

< 논 문 >

직교이방성 재료의 구멍주위에 관한 하이브리드 응력해석시 요소크기의 효과

백 태 현*

(1997년 4월 9일 접수)

Effect of Element Size in Hybrid Stress Analysis Around a Hole in Loaded Orthotropic Composites

Tae Hyun Baek

Key Words : Stress Analysis(응력해석), Orthotropic Composites(직교이방성 재료), Mechanics in Composite Materials(복합재료역학), Hybrid Numerical Analysis(하이브리드 수치 해석), Hybrid Region(하이브리드 영역), Conformal Mapping(등각사상 맵핑), Complex Stress Function(복소수 응력함수), Hybrid Finite Element Method(하이브리드 유한요소법), Moire-Numerical Hybrid Method(무아레-수치 하이브리드기법)

Abstract

A numerical study for the number of terms of a power series stress function and the effect of hybrid element size on stress analysis around a hole in loaded orthotropic composites is presented. The hybrid method coupling experimental and/or theoretical inputs and complex variable formulations involving conformal mappings and analytical continuity is used to calculate tangential stress on the boundary of the hole in uniaxially loaded, finite width glass epoxy tensile plate. The tests are done by varying the number of terms, element size and nodal locations on the external boundary of the hybrid region. The numerical results indicate that the hybrid method is accurate and powerful in both experimental and numerical stress analysis.

1. 서 론

최근 과학문명의 급속한 발달로 다양한 재료가 개발되어, 현대 산업에 이용되고 있다. 이들 재료 중, 복합재료(composite material)는 인위적으로 필요한 특성을 조합하여 제조할 수 있기 때문에 등방성 재료(isotropic material)보다 여러가지 장점들을 보유할 수 있다. 예를 들면, 대부분의 섬유강

화 복합재료(fiber-reinforced composite)는 기존의 금속재료를 보다 높은 비강성(modulus/density), 비강도(strength/density)와 우수한 감쇠(high damping) 및 열적특성(thermal characteristic)을 가지고 있다. 또한, 섬유강화 복합재료는 피로(fatigue) 특성을 우수하게 제조할 수 있기 때문에, 동적 또는 열-충격하중을 많이 받는 우주항공재료나 자동차의 재료로 많이 적용되고 있다. 등방성 재료인 금속 또는 비금속재료는 모든 방향으로 특성이 동일하나, 복합재료는 이방성물질(anisotropic material)이므로 섬유방향에 따라 특성이 변화된다. 따라서,

*회원, 군산대학교 기계공학부

복합재료는 등방성 재료보다 훨씬 변수가 많으므로 설계시 이들을 모두 고려해야 하는 복잡성을 내포하고 있다.

복합재료는 여러가지 형태로 각종 구조물에 이용될 수 있으나 판재의 형태로 가장 많이 사용되고 있다. 이러한 복합판재는 다른 구조물과 체결시키기 위하여, 또는 다른 목적으로 각종 형태의 구멍이 있는 경우가 많다. 이 경우, 복합판재 구멍주위의 응력해석은 재료의 이방성(anisotropic)적인 특성때문에 등방성 재료의 해석보다는 훨씬 난이한 경우가 대부분이다. 따라서, 복합재료에 관하여 많은 연구가 수행되어 왔으며, 이에 대한 결과가 여러 문헌에 체계적으로 정리되어 있다.⁽¹⁻⁴⁾

이들 중 Lekhnitskii⁽³⁾와 Savin⁽⁴⁾은 복소수 응력함수(complex stress function)를 이용하여 경계조건이 단순한 이방성 재료의 여러 형상 구멍주위에 관한 응력분포의 이론해를 구하였으며, Gerhardt⁽⁵⁾는 하이브리드요소해에 관한 이론^(6,7)을 유한요소(hybrid finite element analysis)기법에 적용하여 복합재의 구멍 또는 필렛주위의 응력을 해석하였다. 일반적인 수치해석기법에서는 응력집중 부근을 미세한 여러 개의 요소로 분할하여야 수렴된 해를 얻을 수 있으나, 하이브리드 유한요소법은 구멍주위의 응력집중 부근을 단일 하이브리드요소로 간주하여 해석할 수 있는 장점이 있다. 이러한 편리성때문에, 무아레,^(8,9) 열탄성⁽¹⁰⁻¹²⁾ 및 광탄성⁽¹³⁾ 등의 실험데이터와 유한요소법⁽¹⁴⁾을 이용하여 하이브리드기법으로 해석한 여러 연구가 수행되어 왔다. 한편으로, 등방성 재료에 관하여 이와 유사한 기법을 유한요소에 적용한 연구결과⁽¹⁵⁾도 발표되었다. 그러나, 복합재에 관한 하이브리드 응력해석시 요소의 크기에 관한 여러 영향에 대해서는 아직도 연구가 미진한 편이다. 본 연구에서는 직교이방성 재료에 관하여, 급수형 응력함수의 항의 수(number of terms), 하이브리드영역의 크기 및 절점수(number of nodal points)의 변화에 따른 구멍주위의 접선응력(tangential stress)에 대한 영향에 대해서 정량적으로 분석하였다.

