

상태 변환을 이용한 선형 시변 시스템에 대한 강건한 제어

The Robust Control for a Linear Time-Varying System using State Transformation

조도현, 이상효
(Do-Hyeoun Cho and Sang-Hyo Lee)

Abstract : This paper is focussed on the problem of robustly stabilizing a transformable linear time-varying system. The considered system is a class of state feedback transformable linear systems. First, the real linear time-varying system is transformed into the linear time invariant system composed with the time-invariant linear part and the time-varying uncertainty part. Second, the solution to a quadratic stabilization problem in the transformed linear system is given via Lyapunov methods. Then this solution is used to construct a stabilizing linear control law for the real linear time-varying system.

Keywords : uncertain linear time-varying system, time-dependent state transformation, robust quadratic stabilization

I. 서론

본 논문에서는 선형 시변 시스템에 대한 강건성 문제에 대하여 논의한다. 일반적으로, 선형 시변 시스템에 대한 제어 문제 논의는 많은 연구자에 의하여 제시되어 왔다. 이와 같은 제어 문제는 최적 제어, 적응 제어 등 여러 가지 제어 기법을 적용하여 왔다. 특히, 최근에는 선형 시변 시스템에 대한 강건성 문제에 H_∞ 제어 이론 및 LQG/LTR 등을 적용하여, 상태 공간 영역에서 서술하고 있으며, 얻어진 해는 Riccati 미분 방정식을 풀어야 한다[1][2]. 그리고 선형 시변 시스템에 제어 기법을 적용하기 위하여, 선형 시불변 시스템의 기법을 그대로 적용하는데는 시간 함수로 표현된 시스템의 행렬로 복잡해지며, 계산량의 증가를 초래한다.

본 연구에서는 선형 시변 시스템을 선형 시불변 시스템으로 변환하여 기존에 선형 시불변 시스템에서 제시된 강건성 제어 기법을 적용하고자 한다. 이를 위하여, 먼저 공칭 선형 시변 시스템이 선형 시불변 시스템으로 변환되기 위한 조건과 시간 종속 상태 변환의 구조를 2장에서 제시한다. 3장에서는 실제 선형 시변 시스템이 선형 시불변 시스템으로 변환되기 위한 불확실성의 유계 범위를 제시하며, 공칭 선형 시변 시스템의 시간 종속 상태 변환과 궤환 입력을 적용하여, 상태 변환된 시스템을 얻는다. 변환된 시스템은 선형 시불변 시스템 부분과 시간 함수를 가지는 섭동항으로 표현된다. 즉, 불확실성을 가지는 선형 시변 시스템이, 변환에 의하여 선형 시불변 시스템에 시변 불확실성이 포함되는 시스템으로 표현되며, 이를 기초로 하여 기존에 여러 연구자에 의하여 연구된 결과를 적용한다[3][4]. 그래서, 선형 시변 시스템의 강건성을 시변 불확실성을 가지는 선형 시불변 시스템의 강건성 문제로 변환한 것이다.

4장에서는 선형 시변 시스템의 간단한 예를 통하여 제시된 기법의 타당성을 제시하며, 5장에서는 결론을 제시하였다.

II. 선형 시변 시스템의 변환

먼저 선형 시변 시스템(LTV)의 변환을 고려하기 위하여 다음과 같은 단일 입력 출력 시스템을 고려하자.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(t)x + B(t)u \\ y &= C(t)x \end{aligned} \quad (1)$$

여기서, 상태 x 는 $x \in R^n$ 이며, 행렬 $A(t) \in R^{n \times n}$, $B(t) \in R^{n \times 1}$ 및 $C(t) \in R^{1 \times n}$ 는 시간 t 에 유계된 함수이다. (1)로 표현된 선형 시변 시스템의 상태 방정식이 입력-상태의 선형 시불변 시스템으로 변환되기 위한 $n+1$ 개의 변환(transformation)이 존재한다고 하고, 다음과 같이 정의하자.

$$\begin{aligned} z_i &= T_i(x, t), T_i: R^n \times R \rightarrow R, (i=1, \dots, n) \\ T_{j+1}(x, t) &= \hat{T}_j(x, t), j=1, 2, 3, \dots, n-1 \\ v &= T_{n+1}(x, u, t), T_{n+1}: R^n \times R \times R \rightarrow R \end{aligned} \quad (2)$$

이와 같은 변환 T 를 사용하면, 선형 시변 시스템 (1)은 다음과 같이 표현된다.

$$\dot{z} = A_B z + B_B v \quad (3)$$

그러면, (1)에 시간종속 상태변환 (2)을 사용하여 얻어진 (3)은 선형 시불변 시스템이 되며, 시스템의 행렬 A_B, B_B 는 원점에 n 개의 다중 극점을 갖는 Brunovsky 표준형을 가지기 때문에, (3)의 시스템은 제어 가능하다. 이러한 변환을 얻기 위한 (2)의 시간종속 상태변환은 다음의 정리 1과 같이 요약된다.

