque control method)의 동적모델로 이용되며, 또한 동적걸음새의 안전성을 보장하기 위한 동적안정도 계산에도 유용하게 적용된다. 유도된 운동방정식을 이용하는 동적제어를 위한 토크계산제어방식 중에서, 역동역학 식에서 결정되는 토크를 오프라인으로 계산하여 앞먹임하는 토크 앞먹임제어 (feedforward torque control) 방식⁽¹⁴⁾이 복잡한 동역학을 이용하는 서보제어기의 샘플링 정도를 향상시키는 데 효과적이다.

치와 실제치간에 오차가 발생한다.

Fig. 15는 위의 시뮬레이션 결과를 그래픽환경으로 변환하여 걸음새의 동적운동을 보여준다.

6. 결 론

한국과학기술연구원(KIST)에서 진행중인 휴먼로봇 과제의 일환으로 수행된 본 연구에서는 네다리를 갖는 보행로봇 Centaur (Fig. 16)의 동적걸음새를 구현하기 위한 동역학 모델을 생성하였다. 걸음새는 에너지소비량의 관점에서 효율적인 트롯걸음새를 채택하였다. 트롯걸음새에 대한 기구학적 특성을 파악하고, 7자유도 운동방정식을 Kane동역학 이론을 이용하여 해석적으로 유도하였다. 트롯걸음새를 갖는 4각 보행로봇의 경우 토크해석에서 발생하는 리던던시 문제를 최적화기법을 적용하여 해결하였다. 또한 운동방정식을 이용하여 조인트토크를 입력으로 하는 개루프 시뮬레이션 (open-loop simulation)을 수행함으로써 입력토크의 샘플링 정도에 따른 오차를 검사하였다.

참고문헌

- (1) Kimura, H., Shimoyama, I. and Miura, H., 1990, "Dynamics in the Dynamic Walk of a Quadruped Robot," *Advanced Robotics*, Vol. 4, No. 3, pp. 283~301.
- (2) Nakamura, T., Koyachi, N. and Adachi, H., 1991, "Simulation Technology for Evaluation of Walking Robots," *Proc. International Symposium of Advanced Robot Technology*, pp. 417~424.
- (3) Villard, C., Gorce, P. and Fontaine, J. G., 1993, "Study of Dynamic behavior of PALPHY," *Proc. International Conf. on Intelligent Robots and Systems*, pp. 1765~1770.
- (4) Shih, L., Frank, A. A. and Ravani, B., 1987, "Dynamic Simulation of Legged Machines Using Compliant Joint Model," *The International Journal of Robotics Research*, Vol. 6, No. 4, pp. 33~46.

- (5) 서영진, 윤용산, 1995, "사각 보행로봇의 동적 결속세 설계와 시뮬레이션을 위한 알고리즘의 개발," 대기기계학회논문집, 제16권, 제11호, pp. 2721~2735.
- (6) Haug, E. J., Wu, S. C. and Yang, S. M., 1986, "Dynamics of Mechanical Systems with Coulomb Friction, Stiction, Impact and Constraint Addition-Deletion- I," *Mechanism and Machine theory*, Vol. 21, No. 5, pp. 401~406.
- (7) Kane, T. R. and Levinson, D., A., 1980, "Formulation of Equation of Motion for Complex Spacraft," *Journal of Guidance and Control*, Vol. 3, No. 3, No. 2, pp. 99~112.
- (8) 홍예선, 이순걸, 황동환, 1995, "비평탄 노면 위에서의 보행을 위한 로봇용 발의 설계와 실험," 한국자동제어학술회의, pp. 875~878.
- (9) Sakakibara, Y., Hosoda, Y., Kan, K., Hattori, M., Fujie, M. and Sugiyama, S., 1991, "Quadrupedal Walking Mechanism and Its Intelligent Control," *Proc. International Symposium of Advanced Robot Technology*, pp. 389~396.
- (10) Kane, T. R. and Levinson, D. A., 1985, *Dynamics*, McGraw-Hill, pp. 45~50.
- (11) Levinson, D., A., 1994, *AutoLev 3.0 manual*, OnLine Dynamics, Inc.
- (12) 이종원, 김문상, 홍예선 외 다수, 1995, "휴먼 로봇 시스템 개발 연차 보고서," 한국과학기술원.
- (13) Bryson, Jr. A. E. and Ho, Yu-Chi, 1975, *Applied optimal control*, pp. 2~18.
- (14) Liegeois, A., Fournier, A. and Aldon, M., 1980, "Model-reference Control of High Velocity Industrial Robots," *Proc. The Joint Automatic Control Conference*, San Francisco, pp. 584~590.

