

# 디지털무선통신 방식에서 페이딩의 영향을 고려한 QAM 방식의 성능평가

## Performance Evaluation of QAM System in Faded Digital Wireless Communication Environments

임성준\* · 유흥균\*\*

Sung-Joon Lim\* · Heung-Gyoon Ryu\*\*

### 요 약

이 논문에서는 신호점 구성에 따른 square QAM과 star QAM의 2가지 종류의 QAM 시스템을 평가하였으며, 처음에는 잡음환경, 두 번째는 페이딩 환경, 그리고 마지막으로 PSAM 방식을 이용하였을 경우의 QAM 시스템의 성능평가를 하였다. 결론적으로, 잡음환경에서는 square QAM 시스템의 성능이 더 좋지만, 페이딩이 존재하면 star QAM의 성능이 더 뛰어나다. 또한 페이딩 채널에서는 전반적인 성능 악화로 인하여 두 시스템의 성능이 열화된다. 그러나 PSAM 방식에서, 상당한 개선효과를 얻게 되었으며, 이 경우 square QAM에 비하여 star QAM의 성능개선효과가 더 뚜렷하다.

### Abstract

In this paper we evaluate the performances of two types of 16-QAM system such as square QAM and star QAM. First we analyze the performances of QAM systems under AWGN(adaptive white Gaussian noise) and afterward analyze the performances under fading environments. The performances of QAM systems in case of using the PSAM(Pilot Symbol Assisted Modulation) are finally evaluated under fading environments. In conclusion, the Square QAM's performance is better than star QAM in AWGN. But the performances of the both QAM systems are very poor under the fading environments. QAM performance using the PSAM system is verified to be improved in that case, and the star QAM's performance is better than square QAM.

### I. 서 론

정보화 사회가 되어감에 따라 점점 더 많은 데이터 전송이 필요하게 되었다. 기존의 제한된 대역폭 내에서 더 많은 정보를 보낼 필요성이 증가함에 따

라 점점 특별한 방법이 필요하게 된다.

여기서는 이러한 여러 방식 중 QAM 방식에 대한 성능을 평가하였다. QAM 방식은 PSK 방식과 ASK 방식을 조합한 것으로 생각할 수 있으며 여러 가지 형태를 갖고, 신호점에 해당 하는 심볼을 나타내는 것으로 특정형태를 나타낼 수 있으며, 지금까지

\* 한국전자통신연구원 전파용역연구실(Applied Radio Section, ETRI)

\*\* 충북대학교 전자공학과(Dept. of Electronic Eng. Chungbuk Nat'l Univ.)

· 논문 번호 : 970509-031

· 수정완료일자 : 1997년 10월 22일

지 많은 사람들에 의하여 연구되어졌다. P. M. Fortune L. Hanzo, R. Steele 등은 잡음이 존재할 경우에 square 16-QAM의 전송성능 및 페이딩 환경에서의 성능을 평가하였고<sup>[11]-[13]</sup>. K.H.H.Wong 와 L. Hanzo 등은 star QAM 구조를 제안하고 잡음환경에서 최적인 square QAM에 대하여, 페이딩 환경에서 더 적합하며, 차동부호화를 함으로써 비동기로 사용할 수 있다는 것을 제시하였다<sup>4)</sup>. 그러나 페이딩 환경에서는 전반적인 성능의 저하로 실제적인 사용이 거의 불가능하게 되므로, 이것을 해결하기 위하여 A. Bateman과 J. P. McGeehan 은 TTIB(trans- parent tone in band)를 제시하였고<sup>[5],[6]</sup>, J. K. Caver는 PASM(pilot symbol assisten modulation)을 제안하였다<sup>7)</sup>. 그러나 Caver 등이 제안한 바에 의하면 계산량이 많아지고, 실제적인 수치계산이 어렵다는 단점이 있으며, 시뮬레이션도 square QAM에 한정되어 있다. 이 논문에서는 먼저 AWGN과 페이딩 채널에서의 square QAM 방식과 star QAM 방식에 대하여 성능평가를 하였다. 마지막 절에서는 페이딩을 극복할 수 있는 방식 중 PSAM 방식을 사용하였을 경우에 대한 수학적 표현식을 제시하고, 이에 따른 성능 개선효과를 나타내었으며, star QAM방식에서는 기존의 차동 부호화를 사용하지 않고도 비동기로 사용할 수 있는 점을 이용하여 페이딩의 영향을 상당히 감소시킴을 보였다.

## II. AWGN 채널의 시스템 성능

### 2-1 Square QAM

잡음이 존재하게 되면, 각 전송 심볼은 잡음의 영향에 의하여 오차가 발생하게 된다. 잡음이 존재할 경우 시스템의 오차를 감소시키기 위하여 유클리디안 거리를 최대로 하는 것이 바람직하며, 이러한 시스템이 square QAM이다. 여기에서는 square QAM와 star QAM 방식에서의 오차발생율을 비교하였다. 여기에서 발생하는 잡음은 협대역 AWG-

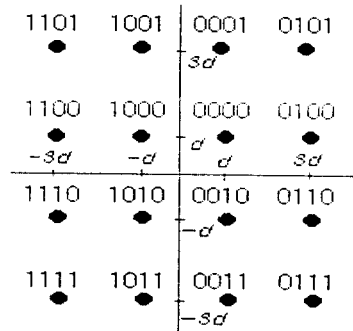


그림 1. Square QAM의 신호좌

Fig. 1. Square QAM constellation.

N이며, 평균은 0이며, 분산은  $N_0$ 라고 가정하였다<sup>[8]</sup>.

### 2-1-1 Square QAM

Square QAM은 최대 유클리디안 거리를 갖는 방식이며, 그림 1과 같이 각 심볼간의 최단거리는 모두 같다.

이때 수신신호  $r(t)$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= a(t) \cos[2\pi f_c t + \theta(t)] + n(t) \\ &= a(t) \cos\theta(t) \cos \omega_0 t \\ &\quad - a(t) \sin\theta(t) \sin \omega_0 t + n(t) \end{aligned} \quad (1)$$

여기서  $n(t)$ 는 평균이 0이고  $N_0/2$ 의 분산을 갖는 협대역 가우시안 잡음이라고 가정하자. 이 경우  $n(t)$ 는 다음과 같이 분리할 수 있다.

$$n(t) = n_c(t) \cos \omega_0 t + n_s(t) \sin \omega_0 t \quad (2)$$

단 여기서  $n_c(t)$ ,  $n_s(t)$ 는  $n(t)$ 와 동일한 평균 및 전력밀도를 갖는다.