정리 1 : 선형 시변 시스템 (1)이 Brunovsky 표준형 (3)으로 상태-입력 변환되기 위한, 시간종속 변환 $T_i (i=1, \dots, n, n+1)$ 는 다음 조건을 만족해야 한다.

$$\begin{aligned} \langle dT_{ix}, B(t) \rangle &= 0 \\ T_{i+1} &= \langle dT_{ix}, A(t)x \rangle + \langle dT_{it}, 1 \rangle, i=1, \dots, n-1 \\ T_{n+1} &= \langle dT_{nx}, A(t)x + B(t)u \rangle + \langle dT_{nt}, 1 \rangle \end{aligned} \quad (4)$$

여기서, $\langle f, g \rangle = \sum_i f_i g_i$ 와

$$dT_{ix} = \left[\frac{\partial T_i}{\partial x_1}, \frac{\partial T_i}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial T_i}{\partial x_n} \right] \text{을 의미한다.}$$

증명 : 부록 A 참조.

이 변환은 비선형 시스템에 대한 상태 궤환 선형화를 위한 변환과 유사한 특성을 가진다[5][6][7][8]. 즉, 시간종속 상태변환 $T = [T_1, T_2, \dots, T_n, T_{n+1}]^T$ 는 다음과 같은 특성을 가진다.

접수일자 : 1997. 5. 13., 수정완료 : 1998. 1. 20.

조도현 : 삼성생명과학연구소

이상효 : 광운대학교 제어계측공학과

* 본 논문은 1997년도 교내 학술 연구비로 연구하였습니다.

(1) $x=0, t=0$ 일 때, $T=0$ 이다.

(2) 변환 $T_i(i=1, \dots, n)$ 는 상태 x 와 시간 t 만의 함수이다. 즉, 입력 u 에 대하여 독립이다.

(3) 변환 $T_i(i=1, \dots, n)$ 는 상태 x 에 대하여 정칙 Jacobian 행렬을 가지며, R^n 상의 집합에서 R^n 상의 집합으로 사상되며, 일대일 대응관계를 가진다. 그리고 변환 T_i, T_i^{-1} 는 유계이다.

(4) 변환 T_{n+1} 은 상태 x , 시간 t 와 입력 u 의 함수이며, 입력 u 에 대하여 가역적이며, 일대일 대응된다. 다음으로 정리 1에서 논의한 시간상대 종속변환 T_i 가 존재하기 위한 필요 충분 조건에 대하여 논의한다.

정리 2 : 정리 1의 시간 종속 변환 T_i 가 존재하기 위한 필요 충분 조건은 다음과 같다.

벡터집합 $[W_0, W_1, \dots, W_{n-1}]$ 은 선형 독립이다.

벡터집합 $[W_0, W_1, \dots, W_{n-2}]$ 은 포함적(involutive)이다.

여기서, $W_0 = B(t)$ 이고, $W_{k+1} = -A(t)W_k + \frac{d}{dt}(W_k)$, ($k=0, 1, \dots, n-2$) 를 의미한다.

증명 : 부록 D 참조.

그러므로 정리 2로부터 선형 시변 시스템 (1)이 선형 시불변 시스템 (3)으로 변환되기 위한 필요 충분 조건은 먼저 시스템의 가제어성이 성립하여야함을 의미한다. 즉, 제안된 변환에 의하여 시스템의 가제어성은 불변이며, 변환된 선형 시불변 시스템의 안정화를 통하여, 선형 시변 시스템의 안정화를 얻을 수 있다.

다음으로 정리 2의 증명에서 첫 번째 시간종속 상태변환 T_1 에 대한 조건 (d-9)와 (d-13)을 다시 쓰면 다음과 같다.

$$\langle dT_1, ad_F^i(G) \rangle = 0, i=0, 1, \dots, n-2 \quad (5)$$

$$\langle dT_1, ad_F^{n-1}(G) \rangle \neq 0 \quad (6)$$

위 (5)와 (6)을 만족하는 상태변환 T_1 을 얻으면, Lie 도함수 표현과 (4)를 이용하여 n 개의 상태변환을 찾는 것이다. 또한, (4)의 변환 T_{n+1} 로부터 시스템의 입력 u 와 변환된 선형 시불변 시스템의 입력 v 사이의 관계는 다음과 같다.

$$u = -\frac{L_F^n(T_1(x, t))}{L_G L_F^{n-1}(T_1(x, t))} + \frac{1}{L_G L_F^{n-1}(T_1(x, t))} v = A_c(t)x + B_c(t)v \quad (7)$$

여기서, $A_c(t)$ 와 $B_c(t)$ 는 시간의 함수로 각각 $R^{1 \times n}$ 과 $R^{1 \times 1}$ 의 차원을 가진다.