부 록

1. 시각보행기의 기구학, 동역학 파라미터

Table 3 Kinematic and dynamic parameters of quadrupedal robot

	Mass (kg)	Length (m)	Mass moment of inertia (kg*m ²)
Body	10.36	0.8	1.5125
Upper link of leg	1.77	0.170	0.0110
Lower link of leg	0.859	0.170	0.0096

2. 일반작용력과 일반관성력

2.1 일반작용력 (generalized active forces)

$$F_i = \vec{F}_A \cdot \vec{v}_i^* + \vec{F}_B \cdot \vec{v}_i^* + \dots + \vec{F}_I \cdot \vec{v}_i^* + \vec{T}_A \cdot \vec{\omega}_i^* + \vec{T}_B \cdot \vec{\omega}_i^* + \dots + \vec{T}_I \cdot \vec{\omega}_i^* \quad i=1, 2, \dots, 7$$

$$F_1 = -m_A g d_1 a_{11} c_1 + m_B g \tilde{d}_2 a_{21} c_2 + m_D g \tilde{d}_4 a_{41} c_4 - m_E g d_5 a_{51} c_5 - m_F g d_1 a_{51} c_6 + m_C g \tilde{d}_2 a_{71} c_7 + m_H g \tilde{d}_4 a_{81} c_8 - m_I g d_5 a_{91} c_9$$

$$+ T_1 a_{11} + (T_2 - T_1) a_{21} + (-T_4 - T_2) a_{31} + (-T_5 + T_4) a_{41} + T_5 a_{51} + T_6 a_{61} + (T_7 - T_6) a_{71} + (-T_8 - T_7) a_{71} + (-T_9 + T_8) a_{81} + T_9 a_{91}$$

$$F_2 = -m_A g d_1 a_{12} c_1 - m_B g + m_B g \tilde{d}_2 a_{22} c_2 - m_C g - m_D g + m_D g \tilde{d}_4 a_{42} c_4 - m_E g d_5 a_{52} c_5 - m_C g a_{52} d_1 c_6 - m_C g (1 - \tilde{d}_2 a_{72} c_7) - m_H g (1 - \tilde{d}_4 a_{82} c_8) - m_I g d_1 a_{92} c_9 + T_1 a_{12} + (T_2 - T_1) a_{22} + (-T_4 - T_2) a_{32} + (-T_5 + T_4) a_{42} + T_5 a_{52} + T_6 a_{62} + (T_7 - T_6) a_{72} + (-T_8 - T_7) a_{72} + (-T_9 + T_8) a_{82} + T_9 a_{92}$$

$$\begin{aligned}
 F_3 = & -m_A g d_1 a_{13} c_1 \\
 & -m_B g d_3 c_3 + m_B g \tilde{d}_2 a_{23} c_2 \\
 & -m_D g \tilde{d}_3 c_3 + m_D g \tilde{d}_4 a_{43} c_4 \\
 & -m_E g d_5 a_{53} c_5 \\
 & -m_F g a_{63} d_1 c_6 \\
 & -m_C g (d_3 c_3 + \tilde{d}_2 a_{73} c_7) \\
 & -m_H g (d_3 c_3 - \tilde{d}_4 a_{83} c_8) \\
 & -m_I g d_5 a_{93} c_9 \\
 & + T_1 a_{13} + (T_2 - T_1) a_{23} + (-T_4 - T_2) a_{33} + (-T_5 + T_4) a_{43} + T_5 a_{53} \\
 & + T_6 a_{63} + (T_7 - T_6) a_{73} + (-T_8 - T_7) a_{83} + (-T_9 + T_8) a_{93} + T_9 a_{93}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_4 = & -m_F g d_1 a_{63} c_6 \\
 & + m_C g \tilde{d}_2 a_{74} c_7 \\
 & + T_6 a_{64} + (T_7 - T_6) a_{74}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_5 = & -m_F g (1 + d_1 a_{65} c_6) \\
 & + m_C g \tilde{d}_2 a_{75} c_7 \\
 & + T_6 a_{65} + (T_7 - T_6) a_{75}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_6 = & +m_H g \tilde{d}_4 a_{86} c_6 \\
 & -m_I g d_5 a_{96} c_9 \\
 & + (-T_9 + T_8) a_{86} + T_9 a_{96}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_7 = & +m_H g \tilde{d}_4 a_{87} c_8 \\
 & -m_I g (d_5 a_{97} c_9 + 1) \\
 & + (-T_9 + T_8) a_{87} + T_9 a_{97}
 \end{aligned}$$