이 경우 수신신호  $r(t)$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \gamma(t) = & (a(t) \cos\theta(t) + n_c(t)) \cos \omega_0 t \\ & - (a(t) \sin\theta(t) + n_s(t)) \sin \omega_0 t \end{aligned} \quad (3)$$

신호를 해석하는 경우에 있어서 여기에서는 벡터 해석방식을 적용하기로 하자.

그림 1에서 보듯이 Square QAM은 심볼들이 원 점에서 거리가  $\pm d, \pm 3d$ 인 점에 위치한다. 이 경우 심볼당 평균에너지  $E_0$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} E_0 = & \frac{1}{16} [4(d^2 + d^2) + 8(9d^2 + d^2) + 4(9d^2 + 9d^2)] \\ = & 10d^2 \end{aligned} \quad (4)$$

한 심볼은 4비트로 이루어져 있으므로, 비트당 평균에너지  $E_b$ 는  $E_b = E_0/4$ 임을 알 수 있다.

신호점상에서 각 심볼들은 각각 BER이 다르다. 따라서 좀더 정확한 결과를 유도하기 위하여 각 신호점들을 세 개의 채널로 분리하여 생각하기로 하자. 즉 다음처럼 중심부에 있는 신호점, 측면에 위치하는 신호점 그리고 꼭지점에 위치하는 신호점으로 분리하고, 이들 신호들의 집합은 서로 동일한 채널을 통하여 전송한다고 하면, 전송신호가 올바르게 수신될 확률은 다음과 같다.<sup>9)</sup>

가.  $i = 0, 4, 8, 12$ 인 경우 (채널 A)

$$\begin{aligned} P(S_i | m_A) = & \int_{-d}^d \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp\left(\frac{-x^2}{N_0}\right) \\ & \cdot \int_{-d}^d \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp\left(\frac{-y^2}{N_0}\right) dy dx \quad (5) \\ = & \left( \operatorname{erf}\left(\frac{d}{\sqrt{N_0}}\right) \right)^2 \end{aligned}$$

나.  $i = 1, 2, 5, 6, 9, 10, 13, 14$ 인 경우 (채널 B)

$$P(S_i | m_B) = \int_{-d}^d \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp\left(\frac{-x^2}{N_0}\right)$$

$$\begin{aligned} & \cdot \int_{-d}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp\left(\frac{-y^2}{N_0}\right) dy dx \quad (6) \\ = & \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{d}{\sqrt{N_0}}\right) \cdot \operatorname{erfc}\left(\frac{d}{\sqrt{N_0}}\right) \end{aligned}$$

다.  $i = 3, 7, 11, 15$ 인 경우 (채널 C)

$$\begin{aligned} P(S_i | m_C) = & \int_{-d}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp\left(\frac{-x^2}{N_0}\right) \\ & \cdot \int_{-d}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp\left(\frac{-y^2}{N_0}\right) dy dx \quad (7) \\ = & \frac{1}{4} \operatorname{erfc}^2\left(\frac{d}{\sqrt{N_0}}\right) \end{aligned}$$

전송 전에 그림 1과 같이 그레이 코딩을 하게 된다면 인접영역에서는 하나의 비트만 변화하므로, 오차가 발생시 4개의 비트 중 하나만 변할 가능성이 가장 크게 된다. 만약 오차가 발생하였을 경우 인접영역으로만 변화가 된다고 가정하면 BER은 각각의 경우에 변화가능비트  $N$ 으로 나누어준 것으로 근사화가 가능하다. 먼저 각각의 경우의 오차확률을 구하면 다음과 같다.

$$P(e | m_j) = 1 - P(S_i | m_j), \text{ 단 } j = A, B, C$$

$m_A$  영역에서는 오차확률은 4비트에 동일하게 나타나므로  $N_A = 4$ ,  $m_B$  영역에서는 오차확률은 3비트가 우월하므로  $N_B = 3$ ,  $m_C$  영역에서는 오차확률은 2비트에서만 나타난다고 가정하면  $N_C = 2$ 로 근사화시킬 수 있다. 따라서 전체 BER은 다음처럼 근사화가 가능하다.

$$D(e_{BER}) = \sum_{i=A, B, C} \frac{P(e | m_i)}{N_i} \cdot P(m_i) \quad (8)$$

단 여기서  $P(m_i)$ 는 각 상태의 발생확률이며 모든 비트의 발생확률이 동일할 경우  $P(m_A) = \frac{1}{4}$ ,  $P$

$$(m_B) = \frac{1}{2} \text{ 그리고 } P(m_C) = \frac{1}{4} \text{ 이 된다.}$$

### 2-2 Star QAM

이동용 통신장비 등 많은 경우에 있어서 시스템을 단순하게 구성하고 비동기로 사용하기 위하여 다음과 같은 Star QAM 방식을 사용한다. 물론 QAM 방식은 최대 유클리디안 거리를 가지지는 않지만, 차동부호화를 함으로써 비동기로 구성이 가능하며, 페이딩의 영향도 덜 받게 된다.

안쪽원의 반지름을  $d$ 라고 하고 바깥쪽 원의 반지름을  $kd$ 라고 하자. 여기서  $k$ 는  $k > 1$ 인 안쪽원과 바깥쪽 원과의 비이다. 먼저 심볼당 평균전력을 구해보면 다음과 같다.

$$E_0 = \frac{1}{2} (d^2 + k^2 d^2) = \frac{d^2}{2} (1 + k^2) \quad (9)$$

또한 심볼이 나타내는 4 비트를 처음 비트는 차동부호화를 시키고 나머지 3 비트는 8진 PSK와 같이 사용하기로 하자. 이렇게 되면 심볼 두 개를 전송할 경우에 처음비트는 한 번 나머지 비트는 두 번

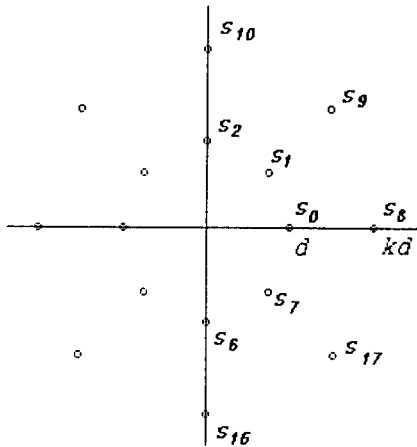


그림 2. Star QAM 의 신호좌  
Fig. 2. Star QAM constellation.