이상에서 정의된 시간종속 상태변환 $T(x, t) = [T_1(x, t), T_2(x, t), \dots, T_n(x, t)]^T$ 을 일반화하여 행렬로 표현하면 다음과 같다.

$$T(x, t) = [T_1(x, t), T_2(x, t), \dots, T_n(x, t)]^T = \begin{bmatrix} \tau_{11}(t) & \tau_{12}(t) & \dots & \tau_{1n}(t) \\ \tau_{21}(t) & \tau_{22}(t) & \dots & \tau_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau_{n1}(t) & \tau_{n2}(t) & \dots & \tau_{nn}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \mathcal{T}(t)x \quad (8)$$

여기서, 시간 종속 변환 T 는 시간만의 함수 행렬 \mathcal{T} 와 상태벡터 x 의 곱으로 표현되며, 시간함수 행렬에서 첫 번째 행의 $\tau_{11}(t), \tau_{12}(t), \dots, \tau_{1n}(t)$ 은 (5)와 (6)에 의하여 얻어지며, 시간종속 상태변환 T_1 에 대한 연속적인 시간의 도함수에 변환의 특성을 대입하여 정리하면, 시간함수 행렬의 두 번째 행부터의 관계는 아래와 같다.

$$\tau_{li}(t) = \tau_{(l-1)i}(t) + \sum_{j=1}^n \tau_{(l-1)j}(t) a_{ji}(t), \quad (l=2, 3, \dots, n, i=1, 2, \dots, n) \quad (9)$$

그리고, 시간종속 상태변환 T_i 가 입력 u 에 독립이라는 조

건에서 시간만의 행렬 요소가 가지는 조건은 다음과 같다.

$$\sum_{j=1}^n \tau_{lj}(t) b_j(t) = 0, (l=1, 2, \dots, n-1) \quad (10)$$

역시 같은 방법으로 시간종속 상태변환 T_n 을 시간에 대하여 미분하면, 다음과 같이 표현된다.

$$v = T_{n+1}(x, t) = \dot{T}_n(x, t) = \begin{bmatrix} \dot{\tau}_{n1}(t) + \sum_{j=1}^n \tau_{nj}(t) a_{j1}(t) \\ \dot{\tau}_{n2}(t) + \sum_{j=1}^n \tau_{nj}(t) a_{j2}(t) \\ \vdots \\ \dot{\tau}_{nn}(t) + \sum_{j=1}^n \tau_{nj}(t) a_{jn}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \sum_{j=1}^n \tau_{nj}(t) b_j(t) u = -B_c^{-1}(t)A_c(t)x + B_c^{-1}(t)u \quad (11)$$

앞 (2)의 정의로부터 (8)의 시간 종속 상태 변환을 다시 표현하면 다음과 같다.

$$z = T(x, t) = \mathcal{T}(t)x \quad (12)$$

$\mathcal{T}, \mathcal{T}^{-1}$ 는 유계 함수이며, 시간종속 상태변환 (12)를 시간에 대하여 미분하고, 선형 시변 시스템 (1)과 제어 입력 (7)을 대입하면 다음과 같이 표현되며, (3)과의 관계를 나타낸다.

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \mathcal{T}(t) \dot{x} + \dot{\mathcal{T}}(t)x \\ &= (\mathcal{T}(t)A(t)\mathcal{T}^{-1}(t) + \mathcal{T}(t)B(t)A_c(t)\mathcal{T}^{-1}(t) + \dot{\mathcal{T}}(t)\mathcal{T}^{-1}(t))z + \mathcal{T}(t)B(t)B_c(t)v \\ &= A_B z + B_B v \end{aligned} \quad (13)$$

그러므로 (1)로 표현된 선형 시변 시스템은 시간종속 상태변환 T 에 의하여 선형 시불변 시스템 (3)으로 변환된다. 즉, (1)의 시스템에 대한 제어문제를 변환 시스템 (3)에서 고려할 수 있다. 이와 같은 과정을 도식적으로 표현하면 그림 1과 같다.

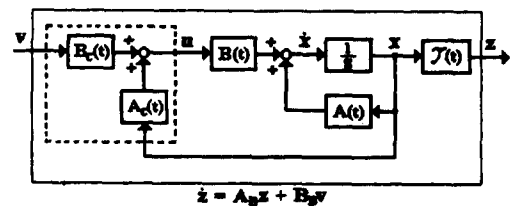


그림 1. 선형 시변 시스템의 변환.
Fig. 1. The transformation of a linear time-varying system.

그림 1에 도식된 것과 같이 선형 시변 시스템은 정리 2의 조건에서 선형 시불변 시스템의 가제어성이 성립하면, 시간종속 상태변환과 외부입력 v 에 의하여 선형 시불변 시스템으로 변환되어, 가장 많이 알려진 선형 시불변 제어책을 적용할 수 있는 장점을 제시하고 있다.

다음으로 불확실성을 상태와 입력 행렬에 가지는 선형 시변 시스템에 대한 문제를 고려하자.

III. 불확실성을 가지는 선형 시변 시스템의 강건안정화

단일 입출력의 실제 선형 시변 시스템을 다음과 같이 고려하자.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \hat{A}(t)x + \hat{B}(t)u \\ y &= C(t)x \end{aligned} \quad (14)$$

이 절에서는 출력 방정식에 불확실성이 존재하지 않는다고

가정하고, 공칭 선형 시변 시스템 (1)과 비교하면 다음과 같이 불확실성이 표현된다.

$$\begin{aligned} \Delta A(t) &= \hat{A}(t) - A(t) \\ \Delta B(t) &= \hat{B}(t) - B(t) \end{aligned} \quad (15)$$

여기서, 불확실성 $\Delta A(t), \Delta B(t)$ 는 각각 상태와 입력 행렬에 존재하는 시변 매개변수 불확실성을 나타내는 실수값 행렬로서, 시간에 대하여 유계된 함수로 표현된다. 많은 연구자들에 의하여, (15)와 같은 불확실성을 가지는 선형 시변 시스템에 대한 연구가 지속적으로 진행되어 왔으며, 불확실성의 강건성 문제를 해결하기 위한 시변 Riccati 미분 방정식의 해를 구하여야 하는 단점을 가진다[3].