2. 이 론

2.1 기본 방정식

평면응력상태의 직교이방성 판재에서 주탄성축(principal directions of elasticity)에 대한 특성방

정식(characteristic equation)은 평형방정식(equilibrium equations)과 기하학적인 적합성(geometric compatibility)관계를 이용하여 다음의 식^(3, 4)과 같이 나타낼 수 있다.

$$S_{11}\mu^4 + (2S_{12} + S_{66})\mu^2 + S_{22} = 0 \quad (1)$$

위 식의 S_{ij} ($i, j=1, 2, 6$)는 일반적인 후크의 법칙(generalized Hook's law)에 관한 식으로부터탄성 컴플라이언스(elastic compliance)를 의미한다. 또한 μ_i ($i=1, 2$)는 재료에 관계되는 복소수 매개변수(complex material parameter)로서 식 (1)의 근을 의미하며, 다른 2개의 근과 $\mu_3 = \bar{\mu}_1$ 및 $\mu_4 = \bar{\mu}_2$ 의 관계를 갖는다. 강체운동을 무시할 경우, 2개의 복소수 응력함수 $\phi(z_1) = dF_1/dz_1$, $\phi(z_2) = dF_2/dz_2$, 그리고 $\phi'(z_1) = \phi'(\xi_1)/w_1'(\xi_1)$ 과 $\phi'(z_2) = \phi'(\xi_2)/w_2'(\xi_2)$ 의 관계를 이용하여 다음의 식 (2) 및 (3)과 같이 변위와 응력에 관한 식^(3, 4)을 구할 수 있다. 단, $F_1(z_1)$ 과 $F_2(z_2)$ 는 복소수 변수 $z_i = x + \mu_i y$ ($i=1, 2$)로 나타낼 수 있는 임의의 함수(arbitrary function)를 의미한다.

$$\begin{aligned} u &= 2Re[p_1\phi(\xi_1) + p_2\phi(\xi_2)] \\ v &= 2Re[q_1\phi(\xi_1) + q_2\phi(\xi_2)] \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 2Re\left[\mu_1^2 \frac{\phi'(\xi_1)}{\omega_1'(\xi_1)} + \mu_2^2 \frac{\phi'(\xi_2)}{\omega_2'(\xi_2)}\right] \\ \sigma_y &= 2Re\left[\frac{\phi'(\xi_1)}{\omega_1'(\xi_1)} + \frac{\phi'(\xi_2)}{\omega_2'(\xi_2)}\right] \\ \tau_{xy} &= 2Re\left[\mu_1 \frac{\phi'(\xi_1)}{\omega_1'(\xi_1)} + \mu_2 \frac{\phi'(\xi_2)}{\omega_2'(\xi_2)}\right] \end{aligned} \quad (3)$$

위의 식에서 p_i 및 q_i ($i=1, 2$)는 각각 다음과 같이 정의^(3,4)한다.

$$\begin{aligned} p_1 &= S_{11}\mu_1^2 + S_{12}, \quad p_2 = S_{11}\mu_2^2 + S_{12} \\ q_1 &= S_{12}\mu_1 + \frac{S_{12}}{\mu_1}, \quad q_2 = S_{12}\mu_2 + \frac{S_{22}}{\mu_2} \end{aligned} \quad (4)$$

위의 식 (3)에서 ω 의 역함수(inverse), 즉 ω^{-1} 는 물리적인 z -평면에서 ξ -평면($\xi_i = \xi + \mu_i \eta$, $i=1, 2$)으로 맵핑시킬 수 있는 함수를 뜻한다. 직교이방성 재료에서 Fig. 1과 같이 ξ -평면의 단위원이 z -평면의 타원형으로 맵핑되는 변환식⁽⁴⁾은

$$\begin{aligned} \omega_i(\xi_i) &= z_i \\ &= \frac{(a - i\mu_i b)\xi_i}{2} + \frac{(a + i\mu_i b)\xi_i^{-1}}{2} \end{aligned} \quad (5)$$

식 (5)에서 $i = \sqrt{-1}$ 이고, a 와 b 는 타원의 주반경

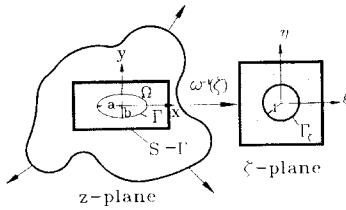


Fig. 1 Conformal mapping of holes in the physical z-plane into the ζ -plane

(major radius)과 소반경(minor radius)이다. 또한 역함수는

$$\zeta_l = \frac{z_l \pm \sqrt{z_l^2 - (a^2 + \mu^2 b^2)}}{a - i\mu b} \quad (6)$$

식 (6)에서 근호값(square root)의 부호는 $|\zeta_l| \geq 1$ ($l=1, 2$)이 되도록 선택한다. 직경이 d 인 원에서는 $a=b=d/2$ 이다.

임의의 부영역(subregion) Ω 에서 응력함수 $\phi(\zeta)$ 를 절단된 로랭급수(truncated Laurent expansion)⁽⁵⁾로 나타내면,

$$\phi(\zeta) = \sum_{k=-m}^m a_k \zeta^k \quad (k \neq 0) \quad (7)$$

한편으로, 구멍의 경계 Γ 에서 견인력이 없을 경우(traction free) 하이브리드영역(hybrid region) Ω 에서 $\phi(\zeta_2)$ 는

$$\begin{aligned} \phi(\zeta_2) &= B\phi\left(\frac{1}{\zeta_2}\right) + C\phi(\zeta_2) \\ &= \sum_{k=-m}^m (\overline{a_k} B \zeta_2^{-k} + a_k C \zeta_2^k) \end{aligned} \quad (8)$$

상수 $a_k = b_k + ic_k$ 이고, b_k 와 c_k 는 실수(real number)이며, m 은 양의 정수(positive integer)이다. 또한, B 와 C 는 식 (1)의 특성방정식의 근에 관계되는 상수로서 다음과 같다.

$$B = \frac{(\mu_2 - \mu_1)}{(\mu_2 + \mu_2)}, \quad C = \frac{(\mu_2 - \mu_1)}{(\mu_2 - \mu_2)} \quad (9)$$

식 (6)과 (7)을 식 (2)와 (3)에 대입하여 정리하면 다음과 같이 하이브리드영역 Ω 에서 변위와 응력에 관한 식⁽⁶⁾을 얻을 수 있다.

$$\{u\} = [U]\{\beta\} \quad (10)$$

$$\{\sigma\} = [V]\{\beta\} \quad (11)$$

위의 식에서 $\{u\} = \{u, v\}^T$, $\{\sigma\} = \{\sigma_{yx}, \tau_{xy}, \sigma_x\}^T$ 이고, 행렬 $[U]$ 와 $[V]$ 는 부록의 식 (A 1) 및 (A 2)

와 같이 정의한다. 또한, $\{\beta\}^T = \{b_{-m}, c_{-m}, \dots, b_m, c_m\}$ 로서 상수행렬을 의미한다. 일단 상수 $\{\beta\}$ 가 계산되면 하이브리드영역 Ω (구멍의 경계 Γ 포함)의 변위와 응력은 식 (10)과 (11)을 이용하여 계산할 수 있다. 단, 식 (10)과 (11)에서 $k=0$ 은 강체운동에 관계되는 항이므로 계산시 사용되지 않았다.