전송이 가능하다. 따라서 비트당 평균에너지는  $E_b = \frac{2}{7} E_0$  이 된다.

또한 Chow 등에 의하면 최대 유클리디안 거리를 갖기 위해서는  $k \approx 1.8$ 이 된다<sup>9),10)</sup>. 먼저 첫 번째 비트를 고려해보자. 앞의 비트와 다음비트의 크기가 동일할 경우에는 1을 전송한 것으로 하고 크기가 다를 경우는 0을 전송하는 경우로 하자. 이때 판별 기준을  $\frac{2}{(1+k)d}$  와  $\frac{(1+k)d}{2}$  로 하자.

즉  $\frac{2}{(1+k)d} \leq \frac{s_{j+1}}{s_j} < \frac{(1+k)d}{2}$  인 경우는 1이 전송되었다고 판단하고 그 외의 경우는 0이 전송되었다고 판단하기로 하자.

이런 경우 처음 비트에 대한 조건부 확률밀도 함수는 다음과 같다.

$$f(m_i | s_{j,j+1}) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp\left(-\frac{(x-s_j)^2}{N_0}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp\left(-\frac{(y-s_{j+1})^2}{N_0}\right) \quad (10)$$

먼저 앞의 심볼 크기와 다음 심볼의 크기가 동일한 경우를 고려하면 수신성공확률은 다음과 같다.

$$P(m_1 | s_i) = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp\left(-\frac{(x-s_i)^2}{N_0}\right) \cdot \int_{\frac{(1+k)x}{2k}}^{\frac{(1+k)x}{5}} \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp\left(-\frac{(y-s_i)^2}{N_0}\right) dy dx \quad (11)$$

단  $s_1 = d, s_2 = kd$ 이다.

$$\frac{(1+k)}{2} = d_d \text{ 라고 하면}$$

$$P(m_1 | s_i) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp\left(-\frac{(x-s_i)^2}{N_0}\right) \cdot \left\{ \operatorname{erf}\left(\frac{dx-s_i}{\sqrt{N_0}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{d_i}{k} - s_i\right) / \sqrt{N_0} \right\} dx \quad (12)$$

따라서 1을 전송하는 경우의 오차확률은 다음과 같다.

$$P(e|m_1) = 1 - \frac{1}{2} \{P(m_1|s_1) + P(m_1|s_2)\} \quad (13)$$

다음으로 처음 심볼의 크기와 다음 심볼의 크기가 다른 경우 즉 0을 전송하는 경우를 고려해 보자. 먼저 처음 심볼의 크기가  $kd$  다음 심볼의 크기가  $d$ 인 경우를 생각하면 수신 성공확률은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} P(m_2|s_{1,2}) &= \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp\left(-\frac{(x-kd)^2}{N_0}\right) \\ &\cdot \int_0^{\frac{d}{k}x} \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp\left(-\frac{(y-d)^2}{N_0}\right) dy dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp\left(-\frac{(x-kd)^2}{N_0}\right) \\ &\cdot \operatorname{erf}\left(\left(\frac{d}{k}x - d\right) / \sqrt{N_0}\right) dx \end{aligned} \quad (14)$$

마찬가지로 처음심볼의 크기가  $d$ 이고 다음 심볼의 크기가  $kd$ 인 경우의 수신성공확률은

$$\begin{aligned} P(m_2|s_{2,1}) &= \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp\left(-\frac{(x-d)^2}{N_0}\right) \\ &\cdot \int_{dx}^\infty \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp\left(-\frac{(y-kd)^2}{N_0}\right) dy dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp\left(-\frac{(x-d)^2}{N_0}\right) \\ &\cdot \operatorname{erfc}\left(\frac{dix - kd}{\sqrt{N_0}}\right) dx \end{aligned} \quad (15)$$

따라서 0을 전송하는 경우 오차확률은 다음과 같다.

$$P(e|m_2) = 1 - \frac{1}{2} \{P(m_2|s_{1,2}) + P(m_2|s_{2,1})\} \quad (16)$$

그러므로 처음 비트에 대한 전체 오차확률은 다음과 같다.

$$P(e|b_1) = \frac{1}{2} \{P(e|m_1) + P(e|m_2)\} \quad (17)$$

너지 3비트의 오류확률을 구하자. 이 경우 나머지 3비트의 오차확률은 반지름이  $s_1$ 인 8진 PSK와 동일하며, 심볼중 하나를 선택하여 전송한 경우를 고려해 보자.

각 심볼의 크기를  $d$ 라고 하면 전송이 성공할 확률은 다음과 같다.<sup>11)</sup>

$$\begin{aligned} P(s_1|m_1) &= \int_0^\infty \int_{-x \tan(\pi/8)}^{x \tan(\pi/8)} \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp\left(-\frac{y^2}{N_0}\right) dy \\ &\cdot \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp\left(-\frac{(x-d)^2}{N_0}\right) dx \\ &= \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp\left(-\frac{(x-d)^2}{N_0}\right) \right. \\ &\cdot \left. \operatorname{erf}\left(\frac{x \tan(\pi/8)}{\sqrt{\pi N_0}}\right) \right\} dx \end{aligned} \quad (18)$$

따라서 전체 오차확률은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} P(e|s_1) &= 1 - \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp\left(-\frac{(x-s_1)^2}{N_0}\right) \\ &\cdot \int_0^{x \tan(\pi/8)} \frac{2}{\sqrt{\pi N_0}} \exp\left(-\frac{y^2}{N_0}\right) dy dx \end{aligned} \quad (19)$$

즉 나머지 3 비트의 오차확률은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$P(e|b_{2,3,4}) = \frac{1}{2} \{P(e|s_1) + P(e|s_2)\} \quad (20)$$