본 논문에서는 선형 시변 시스템을 선형 시불변 시스템으로 변환하여, 기존에 제시된 선형 시변의 제어를 고려하고자 한다. 먼저 (14)의 선형 시변 시스템을 선형 시불변 시스템으로의 변환을 고려하기 위한 불확실성의 범위를 고려하여야 한다. 즉, (15)의 불확실성을 가지는 선형 시변 시스템이 불확실성 표현이 없는 선형 시불변 시스템으로 변환되기 위한 불확실성의 유계범위는 다음과 같은 보조정리 1로 표현된다.

- 보조정리 1 :** (15)의 불확실성이 다음과 같은 유계범위를 갖는다면, (14)의 불확실성을 가지는 선형 시변 시스템은 완전 선형 시불변 시스템으로 변환된다.
- ① $\Delta B \in \text{span}\{B\}$
 - ② $[\Delta F, \text{ad}_F^k G] \in \text{span}\{G, \text{ad}_F G, \dots, \text{ad}_F^{k+1} G\}$, ($k = 0, 1, 2, \dots, n-3$)

여기서, $F = [(AX)^T, 1]^T$, $\Delta F = [(\Delta Ax)^T, 0]^T$, $G = [B^T, 0]^T$, $\Delta G = [\Delta B^T, 0]^T$ 로 정의된다.

증명 : 부록 E 참조.

그래서, 이 절에서는 (1)로 표현된 공칭 시스템이 선형 시불변 시스템으로 변환된다는 가정에서, (14)로 표현되는 선형 시변 시스템을 공칭 선형 시변 시스템에서 얻어진 시간 종속 상태 변환과 (7)로 표현된 입력을 사용하여 얻어진 변환 모델에 선형 시불변 시스템에서 얻어진 결과를 적용하여, 불확실성을 가지는 선형 시변 시스템의 강건 안정화를 얻는 것이다.

먼저 불확실성을 가지는 선형 시변 시스템 (14)의 상태 방정식에 공칭 선형 시변 시스템에서 얻어진 상태 변환 $T(x, t)$ 와 궤환 입력 (7)을 적용하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \dot{\gamma}(t)x + \gamma(t)\dot{x} \\ &= \dot{\gamma}(t)x + \gamma(t)\hat{A}(t)\gamma^{-1}(t)z \\ &\quad + \gamma(t)\hat{B}(t)(A_c(t)\gamma^{-1}(t)z + B_c v) \\ &= (\dot{\gamma}(t)A(t)\gamma^{-1}(t) + \gamma(t)B(t)A_c(t)\gamma^{-1}(t) \\ &\quad + \dot{\gamma}(t)\gamma^{-1}(t))z + \gamma(t)B(t)B_c(t)v \\ &\quad + (\dot{\gamma}(t)\Delta A(t)\gamma^{-1}(t) + \gamma(t)\Delta B(t)A_c(t)\gamma^{-1}(t) \\ &\quad + \gamma(t)\Delta B(t)B_c(t)v \end{aligned} \quad (16)$$

공칭 선형 시변 시스템의 변환 과정인 (13)을 적용하면, 다음과 같다.

$$\dot{z} = A_B z + B_B v + \Delta A_B(t)z + \Delta B_B(t)v \quad (17)$$

여기서, $\Delta A_B(t), \Delta B_B(t)$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \Delta A_B(t) &= \gamma(t)\Delta A(t)\gamma^{-1}(t) \\ &\quad + \gamma(t)\Delta B(t)A_c(t)\gamma^{-1}(t), \\ \Delta B_B(t) &= \gamma(t)\Delta B(t)B_c(t) \end{aligned} \quad (18)$$

(17)과 (18)을 비교하면, 불확실성을 가지는 선형 시변 시스템의 시간 종속 상태 궤환 변환은 선형 시불변 시스템의 부분과 시간 섭동항을 가지는 항으로 표현된다. 즉, (14)로 표현된 선형 시변 시스템의 강건성 문제는 (17)로 표현된 시변 불확실성을 가지는 선형 시불변 시스템의 강건성 문제로 변환되었다. 그러므로 과거 다른 연구자에 의하여 많이 연구되어온 결과를 쉽게 적용할 수 있다.