2.2 하이브리드 유한요소법

Grerhardt⁽⁶⁾는 변이원리(variational principle)와 그린정리(Green theorem)를 이용하여 하이브리드 요소의 강성행렬(stiffness matrix)을 유도하였다. 하이브리드영역 Ω 에 위치한 구멍의 경계 Γ 에서 견인력(traction)이 없을 경우, 탄성변형률 에너지(elastic strain energy)는 다음과 같이 유도될 수 있다.

$$\pi = \{\beta\}^T [H] \{q\} - \frac{1}{2} \{\beta\}^T [H] \{\beta\} \quad (12)$$

여기서, 행렬 $[H]$ 와 $[G]$ 는 각각 다음과 정의한다.

$$\begin{aligned} [H] &= \int_{(s-\Gamma)} [R]^T [U] ds \\ [G] &= \int_{(s-\Gamma)} [R]^T [I] ds \end{aligned} \quad (13)$$

식 (9)와 (10)에서 $\{q\}$ 는 하이브리드영역(Ω)의 외곽경계(S)에서 절점의 변위벡터(nodal displacement vector), $[I]$ 는 라그랑지 2차 보간함수(Lagrange quadratic interpolation function), ds 는 요소의 길이, 그리고 $[R]$ 은 방향여현과 식 (11)의 행렬 $[V]$ 에 관계되며, 부록의 식 (A3)에 정의되어 있다. 직교이방성 재료일 경우, 선적분 $[H]$ 와 $[G]$ 를 계산하기 위해서는 40개의 가우스점(Gauss point)이 적합한 것으로 연구^(5,8,16)되었다.

식 (12)를 최소화하기 위하여, 즉 $\partial\pi/\partial\{\beta\} = 0$ 를 취하면 변위 $\{q\}$ 와 상수행렬 $\{\beta\}$ 의 관계를 얻는다.

$$\{\beta\} = 2([H] + [H]^T)^{-1} [G] \{q\} \quad (14)$$

구멍이 포함된 하이브리드영역(Ω)의 외곽경계(S)에서 측정된 변위값 $\{q\}$ 를 알 수 있을 경우, 식 (14)로부터 상수행렬 $\{\beta\}$ 를 계산할 수 있다. 일단, 상수행렬 $\{\beta\}$ 가 결정되면 구멍과 구멍의 경계(Γ)를 포함한 하이브리드영역(Ω)내에서 변위와 응력은 식(10)과 (11)에 의해서 계산될 수 있다. 즉, 위와 같은 하이브리드 수치-실험기법(experi-

mental -numerical method)에서는 구멍으로 떨어진 외곽경계선 상의 절점의 변위(u 및 v)에 관한 데이터만 필요하며, 무아레(moire),^(8,9) 열탄성(thermoelasticity),^(10~12) 홀로그래피(holography), 광탄성(photoelasticity)⁽¹³⁾ 또는 스트레인 게이지(strain gage) 등의 실험적인 방법으로 측정할 수 있다.

본 연구에서는 유한요소법으로 외곽경계로 간주된 절점에서의 변위값을 구하여 수치실험을 위한 입력데이터로 사용하였다. 이들 값을 이용하여 하이브리드요소법의 영역크기, 외곽경계에서의 절점의 수, 식 (7)과 (8)의 급수형 응력함수의 항의 수를 변화시켜 구멍의 점선응력을 계산하고, 유한요소해석 결과와 비교·분석할 예정이다.

3. 수치실험

3.1 입력데이터

하이브리드요소법에 대한 수치실험(numerical experiment)을 위하여 Fig. 2와 같이 중심부에 원형구멍이 있는 유한폭의 단일 축하중을 받는 [0/90/10₀/90/0] 유리/에폭시(glass/epoxy) 직교이방성 복합재판을 택하였다. 위의 시편은 무아레-수치해석을 이용한 하이브리드기법으로 이미 해석되었으나,^(8,9)

본 연구에서는 하이브리드영역의 크기 및 절점 수의 변화등에 따른 영향을 정량적으로 분석하였다. 유리/에폭시 복합판재의 탄성계수는 섬유주축(major principal) 및 부축(minor principal) 방향에 대하여 각각 $E_{11}=34.2$ GPa, $E_{22}=14.1$ GPa이고, 전단탄성계수 $G_{12}=3.4$ GPa이며, 푸아송비(Poisson's ratio) $\nu_{12}=0.22$ 이다. 하중의 방향과 크기는 Fig. 2와 같이 섬유주축방향에 평행하며, $P=3,115$ N이다. 시편의 중앙에 있는 구멍의 직경 $d=1.27$ cm이고, 시편의 폭 $W=3.82$ cm이며, 폭과 직경의 비 $W/d=3$ 이다. 시편의 길이 $L=38.1$ cm이고, 시편의 두께 $t=0.35$ cm이다. 이러한 시편형상에 위의 하중이 작용할 경우, 응력(far

field stress)은 $\sigma_0=22.9$ MPa이다.

Fig. 2의 시편은 수평 및 수직축에 대하여 대칭이므로, Fig. 3과 같이 시편의 1/4에 대한 부분을 유한요소 상용 프로그램인 ANSYS⁽¹⁷⁾로 해석하였다. 정밀한 결과를 얻을 수 있도록 구멍주위와 응력집중 근방에서는 조밀한 요소로 분할하였다. Fig. 2의 시편은 폭이 한정(finite width)되어 정확한 이론해가 없으므로, 본 연구에서는 위의 ANSYS 해석결과를 하이브리드 수치실험에 입력데이터로 사용하였다.