전체 심볼당 오차확률을 표시하면

$$P(e) = \frac{1}{4} P(e|b_1) + \frac{3}{4} P(e|b_{2,3,4}) \quad (21)$$

그레이 부호를 이용하는 경우 8진 PSK에서 오차가 발생시 거의 1비트만 변화한다고 하면 비트당

오차확률은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 P(e_{BER}) &= \frac{1}{4} P(e|b_1) + \left(\frac{3}{4}\right) \left(\frac{1}{3}\right) P(e|b_{2,3,4}) \\
 &= \frac{1}{4} \{P(e|b_1) + P(e|b_{2,3,4})\} \quad (22)
 \end{aligned}$$

AWGN에서 각 시스템에 대한 오차확률이 그림 3에 나타나 있다. 그림에서 나타나듯이 최대 유클리디안 거리를 갖는 Square QAM의 성능이 더 좋게 나타남을 알 수 있다. 또한 그림 4에 보이듯이 star QAM의 경우에도 최대 유클리디안 거리를 갖는 경우는  $k=1.8$  이므로 이 경우의 가장 좋은 성능을 지님을 알 수 있다. 즉 유클리디안 거리는 백색 잡음만 존재하는 채널에서는 시스템의 성능평가의 기준으로 작용하고 있음을 알 수 있다.

### III. 페이딩 채널에서의 시스템 성능

다음으로 페이딩 채널에서의 오차를 구해보자. 직접파가 존재하는 채널의 경우 페이딩은 Rayleigh 경향을 따르게 된다. 전송 채널에서 주파수 선택적이 아니고, 시간에 대하여 느리게 변하며, 협대역인 페이딩이 발생한다고 가정하면, 모든 전송 주파수 요소들은 동일한 감쇠와 주파수 천이가 발

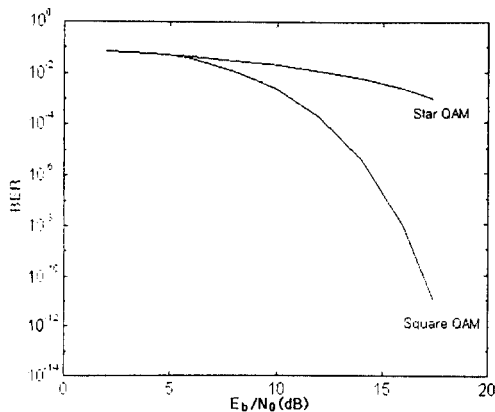


그림 3. AWGN 채널에서의 QAM 성능  
Fig. 3. QAM performance under AWGN channel.

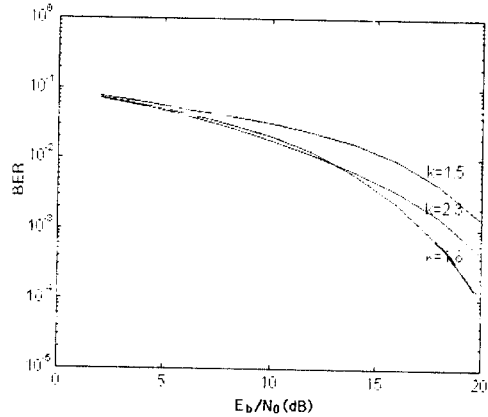


그림 4. k값에 따른 star QAM의 성능  
Fig. 4. Performance star QAM for different k.

생하게 된다. 일반적으로 페이딩 채널에서의 전달 함수는 다음과 같다<sup>[2,3,12]</sup>.

$$c(t) = \alpha(t) \cdot e^{j\Phi(t)} \quad (23)$$

여기서  $\alpha(t)$ 는 Rayleigh 페이딩 포락선이고,  $\Phi(t)$ 는 채널의 위상이며  $[-\pi, \pi]$ 까지 균일한 분포를 가진다. 페이딩이 시간에 대하여 느리게 변한다고 가정하였으므로, 한 신호기간동안  $\alpha(t) = \alpha$  그리고  $\Phi(t) = \Phi$ 로 생각할 수 있다. 따라서 수신신호는 아래와 같다.

$$\gamma(t) = \alpha e^{j\Phi} m(t) + n(t) \quad (24)$$

여기서  $m(t)$ 는 전송되는 변조신호이며,  $n(t)$ 는 AWGN이다.

수신신호는 시간에 따라 다른 페이딩 감소를 받게 되므로 전체 BER은 페이딩에 의한 수신신호의 비트오차확률과 페이딩 포락선  $\alpha$ 의 확률밀도함수를 곱하여 평균한 값이 된다. 즉 가능한 모든 페이딩 포락선  $\alpha$ 의 확률밀도함수와  $\alpha$ 에 의하여 변화되는 비트오차확률을 곱하여 적분한 값이 평균 비트 오차확률이며, 다음과 같다<sup>[1,2,3]</sup>.

$$P_{be} = \int_0^{\infty} P(\alpha) \cdot C(\alpha) d\alpha \quad (25)$$

여기에서 페이딩 포락선  $\alpha$ 는 다음과 같은 Rayleigh 분포를 지닌다.

$$C(\alpha) = \frac{\alpha}{\alpha_0^2} e^{-\alpha^2/2\alpha_0^2} \quad (26)$$

여기에서  $\alpha_0$ 는 페이딩 포락선  $\alpha$ 를 구성하는 독립 변수이며, 이 경우  $E(\alpha^2) = \alpha^2 = 2\alpha_0^2$  이며,  $E(\alpha) = \bar{\alpha} = \alpha_0 \sqrt{\pi/2}$  이다.

### 3-1 Square QAM

Square ZAM인 경우 페이딩 경로를 통과한다면, 신호의 판별기준은  $\pm[0, \pm 2d]$ 에서  $\pm[0, \pm 2\bar{d}]$  그리고  $\pm[\pm 2d, \pm\infty]$ 에서  $\pm[\pm 2\bar{d}, \pm\infty]$ 로 바뀌게 되며,  $\bar{d} = \alpha d = \bar{\alpha} d$  이다. 따라서 수신 성공확률은 다음과 같다.