그리고, (18)로 표현된 (17)의 섭동항은 유계된 시간 함수이다. 왜냐하면, 구성 요소인 시간 종속 상태 변환 $\gamma(t)$ 의 가역성과 보조 정리 1에서 제시된 불확실성 $\Delta A(t), \Delta B(t)$ 의 유계, $A_c(t)$ 및 $B_c(t)$ 가 유계이기 때문이다. 그러므로, (18)의 $\Delta A_B(t), \Delta B_B(t)$ 를 다음과 같이 가정할 수 있다[3][4][9][10].

$$[\Delta A_B(t), \Delta B_B(t)] = DF(t)[E_1, E_2] \quad (19)$$

여기서, D, E_1 과 E_2 는 불확실성의 구조를 특성 짓는 알고 있는 상수 행렬이다. 그리고, $F(t) \in R^{k \times j}$ 는 모든 시간 $t \geq 0$ 에 대하여 $F^T(t)F(t) \leq I$ 를 만족하며, Lebesgue 가측인 (measurable) 원소를 가지는 행렬이다. 즉, $F(t)$ 는 불확실성을 나타내며, 행렬 부등식 $F^T(t)F(t) \leq I$ 은 유계의 의미를 나타낸다.

먼저, Barmish[11]의 논문에서 정의된 내용으로부터 (17)로 표현되는 시스템에 대한 안정도의 정의는 다음과 같다.

정의 1 : 입력 v 가 영인 경우, 시스템 (17)은 다음 조건을 만족하면 2차형(quadratically) 안정화될 수 있다.

조건 : 모든 허용 가능한 불확실성 $(z, t) \in R^n \times R$ 에 대하여, Lyapunov 함수 $V(z) = z^T P z$ 의 도함수가 $L(z, t) := \dot{V} = 2z^T P [A_B + \Delta A_B(t)]z \leq -\alpha \|z\|^2$ 을 만족하도록 상수 $\alpha > 0$ 와 $n \times n$ 인 양의 대칭 행렬 P 가 존재한다.

여기서, $\|\cdot\|$ 은 표준 Euclid 놈(Euclidean norm)을 나타낸다. 즉, 시스템 (17)에 대하여 만약 페루프 시스템이 안정하도록 상태 궤환 제어칙 $u(t) = k z(t)$ 가 존재한다면, 시스템 (17)는 선형 상태 궤환에 의하여 2차적으로 안정화된다고 말한다. (19)로부터, $\text{rank}(E_2) = i \leq j$ 로 가정하자. 그리고, $\text{rank}(\Sigma_2) = i$ 와 $E_2^T E_2 = \Sigma_2^T \Sigma_2$ 이 성립하도록 $\Sigma_2 \in R^{i \times m}$ 을 정의하자.

또한, $\Phi \Sigma_2^T = 0, \Phi \Phi^T = I$ (만약 $i = m$ 이면, $\Phi = 0$)이 성립하도록, $\Phi \in R^{(m-i) \times m}$ 를 선택한다. 그리고, $\varepsilon := \Sigma_2^T (\Sigma_2 \Sigma_2^T)^{-2} \Sigma_2$ 라 설정하자. 만약 입력에 불확실성이 존재하지 않는다면, 즉, $E_2 = 0$ 이면, $\Sigma_2 = 0, \varepsilon = 0, \Phi = I$ 이다. 그러나 $\text{rank}(\Sigma_2) = m$ 이면, Σ_2 는 정방이고 비특이이며, $\varepsilon = (\Sigma_2^T \Sigma_2)^{-1} = (E_2^T E_2)^{-1}$ 이고, $\Phi = 0$ 이다.

이때, 시스템 (17)에 대한 강건 안정화의 주요 결과는 보조 정리 2로 주어진다[3].

보조정리 2 : 시스템 (17)이 (20)으로 표현되는 대수 Riccati 방정식이 양으로 한정된 대칭해 P 가 존재하도록 양의 상수 $\varepsilon > 0$ 가 존재한다면, 선형 제어칙에 의하여 2차형식으로 안정화 가능하다.

$$\begin{aligned} & [A_B - B_B \varepsilon E_2^T E_1]^T P + P [A_B - B_B \varepsilon E_2^T E_1] \\ & + P [D D^T - B_B \varepsilon B_B^T - \frac{1}{\varepsilon} B_B \Phi^T \Phi B_B^T] P \\ & + E_1^T \{I - E_2 \varepsilon E_2^T\} E_1 + \varepsilon I = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

이 경우에, 상태 궤환 제어칙은 (21)로 표현된다.

$$\begin{aligned} u(t) &= -\left\{ \left(\frac{1}{2\varepsilon} \Phi^T \Phi + \varepsilon \right) B_B^T P + \varepsilon E_2^T E_1 \right\} z(t) \\ &= -K_\varepsilon z(t) \end{aligned} \quad (21)$$

역으로, 만약 시스템 (17)이 선형 제어칙에 의하여 안정화

가 가능하다면, 이때, $(0, \varepsilon^*)$ 안의 모든 ε 에 대하여, 대수 Riccati 방정식 (20)의 유일해 P_0 는 양으로 한정되고, 페루프의 특성 $[(A - B_B \varepsilon E_2^T E_1) + (DD^T - B_B \varepsilon B_B^T - \frac{1}{\varepsilon} B_B \phi^T \phi B_B^T)P_0]$ 이 점근적으로 안정하도록 $\varepsilon^* > 0$ 가 존재한다. 보조정리 2의 증명은 참고문헌[3]에 있다. (17)에서 입력의 행렬에 섭동항이 존재하지 않는다면 즉, 실제 시스템 (14)에서 입력 행렬에 불확실성이 존재하지 않는다면, Petersen[10]의 결과를 이용하게 되며, (17)에서 상태 행렬의 섭동항 $\Delta A_B(t)$ 가 영이면, Petersen[9]의 결과를 이용한다. (7)로 제시된 제어 규칙은 시변 불확실성을 가지는 (17)의 시스템을 강건 안정화하므로, (14)의 실제 선형 시변 시스템은 모델의 불확실성에 대하여 강건 안정하다. 즉, 실제 선형 시변 시스템을 강건 안정화하는 제어 규칙은 다음과 같다.