2.2 일반관성력 (Generalized inertia forces)

$$\begin{aligned}
 F_i^* = & \vec{R}_A^* \cdot \vec{v}_i^{*a} + \vec{R}_B^* \cdot \vec{v}_i^{*b} + \dots + \vec{R}_I^* \cdot \vec{v}_i^{*i} + \vec{T}_A^* \cdot \vec{\omega}_i^a \\
 & + \vec{T}_A^* \cdot \vec{\omega}_i^a + \vec{T}_B^* \cdot \vec{\omega}_i^b + \dots + \vec{T}_I^* \cdot \vec{\omega}_i^i \\
 & i = 1, 2, \dots, 7
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_1^* = & -m_A d_1^2 a_{11} (a_{11} \dot{u}_1 + a_{12} \dot{u}_2 + a_{13} \dot{u}_3 + \gamma_1) \\
 & -m_B [\dot{u}_1 - d_3 \dot{u}_3 (-s_3) + d_3 u_3^2 (c_3) \\
 & -\tilde{d}_2 (a_{21} \dot{u}_1 + a_{22} \dot{u}_2 + a_{23} \dot{u}_3 + \gamma_2) (-s_2) + \tilde{d}_2 \dot{q}_2^2 (c_2) \\
 & -\tilde{d}_2 a_{21} \{ \dot{u}_1 (-s_2) + \dot{u}_2 (c_2) - d_3 \dot{u}_3 (c_{22}) + d_3 u_3^2 (s_{32}) \\
 & -\tilde{d}_1 (a_{21} \dot{u}_2 + a_{23} \dot{u}_3 + \gamma_2) \}] \\
 & -m_C \dot{u}_1 \\
 & -m_D [\dot{u}_1 - \tilde{d}_3 \dot{u}_3 (-s_3) - \tilde{d}_3^2 (c_3) \\
 & -\tilde{d}_4 (a_{41} \dot{u}_1 + a_{42} \dot{u}_2 + a_{43} \dot{u}_3 + \gamma_3) (-s_4) + \tilde{d}_4 \dot{q}_4^2 (c_4) \\
 & -\tilde{d}_4 a_{41} \{ \dot{u}_1 (-s_4) + \dot{u}_2 (c_4) + \tilde{d}_3 \dot{u}_3 (c_{43}) - \tilde{d}_3 u_3^2 (-s_{43})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\tilde{d}_4 (a_{41} \dot{u}_1 + a_{42} \dot{u}_2 + a_{43} \dot{u}_3 + \gamma_3) \}] \\
 & -m_E d_5^2 a_{51} (a_{51} \dot{u}_1 + a_{52} \dot{u}_2 + a_{53} \dot{u}_3 + \gamma_4) \\
 & -m_F d_1 a_{61} (\dot{u}_4 (-s_4) + \dot{u}_5 c_6 + \dot{q}_6 d_1) \\
 & -m_C [\dot{u}_1 - d_3 \dot{u}_3 (-s_3) + d_3 u_3^2 (c_3) - \tilde{d}_2 \dot{q}_7 (-s_7) + \tilde{d}_2 \dot{q}_7^2 c_7 \\
 & -d_2 a_{71} \{ \dot{u}_1 (-c_7) + \dot{u}_2 c_7 - d_3 \dot{u}_3 c_{73} - d_3 u_3^2 (-s_{73}) + (-\tilde{d}_2 \dot{q}_7) \}] \\