3-1-1  $i=0,4,8,12$ 인 경우 (채널 A)

$$P(S_i | m_A, \alpha) = \frac{1}{4} \left( \operatorname{erfc}\left(\frac{-\alpha d}{\sqrt{N_0}}\right) - \operatorname{erfc}\left(\frac{2\bar{\alpha} - \alpha}{\sqrt{N_0}}d\right) \right)^2 \quad (27)$$

3-1-2  $i=1,2,5,6,9,10,13,14$ 인 경우 (채널 B)

$$P(S_i | m_B, \alpha) = \frac{1}{4} \operatorname{erf}\left(\frac{2\bar{\alpha}d - 3\alpha d}{\sqrt{N_0}}\right) \cdot \operatorname{erfc}\left(-\frac{\alpha d}{\sqrt{N_0}}\right) \operatorname{erfc}\left(-\frac{(2\bar{\alpha} - \alpha)d}{\sqrt{N_0}}\right) \quad (28)$$

3-1-3  $i=3,7,11,15$ 인 경우 (채널 C)

$$P(S_i | m_C, \alpha) = \frac{1}{4} \operatorname{erfc}^2\left(\frac{-d}{\sqrt{N_0}}\right) \quad (29)$$

이며 오차확률은

$$P(e | m_j, \alpha) = 1 - P(S_i | m_j, \alpha) \quad (30)$$

페이딩을 고려하면

$$P(e | m_j) = \int_0^{\infty} C(\alpha) \cdot P(e | m_j, \alpha) d\alpha \quad (31)$$

여기서  $j=A,B,C$ 이다. 또한 평균 비트 전력  $\bar{E}_b = \alpha^2 E_b = \bar{\alpha}^2 E_b = 2\alpha_0^2 E_b$  이며 평균 SNR은  $\overline{SNR} = \bar{E}_b / N_0$  이 된다.

따라서 앞에서와 전체 BER을 근사화 시키면 다음과 같다.

$$P(e_{BER}) = \sum_{j=A,B,C} \frac{P(e | m_j)}{N_j} \cdot P(m_j) \quad (32)$$

### 3-2 Star QAM

처음 비트의 경우 페이딩 포락선에 조건부 확률 밀도함수는 다음과 같다.

$$f(m_i | s_{j,j+1}, \alpha) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp\left(-\frac{(x - \alpha s_j)^2}{N_0}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp\left(-\frac{(y - \alpha s_{j+1})^2}{N_0}\right) \quad (33)$$

먼저 앞의 심볼 크기와 다음 심볼의 크기가 동일한 경우를 고려하면 페이딩에 대한 조건부 수신 성공확률은 다음과 같다.

$$P(m_i | s_i, \alpha) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp\left(-\frac{(x - \alpha s_i)^2}{N_0}\right) \cdot \int_{\frac{(1+k)x}{5}}^{\frac{(1+k)x}{2k}} \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp\left(-\frac{(y - \alpha s_i)^2}{N_0}\right) dy dx \quad (34)$$

따라서

$$P(m_1 | s_i, \alpha) = \frac{1}{2} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp\left(-\frac{(x - \alpha s_i)^2}{N_0}\right) \cdot \left\{ \operatorname{erf}\left(\frac{d_i x - \alpha s_i}{\sqrt{N_0}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{d_i}{k} - \alpha s_i / \sqrt{N_0}\right) \right\} dx \quad (35)$$

따라서 1을 전송하는 경우의 조건부 오차확률은 다음과 같다.

$$P(e | m_1, \alpha) = 1 - \frac{1}{2} \{P(m_1 | s_1, \alpha) + P(m_1 | s_2, \alpha)\} \quad (36)$$

다음으로 처음 심볼의 크기와 다음 심볼의 크기가 다른 경우 즉 0을 전송하는 경우를 고려해보자. 먼저 처음 심볼의 크기가  $kd$  다음 심볼의 크기가  $d$ 인 경우를 생각하면 조건부 수신 성공확률은 다음과 같다.

$$P(m_2 | s_{1,2}, \alpha) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp\left(-\frac{(x - kad)^2}{N_0}\right) \cdot \int_0^{\frac{d_i}{k}x} \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp\left(-\frac{(y - ad)^2}{N_0}\right) dy dx \\ = \frac{1}{2} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp\left(-\frac{(x - kad)^2}{N_0}\right) \cdot \operatorname{erf}\left(\frac{d_i}{k}x - ad\right) / \sqrt{N_0} dx \quad (37)$$

마찬가지로 처음심볼의 크기가  $d$ 이고 다음 심볼의 크기가  $kd$ 인 경우의 조건부 수신성공확률은 다음과 같다.

$$P(m_2 | s_{2,1}, \alpha) = \frac{1}{2} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp\left(-\frac{(x - ad)^2}{N_0}\right) \cdot \operatorname{erfc}\left(\frac{d_i x - kad}{\sqrt{\pi N_0}}\right) dx \quad (38)$$

따라서 0을 전송하는 경우 조건부 오차확률은 다음과 같다.

$$P(e | m_2, \alpha) = 1 - \frac{1}{2} \{P(m_2 | s_{1,2}, \alpha) + P(m_2 | s_{2,1}, \alpha)\} \quad (39)$$

그러므로 처음 비트에 대한 조건부 오차확률은 다음과 같다.

$$P(e | b_1, \alpha) = \frac{1}{2} \{P(e | m_1, \alpha) + P(e | m_2, \alpha)\} \quad (40)$$

나머지 3비트의 조건부 오차확률을 구하자. 임의의 심볼  $S_i$ 가 페이딩 경로를 통과하게 되면, 신호벡터의 크기는 모두 같은 감쇠를 겪는다. 어떤 신호가 페이딩에 의하여 변형되었을 경우 PSK에서는 Square QAM과 마찬가지로 판별영역이 변하게 된다. 각 심볼의 전송확률이 동일하다고 한다면, 한 심볼의 수신확률만 고려하여도 무리가 없다. 크기를  $d$ 라고 한다면 심볼  $s_1$ 을 송신시 수신신호  $s_1$ 을 판별하는 경우는 앞에서와 마찬가지로 수신신호가 판별영역  $Z_1$ 안에 존재하는 경우이며, 전송이 성공할 확률은 다음과 같다.

$$P(s_1 | m_1, \alpha) = \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp\left(-\frac{(x - ad)^2}{N_0}\right) \cdot \operatorname{erf}\left(\frac{x \tan(\pi/8)}{\sqrt{N_0}}\right) \right\} dx \quad (41)$$

$$P(e | s_1, \alpha) = 1 - \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp\left(-\frac{(x - \alpha s_i)^2}{N_0}\right) \cdot \int_0^{x \tan(\pi/8)} \frac{2}{\sqrt{\pi N_0}} \exp\left(-\frac{y^2}{N_0}\right) dy dx \right\} \quad (42)$$