ANSYS를 이용하여 Fig. 2의 A, B 및 C와 같이 하이브리드 영역의 크기를 세가지로 변화시켰을 때, 각각의 영역에 대한 외곽경계의 절점변위 $\{q\}$ 를 계산하고, 또한 구멍에서의 점선응력(tangential stress)도 구한다. 이렇게 서로 다른 절점위치에서 ANSYS로 계산된 변위 $\{q\}$ 를 식 (14)의 입력데이터로 사용한다. 일단, 식 (14)에서 상수행렬 $\{\beta\}$ 가 결정되면 다시 식 (11)을 이용하여 하이브리드요소법으로 점선응력 σ_t/σ_0 를 계산하고, 이를 ANSYS 및 다른 해석결과와 비교하여 하이브리드영역 크기의 변화에 대한 영향을 분석한다. 하이브리드 영역의 치수와 절점위치는 Fig. 4에 표시되어 있다. 하이브리드 요소 "A", "B" 및 "C"의 크기는 각각 $1.44 d \times 0.96 d$, $1.8 d \times 1.2 d$ 및 $2.16 d \times 1.50 d$ 이며, 구멍의 직경 $d=1.27$ cm이다. 각각의 하이브리드요소에서 외곽경계의 절점수는 5개에서 9개까지 변화시켜, 절점수에 따른 영향을 분석하였다. 예를 들면, Fig. 4에서 하이브리드요소 "A"의 외곽경계에서는 5, "B"에서는 7, 그리고 "C"에서는 9개의 절점이 표시되어 있다. 한편으

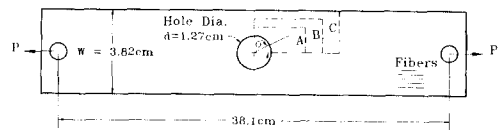


Fig. 2 Finite width uniaxially loaded [0/90/0₁₀/90/0] glass/epoxy tensile orthotropic composites containing a circular hole

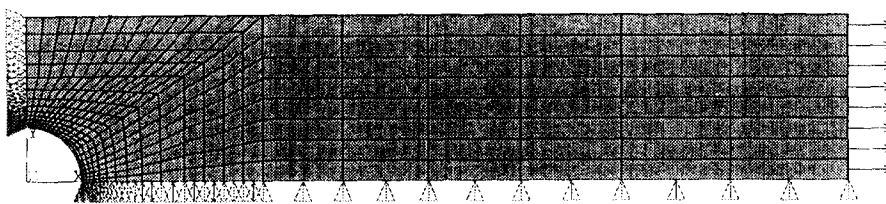


Fig. 3 ANSYS discretization of one-quarter plate (378 elements and 1221 nodes) of Fig. 2

로, Fig. 4의 하이브리드요소 “B”에 대해서는 무아레-수치(moire-numerical) 하이브리드기법으로 분석된 바 있다.^(8,9)

본 연구에서는 위와 같이 ANSYS로 구한 변위 { q }를 이용하여 하이브리드요소의 크기, 외곽 경계 선상의 절점수와 급수형 응력함수의 항의 수를 달리하였을 때, 이에 대한 영향을 정량적으로 분석하였다. ANSYS 해석시 8절점 등매개변수의 요소(8-node isoparametric element)를 사용하였으며, 378개의 요소와 1,221개의 절점으로 분할하였다. 구멍근방의 응력집중 부위는 정밀한 응력해석을 위하여 변의 길이가 0.017 d 정도로 조밀한 요소로 분할하였다. 더욱 조밀한 요소에서도 응력집중계수는 위의 요소로 분할한 결과에 거의 수렴하였다. Fig. 5에서는 ANSYS에 의하여 계산된 u - 및 v -변위와 무아레실험⁽⁹⁾에 의한 프린지를 정성적(qualitative)으로 비교한 결과이며, 프린지가 대체적으로 서로 잘 일치하였다.

3.2 급수형 응력함수의 수렴성 시험

하이브리드 유한요소법^(5, 9)에서 식 (7) 및 (8)과 같은 복소수형 로랑급수(Laurent series)의 응력함수를 사용하였다. 이미 발표한 연구결과^(4-6, 8)에 의하면, 급수형 응력함수의 항의 수(number of terms) 또는 상수항 a_n 는 하이브리드 유한요소법의 강성행렬 랭크(rank)를 고려하여 절점변위 { q }의 자유도에서 3을 뺀 값 이상을 사용하여야 한다. 예를 들면, 평면응력 상태에서 식 (7)과 (8)의 최소항의 수는 $m=(2 \times \text{절점수})=3$ 의 식으로 계산될 수 있다. 그러나 이에 대한 정량적인 연구결과가 제시된 바 없으므로, 본 연구에서는 급수형 응력함수의 항의 수에 따른 응력집중계수의 변화에 관하여 시험하였다.