 & -m_H [\dot{u}_1 + \tilde{d}_3 \dot{u}_3 (-s_8) + \dot{u}_2 (c_8) + \tilde{d}_3 \dot{u}_3 c_{83} - \tilde{d}_3 u_3^2 (-s_{83}) - \tilde{d}_2 \dot{q}_8] \\
 & -m_I d_5 a_{91} (\dot{u}_6 (-s_9) + \dot{u}_7 (c_9) + d_1 \dot{q}_9) \\
 & -I_A a_{11} (a_{11} \dot{u}_1 + a_{12} \dot{u}_2 + a_{13} \dot{u}_3 + \gamma_1) \\
 & -I_B a_{11} (a_{21} \dot{u}_1 + a_{22} \dot{u}_2 + a_{23} \dot{u}_3 + \gamma_2) \\
 & -I_D a_{41} (a_{41} \dot{u}_1 + a_{42} \dot{u}_2 + a_{43} \dot{u}_3 + \gamma_4) \\
 & -I_E a_{51} (a_{51} \dot{u}_1 + a_{52} \dot{u}_2 + a_{53} \dot{u}_3 + \gamma_5) \\
 & -I_F a_{61} (a_{61} \dot{u}_1 + a_{62} \dot{u}_2 + a_{63} \dot{u}_3 + a_{64} \dot{u}_4 + a_{65} \dot{u}_5 + \gamma_6) \\
 & -I_C a_{71} (a_{71} \dot{u}_1 + a_{72} \dot{u}_2 + a_{73} \dot{u}_3 + a_{74} \dot{u}_4 + a_{75} \dot{u}_5 + \gamma_7) \\
 & -I_H a_{81} (a_{81} \dot{u}_1 + a_{82} \dot{u}_2 + a_{83} \dot{u}_3 + a_{84} \dot{u}_4 + a_{85} \dot{u}_5 + \gamma_8) \\
 & -I_I a_{91} (a_{91} \dot{u}_1 + a_{92} \dot{u}_2 + a_{93} \dot{u}_3 + a_{94} \dot{u}_4 + a_{95} \dot{u}_5 + \gamma_9)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_2^* = & -m_A d_1^2 a_{12} (a_{11} \dot{u}_1 + a_{12} \dot{u}_2 + a_{13} \dot{u}_3 + \gamma_1) \\
 & -m_B [\dot{u}_2 - d_3 \dot{u}_3 (c_3) + d_3 u_3^2 (s_3) \\
 & -\tilde{d}_2 (a_{21} \dot{u}_1 + a_{22} \dot{u}_2 + a_{23} \dot{u}_3 + \gamma_2) (c_2) + \tilde{d}_2 \dot{q}_2^2 (s_2) \\
 & -\tilde{d}_2 a_{22} \{ \dot{u}_1 (-s_2) + \dot{u}_2 c_2 - d_3 \dot{u}_3 c_{32} + d_3 u_3^2 s_{32} \\
 & -\tilde{d}_2 (a_{21} \dot{u}_1 + a_{22} \dot{u}_2 + a_{23} \dot{u}_3 c_{32} + d_3 u_3^2 s_{32} \\
 & -m_C \dot{u}_2 \\
 & -m_D [\dot{u}_2 + \tilde{d}_3 \dot{u}_3 (c_3) - \tilde{d}_3 u_3^2 (s_3) \\
 & -\tilde{d}_4 (a_{41} \dot{u}_1 + a_{42} \dot{u}_2 + a_{43} \dot{u}_3 + \gamma_3) (c_4) + \tilde{d}_4 \dot{q}_4^2 s_4 \\