즉 나머지 3비트의 조건부 오차확률은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$P(e | b_{2,3,4}, \alpha) = \frac{1}{2} \{P(e | s_1, \alpha) + P(e | s_2, \alpha)\} \quad (43)$$



전체 심볼당 조건부 오차확률을 표시하면

$$P(e|\alpha) = \frac{1}{4} P(e|b_1, \alpha) + \frac{3}{4} P(e|b_{2,3,4}, \alpha) \quad (44)$$

그레이 부호를 이용하는 경우 8진 PSK에서 오차가 발생시 거의 1비트만 변화한다고 하면 비트당 조건부 오차확률은 다음과 같다.

$$P(e_{BER}|\alpha) = \frac{1}{4} \{P(e|b_1, \alpha) + P(e|b_{2,3,4}, \alpha)\} \quad (45)$$

$$P(e_{BER}) = \int_0^\infty C(\alpha) \cdot P(e_{BER}|\alpha) d\alpha \quad (46)$$

그림 5에서 보듯이 페이딩이 존재하는 채널에서는 star QAM이 더 좋은 성능을 나타낸다. 그러나 전반적으로 페이딩이 존재하는 전송채널을 통과하게 되면, BER은 상당히 낮아지며, 실제 사용하기에는 적합하지 않다.

#### IV. PSAM 방식을 사용한 경우

그림 5, 6에서 나타나듯이 페이딩 채널을 통과하는 경우에는 상당한 오차를 발생시키게 되며, 이것은 페이딩의 포락선에 의하여 각 심볼들의 크기와 위상이 변하기 때문이다. 따라서 페이딩을 극복하기 위한 여러 가지 방법이 제시되었는데<sup>[5,6,7]</sup> 여기에서는 그중 한가지인 파일럿 심볼방식을 이용한 경우에 대하여 수학적 모델을 제시하고, 이에 따라 성능을 평가하였다. 파일럿 심볼방식은 데이터열에 이미 정하여진 파일럿 심볼을 추가시켜 길이 M을 갖는 프레임으로 변환시켜 전송하는 것이다.<sup>[7,13]</sup> 수신측에서는 파일럿 심볼을 추출하고, 심볼의 변화된 크기와 위상을 검출하며, 심볼의 변화량을 수신되는 데이터에 적용시켜 전송심볼의 변화량을 보상한다. 즉 파일럿 심볼에 의하여 나머지 심볼의 페이딩 정보가 결정되고 이것으로 페이딩의 영향을 감소시키게 된다. 그러므로 정보값은 실제로 데이터 심볼과 각각에 해당하는 파일럿 심볼과의 차에 의

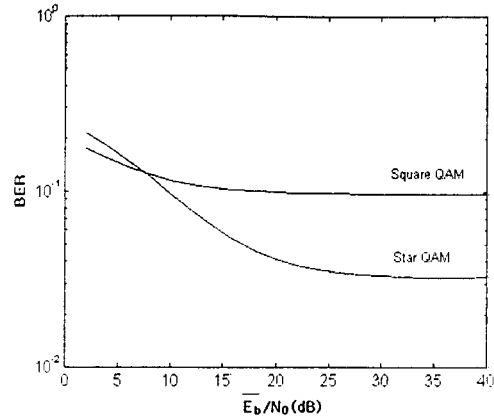


그림 5. 페이딩 채널에서의 QAM 성능

Fig. 5. QAM performance under fading.

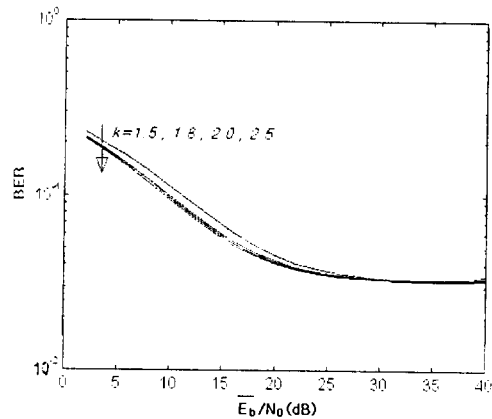


그림 6. 페이딩 채널에서 k 값에 따른 star QAM의 성능

Fig. 6. Star QAM performance for different k under fading channel.

해서만 그 값이 결정된다. 즉 한 프레임내에는 이미 약속되어 있는 1개의 파일럿 심볼과 M-1 개의 데이터 심볼이 존재하게 된다. 페이딩이 시간에 대하여 느리게 변하므로, 적당한 길이의 한 프레임내에서는 데이터 심볼들과 파일럿 심볼은 동일한 페이딩 영향을 받게 될 것이다. 따라서 수학적으로 모델화하는 경우 각 확률판정영역에 대한 기준은 파일럿 심볼이 받는 페이딩에 따라 변화한다고 할 수 있

다.

#### 4-1 Square QAM

Square QAM인 경우 페이딩 경로를 통과한다면, 신호의 판별기준은  $\pm[0, \pm 2ad]$ 와  $\pm[\pm 2ad, \pm \infty]$ 이며, 수신기에서는 파일럿 심볼을 이용하여 매 프레임당  $\alpha$ 를 계산하고 적용시킨다. 이러한 환경에서 조건부 확률은 다음과 같다.

i.  $i=0,4,8,12$ 인 경우

$$P(S_i | m_A, \alpha) = \int_0^{2ad} \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp\left(-\frac{(x-ad)^2}{N_0}\right) \cdot \int_0^{2ad} \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp\left(-\frac{(y-ad)^2}{N_0}\right) dy dx$$

$$= \text{erf}^2\left(-\frac{ad}{\sqrt{\pi N_0}}\right) \quad (47)$$

마찬가지로

ii.  $i=1,2,5,6,9,10,13,14$ 인 경우

$$P(S_i | m_B, \alpha) = \frac{1}{2} \text{erf}\left(\frac{ad}{\sqrt{\pi N_0}}\right) \cdot \text{erfc}\left(-\frac{ad}{\sqrt{\pi N_0}}\right) \quad (48)$$

iii.  $i=3,7,11,15$ 인 경우

$$P(S_i | m_C, \alpha) = \int_{2ad}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp\left(-\frac{(x-3ad)^2}{N_0}\right) \cdot \int_{2ad}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp\left(-\frac{(y-3ad)^2}{N_0}\right) dy dx$$

$$= \frac{1}{4} \text{erfc}^2\left(-\frac{ad}{\sqrt{\pi N_0}}\right) \quad (49)$$

$$P(e | m_j, \alpha) = 1 - P(S_i | m_j, \alpha) \quad (50)$$

$$P(e | m_j) = \int_0^{\infty} C(\alpha) \cdot P(e | m_j, \alpha) d\alpha \quad (51)$$

앞에서와 마찬가지로 구하면 파일럿 심볼을 사용하였을 경우의 BER을 구할 수 있다.