이러한 시험을 위하여 Fig. 4의 하이브리드요소

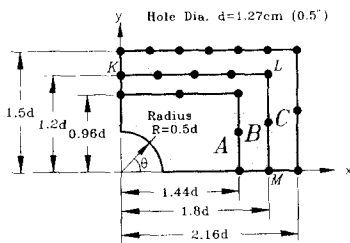
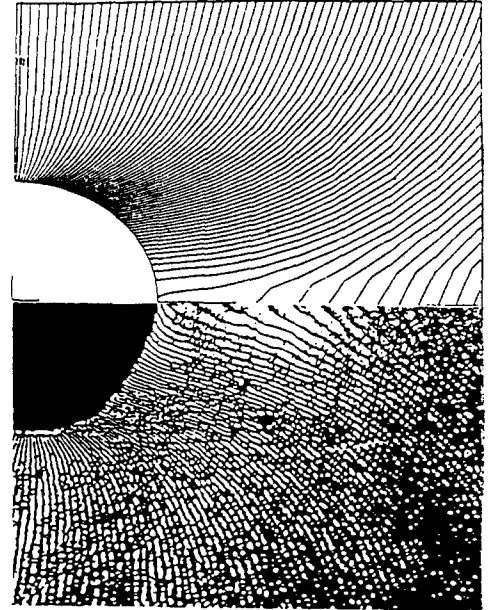
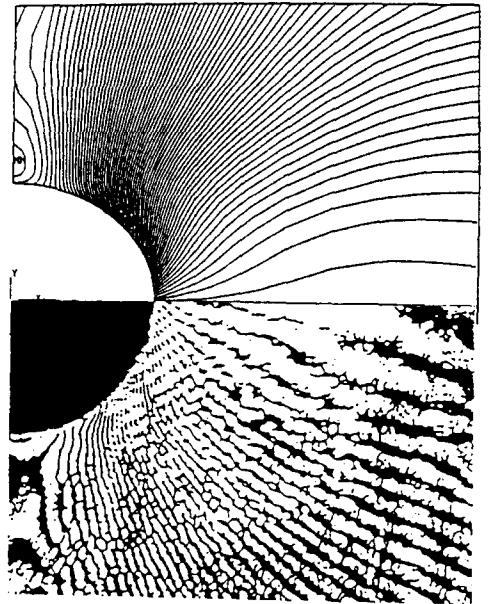


Fig. 4 Three different size of regions (A, B, C) and nodal points on exterior boundary for hybrid numerical analysis of Fig. 2

“B”를 택하였으며, 절점수를 5, 7 또는 9로 변화시켰을 때 각각의 경우에 관한 응력집중계수를 계



(a) u-displacements



(b) v-displacements

Fig. 5 Qualitative comparison of u - and v -displacements adjacent to the hole of the plate of Fig. 2. Upper lines are calculated by ANSYS and lower fringes are obtained from moire⁽⁹⁾

산하였다. 식 (7)과 (8)에서 a_k 는 복소수상수 (complex constant)이나, 본 연구에서 사용된 시험편은 x - 및 y -축에 관하여 기하학적으로 또한 기계적인 물성(geometric and mechanical properties)이 서로 대칭이므로 홀수항의 실수부(real and odd term)만 사용되었다. 각각의 항에 관하여 $\theta=90^\circ$ 에서 구멍의 무차원 점선응력 또는 응력집중계수 σ_t/σ_o 를 계산하였다. Fig. 6은 하이브리드 요소의 절점수가 5, 7 또는 9에 관하여 식 (7)과 (8)의 m 값이 3에서 49까지 변화되었을 때 계산된 응력집중계수를 나타낸다. 기존의 연구^(5,8,9)에 의하면, m 의 최소값은 5개의 절점에 대해서 $2 \times 5 - 3 = 7$ 항, 7개의 절점에 대해서 $2 \times 7 - 3 = 11$ 항, 그리고 9개의 절점에 대해서는 $2 \times 9 - 3 = 15$ 항을 사용하여야 한다. 그러나, Fig. 6과 같이 7개 또는 9개의 절점수에 대해서는 10 항 정도에서도 수렴된 응력집중계수를 얻을 수 있으나, 5개의 절점수가 사용되었을 때는 20항 이상을 사용하여야 수렴된 값을 얻을 수 있었다.

Fig. 6에서 $m \geq 25$ 항일 경우, 5개 또는 7개 절점에서의 변위가 입력데이터로 사용되었을 때는 $\sigma_t/\sigma_o \approx 5.01$, 그리고 9개 절점의 변위에 대해서는 $\sigma_t/\sigma_o \approx 5.02$ 로 수렴되었다. 한편으로, ANSYS 해석결과 $\sigma_t/\sigma_o \approx 5.06$ 으로서 하이브리드요소법의 수렴값과 약간의 차이가 있었다. Fig. 6에 의하면, 절점수가 많을수록 응력집중 계수의 수렴이 빠르며, 절점수가 적을수록 많은 항을 사용하여야 수렴된

값을 얻을 수 있었다. 그러나, 5개의 절점에서 변위가 입력되었을 경우, $m=15$ 항에서 응력집중 계수는 수렴된 값과 단지 0.5% 미만의 차이가 있었다. 따라서, 본 연구에서 사용된 어느 절점수(5~9개)에서나 $m=15$ 항 이상을 사용하면 수렴치에 근접한 값을 얻을 수 있었다.

3.3 하이브리드요소의 크기

일반적으로, Fig. 2와 같은 구멍가장자리의 응력 집중이 극심한 부위를 유한요소법으로 해석하기 위해서는 아주 조밀한 요소로 분할하여야 한다. 그러나 하이브리드요소를 이용할 경우, 구멍이 포함된 영역을 하나의 단일요소로 간주하여 응력을 계산할 수 있기때문에 요소분할에 따른 장애가 제거될 수 있다. 즉, 수치계산시 컴퓨터의 기억용량을 줄일 수 있을 뿐만 아니라, 처리속도도 빠르게 되는 장점이 있다. 또한, 하이브리드요소의 외곽 절점위치에 있는 측정데이터를 이용할 경우에도, 다른 수치기법에 비하여 비교적 적은 실험데이터로 응력해석이 가능하다.