$$u = -\frac{L_F^n(T_1(x, t))}{L_G L_F^{n-1}(T_1(x, t))} - \frac{1}{L_G L_F^{n-1}(T_1(x, t))} \left(\left(\frac{1}{2\varepsilon} \phi^T \phi + \varepsilon \right) B_B^T P + \varepsilon E_2^T E_1 \right) T(x, t)x \quad (22)$$

전체 블록 선도는 그림 2와 같이 케환 루프는 두개로 구성되며, 내부 루프는 선형 시변 시스템을 상태-입력 변환을 얻기 위한 경로이며, 외부 루프는 변환된 시스템의 강건 안정화를 얻기 위한 상태 케환 경로이다. 그러므로, 불확실성을 가지는 선형 시변 시스템은 강건 안정화를 이루게 된다.

다음으로 간단한 예를 통하여 제안된 변환의 내용을 살펴보고, 불확실성을 가지는 선형 시변 시스템에 대한 예를 제공하고자 한다.

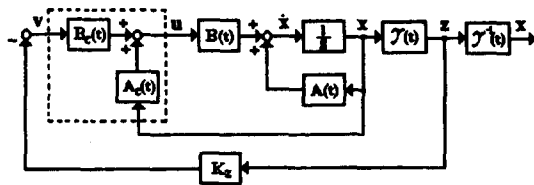


그림 2. 불확실성을 가지는 선형 시변 시스템의 안정화 제어기 도식.

Fig. 2. The scheme of stabilizing controller for a linear time-varying system with uncertainty.

IV. 예제

먼저 시간 종속 변환에 의하여, 선형 시변 시스템이 선형 시불변 시스템으로 변환되는 과정에 대한 예를 보이기 위하여 다음과 같은 선형 시변 시스템을 고려하자.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t & 1 \\ 1 & t^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -t \\ t^2 \end{bmatrix} u \quad (23)$$

정리 2의 조건에 대입하면,

$B(t) = \begin{bmatrix} -t \\ t^2 \end{bmatrix}$, $(A(t) - \frac{d}{dt})B(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2t \end{bmatrix}$ 가 되므로, 시스템의 가제어성이 성립하며, 포함적 성질은 단일 벡터이므로 당연히 성립한다.

첫 번째 시간 종속 상태 변환 T_1 을 얻기 위하여, (5)와 (6)을 이용하면, 다음과 같은 편미분 방정식을 얻는다.

$$\frac{\partial T_1}{\partial x_1} = t \frac{\partial T_1}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial T_1}{\partial x_1} \neq 0$$

위의 편미분 방정식으로부터, 시간 종속 상태 변환 T_1 은 다음과 같이 선택된다.

$$z_1 = T_1 = tx_1 + x_2$$

그리고 (4)에 따라서, 다음과 같이 표현된다.

$$z_2 = T_2 = \dot{T}_1 = (t^2 + 2)x_1 + (t + t^{-1})x_2$$

$$v = T_3 = \dot{T}_2 = (t^3 + 5t + t^{-1})x_1 + (t^2 + 4)x_2 - tu$$

따라서, 시간 종속 상태 변환을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$T = [T_1, T_2]^T = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t & 1 \\ t^2 + 2 & t + t^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$u = (t^2 + 5 + t^{-2})x_1 + (t + \frac{4}{t})x_2 - \frac{v}{t}$$

그러므로, (23)의 선형 시변 시스템은 시간 종속 상태 변환에 의하여 선형 시불변 시스템으로 변환된다.

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v$$

다음으로, 참고 문헌[12]에 있는 감쇠(damped) Mathieu 방정식을 고려하여 보자.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_1(t) & -a_0(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (24)$$

여기서, $a_0(t) = a_0 > 0$, $a_1(t) = \alpha - \beta \cos \omega t > 0$, $\forall t$ 이다.

앞에서와 동일한 방법으로 적용하면, 변환 조건이 만족하고 (5)와 (6)을 통하여 얻은 편미분 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial T_1}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial T_1}{\partial x_1} \neq 0$$

그러므로, 다음과 같이 변환을 선택한다.

$$z_1 = T_1 = x_1$$

$$z_2 = T_2 = \dot{T}_1 = x_2$$

$$v = T_3 = \dot{T}_2 = -a_1(t)x_1 - a_0(t)x_2 + u$$

그러므로, Mathieu 방정식의 선형 시변 시스템은 시간 종속 상태 변환에 의하여 선형 시불변 시스템으로 변환된다.