#### 4-2 Star QAM

파일럿 심볼을 사용하지 않았을 경우에는 처음 비트를 차동부호화 하여 BER을 계산하였다. 이것은 비동기 방식을 사용할 수 있으며, 페이딩에 좀더 강한면을 지니고 있는 장점 때문이었다. 그러나 파일럿 심볼방식을 사용하게 되면, 차동부호화를 쓰지 않고도 비동기 방식을 사용할 수 있는 장점이 생긴다. 그러므로 여기서는 차동부호화를 사용하지 않고 파일럿 심볼을 이용하여 검출한 페이딩 포락선을 이용하여 검출할 경우의 오차확률을 보이겠다. 이 경우 판별기준은  $\alpha$ 에 따라 변하며,  $\frac{\alpha(1+k)d}{2}$ 를 판별기준으로 하여 판별기준보다 작으면 0이 판별기준보다 크면 1이 전송된 것으로 정하겠다. 먼저 페이딩 채널에서 차동부호화를 하지 않았을 경우의 조건부 확률밀도는 다음과 같다.

$$f(m_i | s_i, \alpha) = C(\alpha) \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \cdot \exp\left(-\frac{(x-\alpha s_i)^2}{N_0}\right) \quad (52)$$

여기에서  $s_0 = d, s_i = kd$ 이다.

따라서 처음 비트가 0인 심볼을 전송하는 경우의 수신 확률은

$$P(m_i | s_0) = \int_0^{\infty} \int_0^{\frac{\alpha(k+1)d}{2}} f(m_i | s_0, \alpha) dx d\alpha$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} C(\alpha) \text{erf}\left(\frac{\alpha(k-1)d}{2N_0}\right) d\alpha \quad (53)$$

마찬가지로 처음 비트가 1인 심볼을 전송하는 경우의 수신 확률은

$$P(m_i | s_1) = \int_0^{\infty} \int_{\frac{\alpha(k+1)d}{2}}^{\infty} f(m_i | s_1, \alpha) dx d\alpha$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} C(\alpha) \text{erf}\left(\frac{\alpha(1-k)d}{2N_0}\right) d\alpha \quad (54)$$

$$P(e | b_1) = 1 - \frac{1}{2} \{ P(m_i | s_0) + P(m_i | s_1) \} \quad (55)$$

나머지 3비트의 조건부 오차확률을 구하자. 이 경우 나머지 3비트의 조건부 오차확률은 반지름이  $s_i$ 인 8진 PSK가 페이딩 채널에서 동작하는 경우와 동일하므로 앞에서의 마찬가지로 다음과 같다.

$$P(e | b_{2,3,4}) = \int_0^\infty C(\alpha) \left[ 1 - \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp\left(-\frac{(x - \alpha s_i)^2}{N_0}\right) \int_0^{\tan(\pi/8)} \frac{2}{\sqrt{\pi N_0}} \exp\left(-\frac{y^2}{N_0}\right) dy dx d\alpha \right] \quad (56)$$

그레이 부호를 이용하는 경우 8진 PSK에서 오차가 발생시 거의 1비트만 변화한다고 하면 비트당 오차확률은 다음과 같다.

$$P(e_{BER}) = \frac{1}{4} \{ P(e | b_1) + P(e | b_{2,3,4}) \} \quad (57)$$

그림 7~9 에 페이딩 채널에서 PSAM 방식을 이용하였을 경우의 시스템 성능을 나타내었다. 앞

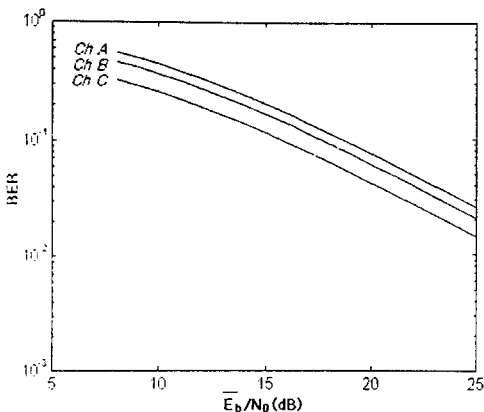


그림 7. PSAM 방식을 사용하였을 경우 star QAM의 성능

Fig. 7. Star QAM performance using PSAM.

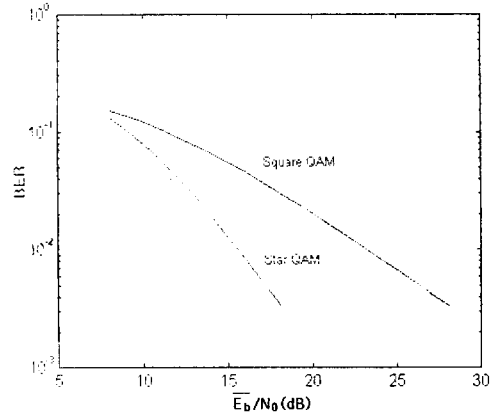


그림 8. PSAM 방식을 사용하였을 경우 square QAM 및 star QAM 성능 비교

Fig. 8. Square QAM and star QAM performance using PSAM.

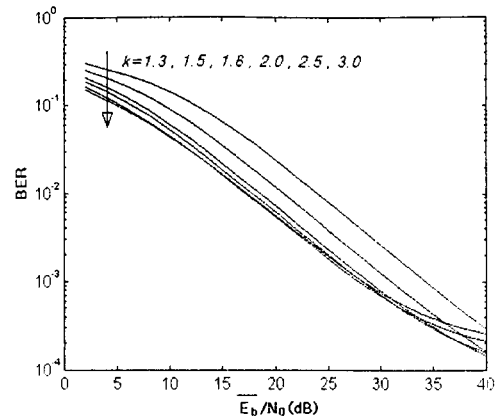


그림 9. PSAM 방식을 사용하였을 경우 k 값에 따른 star QAM의 성능

Fig. 9. Star QAM performance using PSAM for different k.