이에, 본 연구에서는 하이브리드요소의 크기와 절점수에 따른 응력해석의 정밀도(accuracy)에 대해서 분석하였다. 즉, Fig. 4에 나타낸 "A", "B" 및 "C"의 크기가 서로 다른 하이브리드 요소에 관한 시험을 하였다. 각각의 요소에서 외곽경계(S-G)의 절점수는 각각 5개, 7개 및 9개로 변화시켰으며, ANSYS를 이용하여 이들 절점에서 변위를 계산한 후, 식 (14)의 $\{q\}$ 에 대한 입력 데이터로 사용하였다. 다음은 식 (14)로부터 계산된 상수행렬 $\{q\}$ 를 식 (11)에 대입하여, 구멍주위의 점선응력(tangential stress) σ_t/σ_o 를 구하였다. 여기서, σ_o 는 시험편에 작용된 응력(applied far-field stress)을 의미하며, 점선응력을 무차원화(normalize)시키기 위하여 이 값을 사용하였다. 식 (7)과 (8)의 급수형 응력함수의 항의 수를 $m=15$ 로 하였을 때, 계산결과는 Table 1과 같다. Table 1에서 A5, B5 및 C5의 기호는 Fig. 4에 나타낸 하이브리드 요소 "A", "B" 및 "C"의 외곽경계 절점수가 각각 5개인 경우를 의미한다. 하이브리드 요소 "A" 또는 "B"에서 7개나 9개의 절점변위를 입력 데이터로 사용하였을 경우에는 A7, B7, ..., A9, ...로 표시하였다. Fig. 3과 같이 ANSYS로 해석한 결과도 Table 1에 수록하여, 하이브리드요소법과 서로 비교될 수 있도록 하였다.

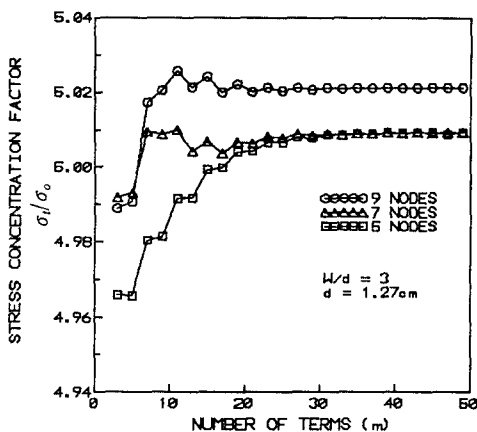


Fig. 6 Effect of number of terms of Eqs. (7) and (8) on the tensile stress concentration factor of Fig. 2 using hybrid region B of Fig. 4 with five, seven or nine nodes

Table 1 Effects of size of hybrid element and number of external nodes on tangential σ_t/σ_0 on edge of hole of Fig. 2

Angle θ°	ANSYS	Hybrid method (m=15)								
		5 Nodes			7 Nodes			9 Nodes		
		A 5	B 5	C 5	A 7	B 7	C 7	A 9	B 9	C 9
0	-0.834	-0.772	-0.770	-0.776	-0.824	-0.823	-0.819	-0.819	-0.824	-0.825
15	-0.584	-0.528	-0.529	-0.534	-0.577	-0.574	-0.570	-0.574	-0.577	-0.577
30	-0.112	-0.079	-0.079	-0.081	-0.118	-0.110	-0.104	-0.120	-0.115	-0.111
45	0.423	0.427	0.430	0.432	0.406	0.414	0.419	0.398	0.407	0.412
60	1.272	1.243	1.247	1.251	1.247	1.246	1.247	1.237	1.239	1.243
75	3.090	3.036	3.026	3.023	3.050	3.034	3.027	3.051	3.037	3.031
90	5.056	5.035	4.999	4.988	5.032	5.007	4.992	5.055	5.024	5.006

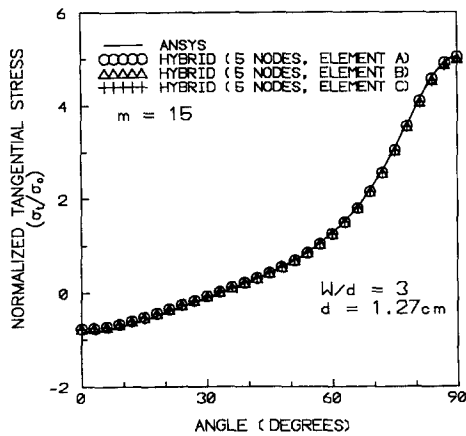


Fig. 7(a) Effect of relative size of hybrid element on tangential stress on hole boundary of Fig. 2 when displacements are imposed at five external nodes of each hybrid element (A, B, and C of Fig. 4)

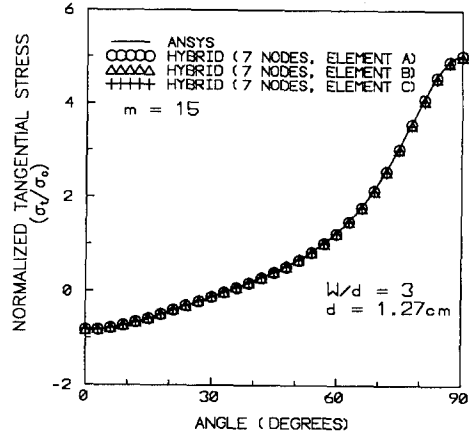


Fig. 7(b) Effect of relative size of hybrid element on tangential stress on hole boundary of Fig. 2 when displacements are imposed at seven external nodes of each hybrid element (A, B, and C of Fig. 4)

Fig. 7은 크기가 서로 다른 하이브리드요소의 절점수를 변화시켰을 때, 무차원화시킨 원주상의 접선응력과 ANSYS 해석결과를 비교한 그래프이다. Fig. 7(a)는 Fig. 4의 하이브리드요소 "A", "B" 및 "C" 요소에 대하여 5개 절점의 변위를, Fig. 7(b)는 7개 절점의 변위를, 그리고 Fig. 7(c)는 9개 절점의 변위를 이용하였을 때 하이브리드 기법으로 해석된 결과이다. 하이브리드요소 외곽경계의 절점위치는 Fig. 4에 표시되어 있다. 하이브리드요소법과 ANSYS에 의한 계산결과는 Table 1과 Fig. 7의 그래프에 나타낸 바와 같이 서로 잘 일치

되었다. 특히, Fig. 2의 $\theta=90^\circ$ 에서 하이브리드요소법과 ANSYS에 의하여 계산된 최대 접선응력 또는 응력집중계수의 차이는 하이브리드요소의 크기와 절점수에 관계없이 1.3% 이내로 잘 일치되었다. 즉, 절점에서 입력되는 변위가 정확할 경우 요소의 크기와 절점수에 관계없이 하이브리드요소법으로 신뢰성있는 결과를 얻을 수 있음을 시사하였다. 한편으로, Table 1의 $\theta=90^\circ$ 위치에서 요소크기와 절점수의 변화에 따른 접선응력을 요약하면 Table 2와 같다. 하이브리드법에 의한 최대 접선응력 또는 응력집중계수는 Table 2에 보인 바와