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v$$

2장에서 시간 종속 상태 변환은 선형 시변 시스템이 가제어성을 만족하면 변환된 선형 시불변 시스템으로 표현하여, 선형 제어치를 설계목적에 따라 설정할 수 있다.

이상으로, 2장에서 제안된 내용을 예제를 통하여 살펴보았으며, 다음으로는 불확실성을 가지는 선형 시변 시스템에 대하여 살펴보자.

참고문헌[13]에 있는 다음과 같은 공칭 선형 시스템 (25)와 실제 선형 시변 시스템 (26)을 고려하자.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin t^2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (25)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin t^2 + 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (26)$$

공칭 선형 시변 시스템 (25)에 대하여, 시간 종속 상태 변환의 조건을 대입하여 조사하면, 정리 2의 조건을 만족하며, (5)와 (6)에 따라서 시간 종속 변환 및 외부 입력의 표현은 다음과 같다.

$$z_1 = T_1 = x_1$$

$$z_2 = T_2 = \dot{T}_1 = \dot{x}_1 = \sin t^2 x_1 + x_2 \quad (27)$$

$$v = T_3 = \dot{T}_2 = \dot{z}_2$$

$$= (2t \cos t^2 + (\sin t^2)^2)x_1 + \sin t^2 x_2 + u$$

위의 (27)을 실제 선형 시변 시스템 (26)에 적용하면, 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 1 - \sin t^2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \quad (28)$$

실제 시스템의 입력 행렬에 불확실성이 존재하지 않으므로, (17)과 비교하여, $\Delta B_B(t)$ 이 존재하지 않는다. 그러므로, (19)에서 E_2 는 영이고, $\phi = I$ 및 $\varepsilon = 0$ 이다. 또한, (19)의 D, E_1 은 다음과 같이 표현된다.

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

그래서, $\varepsilon = 10^{-5}$ 으로 설정하고, (20)의 해 P 을 통하여, (28)을 안정화하는 제어칙은 (21)로 부터 $\phi = I$ 이므로 $\phi^T \phi = I$ 가 성립하여, 다음과 같이 표현된다.

$$P = \begin{bmatrix} 0.25 & 335 \\ 335 & 0 \end{bmatrix}$$

$$v(t) = -\left\{ \frac{1}{2\varepsilon} \right\} B_B^T P z(t) \quad (29)$$

그러므로, 실제 선형 시변 시스템 (26)은 불확실성에 대하여 강건 안정화를 보장할 수 있다.

V. 결론

본 연구에서는 불확실성을 가지는 선형 시변 시스템에 대한 강건성 문제를 시간 종속 상태-입력 변환에 의하여 얻어진 선형 시불변 부분과 시간 종속의 섭동항이 존재하는 시스템으로 변환하여 강건성을 논의하였다. 이 과정에서, 본 연구에서는 선형 시변 시스템이 선형 시불변 시스템으로의 변환을 위한 필요 충분 조건을 제시하고, 불확실성의 유계 범위를 제안하였다. 그리고 변환된 시스템의 강건성을 위하여 선형 시불변 시스템에서 많은 연구자들에 의하여 연구된 결과를 적용하였다. 이 결과로, 선형 시변 시스템의 강건성에서 나타나는 시변 Riccati 미분 방정식을 풀지 않아도 된다는 장점을 가지게 된다. 그러므로, 계산량을 줄여줄 수 있다는 특징을 가지며, 제어칙은 선형 구조를 가지므로 구현하기 쉽다. 그리고 이 결과를 다변수 시스템으로 확장할 수 있을 것이다.

본 연구는 앞으로 입력-출력 변환 및 외란의 비결합을 가지는 선형 시변 시스템에 적용하여 확장하고자 하며, 안정도 문제를 증명하고자 한다.

참고문헌

[1] R. Ravi, K. M. Nagpal & P. P. Khargonekar "H_∞ control of linear time-varying systems : A state space approach," *SIAM J. Control and Optimization*, vol. 29, no. 6, pp. 1349-1413, 1991.

[2] A. Feintuch & B. A. Francis, "Uniformly optimal control of linear time-varying systems," *Systems and Control Letters*, vol. 5, pp. 67-71, 1984.

[3] P. P. Khargonekar, R. Petersen & K. Zhou, "Robust stabilization of uncertain linear systems: quadratic stabilizability and H_∞ control theory," *IEEE Trans. Auto. Contr.*, vol. 35, no. 3, pp. 356-361, 1990.

[4] L. Xie & C. E. de Souza, "Robust H_∞ control for linear systems with norm-bounded time-varying uncertainty," *IEEE Trans. Auto. Contr.*, vol. 37, no.

8, pp. 1188-1191, 1990.

[5] 이종용, "완전 선형화 방법에 의한 로봇트 매니플레이터의 강건한 제어," 광운대학교, 박사학위 논문, 1993.

[6] 이종용, 이상호, "확장된 비선형 궤환 선형화를 이용한 시변 비선형 제어," 전기학회 논문집, vol. 42, no. 5, pp. 97-105, 1993.

[7] M. Vidyasagar, *Nonlinear System Analysis*, Prentice-Hall, 1993.

[8] A. Isidori, *Nonlinear Control Systems*, Springer-Verlag, 1989.