의 그림과 비교해 보면 확실히 성능이 개선되었음을 알 수 있다.

Cavers가 제안한 바에 의하여<sup>[7]</sup> PSAM 변수를

결정하고, 파일럿 심볼당 데이터 심볼의 수를 정하게 되면 파일럿 심볼에 의한 에너지는 전체 에너지의 0.2~2%이며, 파일럿 심볼에 의한 전력 손실을 무시할 수 있으므로 앞의 결과를 이용할 수 있다.

## V. 결 론

이상에서 보듯이 잡음만이 존재하는 채널의 경우에는 유클리디안 거리가 가장 큰 시스템이 가장 좋은 성능을 갖게 된다. 그러므로 star QAM에 대하여 square QAM의 성능이 더 좋으며, star QAM의 경우에도 유클리디안 거리가 가장 큰  $k=1.8$ 인 경우에 성능이 가장 좋다. 그러나 채널에 페이딩이 존재할 경우에는 달라지게 된다. 즉 그림 5에서 보듯이 전반적으로 star QAM의 성능이 더 좋게 된다. 또한 잡음과 페이딩의 영향이 결합하여 SNR이 증가하여도 더 이상 BER이 감소하지 않게 되며, 페이딩 계수에 의한 오차발생율이 잡음이 감소하여도 거의 일정하게 나타나게 되므로 생기는 현상으로 추측한다. 그러나 전반적으로 어떠한 시스템도 통상 사용하기에 충분한 BER 나타나지 않으므로 이러한 오차를 줄이기 위하여 다른 방식을 선택하여야 한다. 보통 TTIB (Transparent Tone Band Modulation) 방식과 PSAM (Pilot Symbol Assisted Modulation) 방식을 사용하는데 여기서는 두 번째인 PSAM 방식을 사용하여 페이딩의 영향을 최소화하기로 하였다.

PSAM 방식은 전송 데이터를 프레임 단위로 만들고, 각 프레임에 파일럿 심볼을 첨가하여 전송하는 방식이며, 여기에서는 채널과 프레임이 이상적, 즉 각 프레임당 파일럿 심볼은 항상 수신되고, 한 프레임 내에서 데이터는 파일럿 심볼과 동일한 페이딩의 영향을 받는다고 가정하고 수학적 모델링을 제시하였다. 그림 7,8에서 보듯이 PSAM 방식을 사용하게 되면 페이딩이 존재하는 채널의 경우에도 상당한 성능개선을 갖게 되며, 더욱이 star QAM 방식이 square QAM에 비하여 더 뛰어난 성능을

갖게 된다. 이 경우 star QAM은 안쪽 원과 바깥쪽 원의 반지름 비가 중요한 변수로 작용하게 되는데, 잡음만이 존재하는 채널의 경우에는 유클리디안 거리가 가장 큰  $k=1.8$ 일 때이고, 그림 9에 나타났듯이 SNR이 낮은 경우에는  $k$ 값이 증가할수록 더 좋은 성능을 갖게 되며, SNR이 증가하면서  $k$ 값에 대한 변화를 하게 된다. 통상적으로  $k$ 는 2에서 3까지의 값을 갖지만, 이것은 페이딩의 영향과 잡음의 영향을 고려하여 결정하여야 하는 것이고, 페이딩의 영향보다 잡음의 영향이 클 경우에는  $k$ 값을 조금 작게 페이딩의 영향이 클 경우에는  $k$ 값을 조금 크게 해주는 것이 바람직하다.

## 참 고 문 헌

- [1] L. Hanzo, R. Steel and P.M. Fortune, "A Subband Coding BCH Coding and 16-QAM System for Mobile Radio Speech Communications", *IEEE Trans. on Veh. Techn.*, Vol 39, No 4, Nov. 1990, pp 327-340.
- [2] P. M. Fortune, L.Hanzo and R.Steele, "On the computation of 16-QAM and 64-QAM performance on Rayleigh fading channels", *IEICE Trans. Comms.*, Vol. E75-B, No.6, June 1992, pp 466-475.
- [3] L. Hanzo, R. Salami, R. Steele and P.M. Fortune, "Transmission of Digitally Encoded Speech at 1.2 Kbd for PCN", *IEE Proceedings*, Part I, Vol. 139, No. 4, Aug. 1992, pp 437-447.
- [4] K. H. H. Wong and L. Hanzo *Channel coding*, Pentech Press, 1992 Chapter 4, pp. 347-488.
- [5] A. Bateman and J. P. McGeehan, "The use of transparent tone in hand for coherent data schemes", *IEEE Int. Conf. Comms.*, Boston, Mass., 1983.

- [6] A. Bateman and J. P. McGeehan, "Feedforward transparent tone in band for rapid fading protection in mutipath fading", *IEE Int. Conf. Comms.* Vol. 68, 1986, pp 9-13.
- [7] J. K. Cavers "An Analysis of Pilot Symbol Assisted Modulation for Rayleigh Fading Channels", *IEEE Tr. on Veh. Techn.*, Vol. 40, No. 4, Nov. 1991, pp. 686-693.
- [8] B. Sklar, *Digital communications*, Prentice Hall, 1988.
- [9] W. T. Webb and L. Hanzo *Modern QAM* IEEE Press, Pentech Press, 1994.
- [10] Y. C. Chow, A. R. Nix and J. P. McGeehan, "Analysis of 16-APSK modulation in AWGN and Rayleigh fading channels", *Electronics Letters*, Vol. 28, No. 17, Aug 1992, pp 1608-1609.
- [11] 진년강 "아날로그와 디지털 통신" 청문각 12장 1996.
- [12] R. Stedman, H. Gharavi, L. Hanzo and R. Steele, "16-QAM Transmission of Sub-band Coded Images via Microcelluar Mobile Channels", *IEEE Tr. on Video Systems*, 1992.
- [13] R. Steel, *Mobile Radio Communications*, Pentech Press, U. K., 1992.

임 성 준

한국전자통신연구원 재직

유 흥 균

1982년 2월 서울대학교 전자공학과(공학사)

1984년 2월 서울대학교 전자공학과(공학석사)

1989년 2월 서울대학교 전자공학(공학박사)

1988년 2월~현재 충북대학교 전자공학과 교수

[관심분야] 디지털 통신, 회로설계, 통신 신호처리