 & -\tilde{d}_4 a_{42} \{ \dot{u}_1 (-s_4) + \dot{u}_2 c_4 + \tilde{d}_3 \dot{u}_3 c_{43} - \tilde{d}_3 u_3^2 (-s_{43}) \\
 & -\tilde{d}_4 (a_{41} \dot{u}_1 + a_{42} \dot{u}_2 + a_{43} \dot{u}_3 + \gamma_3) \}] \\
 & -m_E d_5^2 a_{51} (a_{51} \dot{u}_1 + a_{52} \dot{u}_2 + a_{53} \dot{u}_3 + \gamma_4) \\
 & -m_F a_{62} d_1 (\dot{u}_4 (-s_6) + \dot{u}_5 c_6 + \dot{q}_6 d_1) \\
 & -m_C [\dot{u}_2 - d_3 \dot{u}_3 s_3 + d_3 u_3^2 s_3 - \tilde{d}_2 \dot{q}_7 c_7 + \tilde{d}_2 \dot{q}_7^2 s_7 \\
 & -\tilde{d}_2 a_{72} \{ \dot{u}_1 (-s_7) + \dot{u}_2 c_7 - d_3 \dot{u}_3 c_{73} - d_3 u_3^2 (-s_{73}) - \tilde{d}_2 \dot{q}_7 \}] \\
 & -m_H [\dot{u}_2 + \tilde{d}_3 \dot{u}_3 c_3 - \tilde{d}_3 \dot{u}_3 s_3 - \tilde{d}_2 \dot{q}_8 c_8 + \tilde{d}_2 \dot{q}_8^2 s_8) \\
 & -\tilde{d}_4 a_{82} \{ \dot{u}_1 (-s_8) + \dot{u}_2 c_8 + \tilde{d}_3 \dot{u}_3 c_{83} - \tilde{d}_3 \dot{u}_3 c_{83} \\
 & -\tilde{d}_3 u_3^2 (-s_{83}) - \tilde{d}_2 \dot{q}_8 \}] \\
 & -m_I d_5 a_{92} (\dot{u}_6 (-s_9) + \dot{u}_7 (c_9) + d_5 \dot{q}_9) \\
 & -I_A a_{12} (a_{11} \dot{u}_1 + a_{12} \dot{u}_2 + a_{13} \dot{u}_3 + \gamma_1) \\
 & -I_B a_{22} (a_{21} \dot{u}_1 + a_{22} \dot{u}_2 + a_{23} \dot{u}_3 + \gamma_2) \\
 & -I_D a_{42} (a_{41} \dot{u}_1 + a_{42} \dot{u}_2 + a_{43} \dot{u}_3 + \gamma_4) \\
 & -I_E a_{52} (a_{51} \dot{u}_1 + a_{52} \dot{u}_2 + a_{53} \dot{u}_3 + \gamma_5) \\
 & -I_F a_{62} (a_{61} \dot{u}_1 + a_{62} \dot{u}_2 + a_{63} \dot{u}_3 + a_{64} \dot{u}_4 + a_{65} \dot{u}_5 + \gamma_6) \\
 & -I_C a_{72} (a_{71} \dot{u}_1 + a_{72} \dot{u}_2 + a_{73} \dot{u}_3 + a_{74} \dot{u}_4 + a_{75} \dot{u}_5 + \gamma_7) \\
 & -I_H a_{82} (a_{81} \dot{u}_1 + a_{82} \dot{u}_2 + a_{83} \dot{u}_3 + a_{84} \dot{u}_4 + a_{85} \dot{u}_5 + \gamma_8) \\
 & -I_I a_{92} (a_{91} \dot{u}_1 + a_{92} \dot{u}_2 + a_{93} \dot{u}_3 + a_{94} \dot{u}_4 + a_{95} \dot{u}_5 + \gamma_9)
 \end{aligned}$$