Table 2 Comparisons of maximum stress concentration factors σ_t/σ_o in uniaxially loaded, finite width orthotropic composite plate of Fig. 2 for input of different nodes and hybrid element

Element size \ Nodes	5 Nodes	7 Nodes	9 Nodes	ANSYS
A	5.035	5.032	5.055	5.056
B	4.999	5.007	5.024	
C	4.988	4.992	5.006	

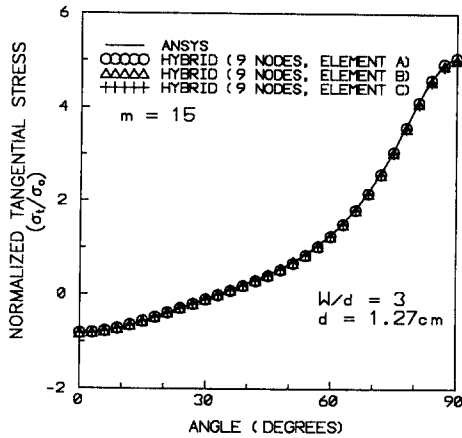


Fig. 7 Effect of relative size of hybrid element on tangential stress on hole boundary of Fig. 2 when displacements are imposed at nine external nodes of each hybrid element (A, B and C of Fig. 4)

같이 동일한 절점수를 사용하였을 경우, 요소가 "C"에서 "A"로 크기가 작아질수록, 그리고 요소의 크기가 동일할 경우에는 절점수가 많아 질수록 ANSYS 값에 근접하는 경향을 관찰할 수 있다. 이들 중, 요소의 크기가 "A"이고 9개 절점의 변위를 입력하였을 때, 즉 "A9"에서 하이브리드 요소법에 의한 계산 결과(5.055)는 ANSYS의 결과(5.056)에 가장 근접하였다. 그러나, 요소의 크기가 "A"일 경우 5절점(5.035)에서 7절점(5.032)으로 입력수를 증가시켜도 수렴효과는 미미하였다. 또한, $\theta=90^\circ$ 를 제외한 다른 각도에서의 점선응력은 5절점 입력에 비하여 7절점이나 9절점 입력시 ANSYS에 근접하는 개선효과는 있었으나, 7절점에서 9절점으로 입력수를 변화시켰을 때는 단순 수렴이 되지 않았다. 이는 하이브리드법에 의한 계산시 유한 폭(finite width)의 직교 이방성재료에 대한 정확한 이론적인 해가 없으므로, 본 연구에서는 어느 정도 오차를 포함한 ANSYS 값이 입력되어

나타나는 현상으로 추정된다.

4. 결론 및 토의

하이브리드요소법은 구멍주위를 단일요소로 취하여, 소량의 측정데이터로 실험에 의해 정밀한 응력 해석을 할 수 있는 장점이 있다. 본 연구에서는 수치실험을 통하여 급수형 응력함수의 항의 수에 따른 수렴성을 시험하였으며, 하이브리드요소의 크기 및 입력되는 절점수에 따른 영향도 분석하였다. 본 연구로부터 관찰된 사항은 하이브리드요소의 절점수가 5, 7 또는 9개 등의 모든 조건에서 $m=15$ 이상이 사용하면 응력집중계수가 수렴치에 0.5% 이내로 근접하였다. 또한, 수치실험에서 고려된 하이브리드요소의 크기 "B"에서 5개의 절점수만 입력될 경우에도 1.5% 이내로 정확한 응력집중계수를 얻을 수 있었다. 계산에 사용된 하이브리드 요소의 최대 크기는 $2.16 d \times 1.50 d$ 이며, $d=1.27$ cm이고 구멍의 직경을 의미한다. 또한, r 을 시편 중심으로부터 임의의 지점까지의 거리라 하고 R 은 구멍의 반경이라 할 때, 입력된 데이터는 $3.0 \leq r/R \leq 5.3$ 범위에 속하였다. 각각의 요소에 관하여 절점수를 5, 7 또는 9개로 변화시켜 해석하였다. 본 연구로부터 얻은 결론을 요약하면 다음과 같다.

(1) 일반적으로, 급수형 응력함수에서 수렴에 필요한 항의 수는 입력데이터 또는 절점수에 관계되며 입력데이터가 많을수록 빠르게 수렴하였다.

(2) 이론적으로 정확한 데이터가 입력되었을 경우에, 하이브리드요소의 크기나 입력되는 절점수는 정밀도에 큰 영향을 미치지 않았다. 구멍주위를 하나의 하이브리드요소(single hybrid element)로 간주하고, 외부영역을 일반적인 유한요소법으로 해석할 경우⁽⁵⁾에도 요소의 크기나 절점수에 큰 변화가 없었다.

위의 연구결과에 제시된 바와 같이 하이브리드

요소법을 이용하면 효율적이고 정밀한 응력해석이 가능하므로 무아래, (8,9) 열탄성, (10,11) 광탄성(13) 등 실험법과 하이브리드-유한요소법(4,8,15,16) 또는 다른 수치해석기법(18)에 적용되어 실용성에 관한 많은 연구가 수행되어 왔으며, 앞으로도 스트레인 게이지, 홀로그래피 등의 여러 실험법과 경계요소법 등에 활용되어 응용범위가 더욱 확장될 것으로 예측된다.

후 기

본 연구는 한국학술진흥재단 지원 '95년도 국비 해외과학교수 연구과제로 수행되었으며, 관계자 제위에게 사례를 포함합니다.