$$F_3^* =$$

$$\begin{aligned}
& -m_A d_1 \alpha_{13} (a_{11} \dot{u}_1 + a_{12} \dot{u}_2 + a_{13} \dot{u}_3 + \gamma_1) \\
& -m_B [(-d_3) \{ \dot{u}_1 (-s_3) + \dot{u}_2 c_3 - d_3 \dot{u}_3 \\
& - \tilde{d}_2 (a_{21} \dot{u}_1 + a_{22} \dot{u}_2 + a_{23} \dot{u}_3 + \gamma_2) (c_{32}) + \tilde{d}_2 \dot{q}_2^2 (-s_{32}) \} \\
& - \tilde{d}_2 a_{23} \{ \dot{u}_1 (-s_2) + \dot{u}_2 c_2 - d_3 \dot{u}_3 c_{32} + d_3 u_3^2 s_{32} \\
& - \tilde{d}_2 (a_{21} \dot{u}_1 + a_{22} \dot{u}_2 + a_{23} \dot{u}_3 + \gamma_2) \}] \\
& -m_D [\tilde{d}_3 \{ \dot{u}_1 (-s_3) + \dot{u}_2 (c_3) + \tilde{d}_3 \dot{u}_3 \\
& - \tilde{d}_4 (a_{41} \dot{u}_1 + a_{42} \dot{u}_2 + a_{43} \dot{u}_3 + \gamma_2) (c_{43}) + \tilde{d}_4 \dot{q}_4^2 s_{43} \} \\
& - \tilde{d}_4 a_{43} \{ \dot{u}_1 (-s_4) + \dot{u}_2 c_4 + d_3 \dot{u}_3 c_{43} - d_3 u_3^2 (-s_{43}) \\
& - \tilde{d}_4 (a_{41} \dot{u}_1 + a_{42} \dot{u}_2 + a_{43} \dot{u}_3 + \gamma_3) \}] \\
& -m_E d_5^2 \alpha_{53} (a_{51} \dot{u}_1 + a_{52} \dot{u}_2 + a_{53} \dot{u}_3 + \gamma_4) \\
& -m_F \alpha_{63} d_1 (\dot{u}_4 (-s_6) + \dot{u}_5 c_6 + \dot{q}_6 d_1) \\
& +m_G [d_3 \{ \dot{u}_1 (-s_3) + \dot{u}_2 c_3 - d_3 \dot{u}_3 - \tilde{d}_2 \dot{q}_7 c_{73} + \tilde{d}_2 \dot{q}_7^2 s_{73} \} \\
& + \tilde{d}_2 \alpha_{73} \{ \dot{u}_1 (-s_7) + \dot{u}_2 c_3 - d_3 \dot{u}_3 c_{73} + d_3 u_3^2 (-s_{73}) - \tilde{d}_2 \dot{q}_7 \}] \\
& +m_H [d_5 \{ \dot{u}_1 (-s_5) + \dot{u}_2 c_5 - d_3 \dot{u}_3 c_{53} - \tilde{d}_4 \dot{q}_8 c_{83} + \tilde{d}_4 \dot{q}_8 s_{83} \} \\
& + \tilde{d}_4 \alpha_{83} \{ \dot{u}_1 (-s_8) + \dot{u}_2 c_8 + \tilde{d}_3 \dot{u}_3 c_{83} - \tilde{d}_3 u_3^2 (-s_{83}) - \tilde{d}_2 \dot{q}_8 \}] \\
& -m_I d_5 \alpha_{93} (\dot{u}_6 (-s_9) + \dot{u}_7 (c_9) + d_1 \dot{q}_9) \\
& -I_A \alpha_{13} (a_{11} \dot{u}_1 + a_{12} \dot{u}_2 + a_{13} \dot{u}_3 + \gamma_1) \\
& -I_B \alpha_{23} (a_{21} \dot{u}_1 + a_{22} \dot{u}_2 + a_{23} \dot{u}_3 + \gamma_2) \\
& -I_C \dot{u}_3 \\
& -I_D \alpha_{43} (a_{41} \dot{u}_1 + a_{42} \dot{u}_2 + a_{43} \dot{u}_3 + \gamma_4) \\
& -I_E \alpha_{53} (a_{51} \dot{u}_1 + a_{52} \dot{u}_2 + a_{53} \dot{u}_3 + \gamma_5) \\
& -I_F \alpha_{63} (a_{61} \dot{u}_1 + a_{62} \dot{u}_2 + a_{63} \dot{u}_3 + a_{64} \dot{u}_4 + a_{65} \dot{u}_5 + \gamma_6) \\
& -I_G \alpha_{73} (a_{71} \dot{u}_1 + a_{72} \dot{u}_2 + a_{73} \dot{u}_3 + a_{74} \dot{u}_4 + a_{75} \dot{u}_5 + \gamma_7) \\
& -I_H \alpha_{83} (a_{81} \dot{u}_1 + a_{82} \dot{u}_2 + a_{83} \dot{u}_3 + a_{84} \dot{u}_4 + a_{85} \dot{u}_5 + \gamma_8)
\end{aligned}$$

$$-I_I \alpha_{93} (a_{91} \dot{u}_1 + a_{92} \dot{u}_2 + a_{93} \dot{u}_3 + a_{94} \dot{u}_4 + a_{95} \dot{u}_5 + \gamma_9)$$

 $F_4^* =$

$$\begin{aligned}
& -m_F (\dot{u}_4 + \dot{q}_6 d_1 (-s_6) - d_1 \dot{q}_6^2 c_6) + d_1 \alpha_{64} (\dot{u}_4 (-s_6) + \dot{u}_5 c_6 + \dot{q}_6 d_1) \\
& +m_G \tilde{d}_2 \alpha_{74} (\dot{u}_1 (-s_7) + \dot{u}_2 c_7 - d_3 \dot{u}_3 c_{73} + d_3 u_3^2 (-s_{73}) - \tilde{d}_2 \dot{q}_7) \\
& -I_F \alpha_{64} (a_{61} \dot{u}_1 + a_{62} \dot{u}_2 + a_{63} \dot{u}_3 + a_{64} \dot{u}_4 + a_{65} \dot{u}_5 + \gamma_6) \\
& -I_G \alpha_{74} (a_{71} \dot{u}_1 + a_{72} \dot{u}_2 + a_{73} \dot{u}_3 + a_{74} \dot{u}_4 + a_{75} \dot{u}_5 + \gamma_7)
\end{aligned}$$

 $F_5^* =$

$$\begin{aligned}
& -m_F (\dot{u}_5 + \dot{q}_6 d_1 c_6 - d_1 \dot{q}_6^2 s_6) + d_1 \alpha_{65} (\dot{u}_4 (-s_6) + \dot{u}_5 c_6 + \dot{q}_6 d_1) \\
& +m_G \tilde{d}_2 \alpha_{75} (\dot{u}_1 (-s_7) + \dot{u}_2 c_7 - d_3 \dot{u}_3 c_{73} + d_3 u_3^2 (-s_{73}) - \tilde{d}_2 \dot{q}_7) \\
& -I_F \alpha_{65} (a_{61} \dot{u}_1 + a_{62} \dot{u}_2 + a_{63} \dot{u}_3 + a_{64} \dot{u}_4 + a_{65} \dot{u}_5 + \gamma_6) \\
& -I_G \alpha_{75} (a_{71} \dot{u}_1 + a_{72} \dot{u}_2 + a_{73} \dot{u}_3 + a_{74} \dot{u}_4 + a_{75} \dot{u}_5 + \gamma_7)
\end{aligned}$$

 $F_6^* =$

$$\begin{aligned}
& m_H \tilde{d}_4 \alpha_{86} (\dot{u}_1 (-s_8) + \dot{u}_2 c_8 + \tilde{d}_3 \dot{u}_3 c_{83} - \tilde{d}_3 u_3^2 (-s_{83}) - \tilde{d}_2 \dot{q}_8) \\
& -m_I \{ \dot{u}_6 + d_1 \dot{q}_9 (-s_9) + (-d_6 \dot{q}_9^2) c_9 + d_5 \alpha_{96} (\dot{u}_6 (-s_9) \\
& + \dot{u}_7 c_9 + d_1 \dot{q}_9) \} \\
& -I_H \alpha_{86} (a_{81} \dot{u}_1 + a_{82} \dot{u}_2 + a_{83} \dot{u}_3 + a_{86} \dot{u}_6 + a_{87} \dot{u}_7 + \gamma_8) \\
& -I_I \alpha_{96} (a_{91} \dot{u}_1 + a_{92} \dot{u}_2 + a_{93} \dot{u}_3 + a_{96} \dot{u}_6 + a_{97} \dot{u}_7 + \gamma_9)
\end{aligned}$$

 $F_7^* =$

$$\begin{aligned}
& m_H \tilde{d}_4 \alpha_{87} (\dot{u}_1 (-s_8) + \dot{u}_2 c_8 + \tilde{d}_3 \dot{u}_3 c_{83} - \tilde{d}_3 u_3^2 (-s_{83}) - \tilde{d}_2 \dot{q}_8) \\
& -m_I \{ \dot{u}_7 + d_1 \dot{q}_9 c_9 - d_1 \dot{q}_9^2 s_9 + d_5 \alpha_{97} (\dot{u}_6 (-s_9) + \dot{u}_7 c_9 + d_1 \dot{q}_9) \} \\
& -I_H \alpha_{87} (a_{81} \dot{u}_1 + a_{82} \dot{u}_2 + a_{83} \dot{u}_3 + a_{86} \dot{u}_6 + a_{87} \dot{u}_7 + \gamma_8) \\
& -I_I \alpha_{97} (a_{91} \dot{u}_1 + a_{92} \dot{u}_2 + a_{93} \dot{u}_3 + a_{96} \dot{u}_6 + a_{97} \dot{u}_7 + \gamma_9)
\end{aligned}$$