참고문헌

- (1) Rowlands, R. E., Daniel, I. M. and Whiteside, J. B., 1973, "Stress and Failure Analysis of a Glass Epoxy Composite Plate with a Circular Hole," *Experimental Mechanics*, Vol. 13, No. 1, pp. 31~37.
- (2) Rowlands, R. E., Daniel, I. M. and Whiteside, J. B., 1974, "Geometric and Loading Effects on Strength of Composite Plates with Cutouts," in *Composite Materials, Testing and Design (Third Conference)*, ASTM-STP-546, American Society for Testing and Materials, pp. 361~375.
- (3) Lekhnitskii, S. G., 1968, *Anisotropic Plates*, Tsi, S. W. and Cheron, T. (English Trans.) Gordon and Breach Science Publishers, New York.
- (4) Savin, G. N., 1961, *Stress Concentration Around Holes*, Pergamon Press, New York, Also see, *Stress Distribution Around Holes*, NASA Technical Translation, NASA TT F-601, (1970).
- (5) Gerhardt, G. D., 1984, "A Hybrid/Finite Element Approach for Stress Analysis of Notched Anisotropic Materials," *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 51, pp. 804~810.
- (6) Tong, P., 1977, "A Hybrid Crack Element for Rectilinear Anisotropic Material," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 11, No. 2, pp. 377~403.
- (7) Pian, T. H. and Chen, D., 1982, "Alternative Ways for Formulation of Hybrid Stress Elements," *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, Vol. 18, No. 11, pp. 1679~1984.
- (8) Rhee, J., 1995, "Geometric Discontinuities in Orthotropic Composites," Ph. D. Thesis, Department of Engineering Mechanics and Astronautics, University of Wisconsin, Madison, Wisconsin.
- (9) Rhee, J., He, S. and Rowlands, R. E., 1996, "Hybrid Moire-Numerical Stress Analysis around Cutouts in Loaded Composites," *Experimental Mechanics*, Vol. 36, No. 4, pp. 379~387.
- (10) Lin, S. T. 1994, "Quantitative Thermoelastic Stress Analysis of Orthotropic Composite Structures," Ph. D. Thesis, Department of Engineering Mechanics, University of Wisconsin, Madison.
- (11) Lin, S. T. and Rowlands, R. E., 1995, "Thermoelastic Stress Analysis of Orthotropic Composites," *Experimental Mechanics*, Vol. 35, No. 3, pp. 257~265.
- (12) Rauch, B. J. and Rowlands, R. E., 1995, "Determining Reliable Edge Isopachic Data from Interior Thermoelastic Measurements," *Experimental Mechanics*, Vol. 35, No. 2, pp. 174~181.
- (13) Hawong, J. S., Lin, C. H., Lin, S. T., Rhee, J. and Rowlands, R. E., 1995, "A Hybrid Method to Determine Stresses in Orthotropic Composites Using Only Isochromatic Data," *Journal of Composite Materials*, Vol. 29, No. 9, pp. 2366~2387.
- (14) Feng, Z. and Rowlands, R. E., 1991, "Smoothing Finite-Element and Experimental Hybrid Technique for Stress Analyzing Composites," *Computers and Structures*, Vol. 39, No. 6, pp. 631~639.
- (15) 임장근, 송관섭, 1996, "평면 탄성문제의 트래프즈 유한요소법과 캐비티요소의 구성," 대한기계학회논문집(A), 제20권, 제1호, pp. 163~171.
- (16) Zalph, B. L., 1989, "Predicting the Strength

of Notched Wood Beams," Ph. D. Thesis, Wood Science and Forest Products, Virginia Polytechnic Institute and State University, Virginia.

(17) ANSYS Program and User's Manual, Version 4.4A, Swanson Analysis Systems, Inc., Houston, PA.

(18) Baek, T. H. Rhee, J. and Rowlands, R. E., 1996, "Effects of Hybrid Element Size, and Amount and Quality of Input Data when Stress Analyzing Perforated Composites," Submitted to *Journal of Computers and Structures*.

부 록

$$\begin{aligned}
 U(1, j) &= 2Re\{p_1 \zeta_1^k + p_2 (C \zeta_2^k + B \zeta_2^{-k})\} \\
 U(1, j+1) &= 2Im\{-p_1 \zeta_1^k + p_2 (-C \zeta_2^k + B \zeta_2^{-k})\} \\
 U(1, j) &= 2Re\{q_1 \zeta_1^k + q_2 (C \zeta_2^k + B \zeta_2^{-k})\} \\
 U(1, j+1) &= 2Im\{-q_1 \zeta_1^k + q_2 (-C \zeta_2^k + B \zeta_2^{-k})\}
 \end{aligned}
 \tag{A1}$$

$$\begin{aligned}
 V(1, j) &= (-1)^{i-1} (2k) \left[Re \left\{ \mu_1^{i-1} \frac{\zeta_1^{k-1}}{\omega_1'(\zeta_1)} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \mu_2^{i-1} \frac{-B \zeta_2^{k-1} - C \zeta_2^{k-1}}{\omega_2'(\zeta_2)} \right\} \right] \\
 V(1, j+1) &= (-1)^{i-1} (2k) \left[Im \left\{ -\mu_1^{i-1} \frac{\zeta_1^{k-1}}{\omega_1'(\zeta_1)} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \mu_2^{i-1} \frac{-B \zeta_2^{k-1} - C \zeta_2^{k-1}}{\omega_2'(\zeta_2)} \right\} \right]
 \end{aligned}
 \tag{A2}$$

위의 식에서 $i=1(\sigma_y), 2(\tau_{xy}), 3(\sigma_x)$ 이고, $k>0$ 인 경우 $j=2(k+m)+1, k \neq 0$ 이며, $k<0$ 일 경우는 $j=2(k+m)-1$ 이다.

$$[R] = \begin{pmatrix} n_x & 0 & n_y \\ 0 & n_y & n_x \end{pmatrix} [V]
 \tag{A3}$$

식 (A3)에서 n_x 및 n_y 는 하이브리드 영역 외곽 경계(S) 법선에 대한 방향여현(direction cosine) 이고, 행렬 [V]는 식 (A2)와 같다.