[9] I. R. Petersen, "Stabilization of an uncertain linear system in which uncertain parameters enter into the input matrix," *SIAM J. Contr. Optimiz.*, vol. 26, no. 6, pp. 1257-1264, 1988.

[10] I. R. Petersen, "A stabilization algorithm for a class of uncertain linear systems," *Syst. Contr. Lett.*, vol. 8, pp. 351-357, 1987.

[11] B. R. Barmish, "Necessary and sufficient conditions for quadratic stabilizability of an uncertain linear systems," *J. Optimiz. Theory Appl.*, vol. 46, no. 4, pp. 399-408, 1985.

[12] R. Marino & P. Tomei, "Robust stabilization of feedback linearizable time-varying uncertain nonlinear systems," *Automatica*, vol. 29, no. 1, pp. 181-189, 1993.

[13] K. S. Tsakalis & P. A. Ioannou, *Linear Time-Varying Systems Control and Adaptation*, Prentice Hall, 1993.

[14] J. J. E. Slotine & W. Li, *Applied Nonlinear Control*, Prentice-Hall, 1991.

부록

부록 A : 정리 1의 증명은 다음과 같다.

증명 : 상태 변환 $T_i (i=1, \dots, n-1)$ 를 시간 t 에 대하여 미분하면 다음과 같이 표현된다.(각각의 T_i 에 대한 결과는 부록 A에 있으며, 표현의 간략화를 위하여 변환의 매개변수는 생략하였다.)

$$T_{i+1} = \dot{T}_i = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial T_i}{\partial x_j} \right) \dot{x}_j + \frac{\partial T_i}{\partial t} \quad (a-1)$$

$$= \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial T_i}{\partial x_j} \right) \left(\sum_{k=1}^n a_{jk}(t) x_k + b_j(t)u \right) + \frac{\partial T_i}{\partial t}$$

여기서, $a_{jk}(t), b_j(t), (k, j = 1, 2, \dots, n)$ 는 각각 행렬 $A(t), B(t)$ 의 원소이다.

(a-1)에서 (2)에서 정의한 시간종속 상태변환 $T_i (i=1, \dots, n)$ 는 입력 u 에 대하여 독립이므로, 다음이 성립한다.

$$\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial T_i}{\partial x_j} \right) b_j(t) = \langle dT_{ix}, B(t) \rangle = 0$$

그러므로, (a-1)은 다음과 같이 표현된다.

$$\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial T_i}{\partial x_j} \right) \left(\sum_{k=1}^n a_{jk}(t) x_k \right) + \frac{\partial T_i}{\partial t}$$

$$= \langle dT_{ix}, A(t)x \rangle + \langle dT_{it}, 1 \rangle \quad (a-2)$$

그리고, 변환 T_n 을 시간 t 에 대하여 미분하면 다음과 같다.

$$T_{n+1} = \langle dT_{n+1}, (A(t)x + B(t)u) \rangle + \langle dT_{n+1}, 1 \rangle \quad (a-3)$$

이상으로 정리 1이 증명되었다. ■

부록 B : 부록 B는 (a-1), (a-2) 및 (a-3)의 내용을 좀더 자세하게 각각 항에 대하여 기술한다. 먼저, (2)에서 $z_i = T_i(x, t)$ 이므로, 시간에 대하여 미분하면 다음과 같다. 표현을 간단히 하기 위하여 변환의 인수는 생략한다.

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \dot{T}_1(x, t) = \frac{\partial T_1}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial T_1}{\partial t} \\ &= \frac{\partial T_1}{\partial x} (A(t)x + B(t)u) + \frac{\partial T_1}{\partial t} \\ &= \frac{\partial T_1}{\partial x} A(t)x + \frac{\partial T_1}{\partial t} + \frac{\partial T_1}{\partial x} B(t)u \\ &= z_2 \end{aligned} \quad (b-1)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_2 &= \dot{T}_2(x, t) = \frac{\partial T_2}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial T_2}{\partial t} \\ &= \frac{\partial T_2}{\partial x} (A(t)x + B(t)u) + \frac{\partial T_2}{\partial t} \\ &= \frac{\partial T_2}{\partial x} A(t)x + \frac{\partial T_2}{\partial t} + \frac{\partial T_2}{\partial x} B(t)u \\ &= z_3 \end{aligned} \quad (b-2)$$

⋮

$$\begin{aligned} \dot{z}_{n-1} &= \dot{T}_{n-1}(x, t) = \frac{\partial T_{n-1}}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial T_{n-1}}{\partial t} \\ &= \frac{\partial T_{n-1}}{\partial x} (A(t)x + B(t)u) + \frac{\partial T_{n-1}}{\partial t} \\ &= \frac{\partial T_{n-1}}{\partial x} A(t)x + \frac{\partial T_{n-1}}{\partial t} + \frac{\partial T_{n-1}}{\partial x} B(t)u \\ &= z_n \end{aligned} \quad (b-3)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_n &= \dot{T}_n(x, t) = \frac{\partial T_n}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial T_n}{\partial t} \\ &= \frac{\partial T_n}{\partial x} (A(t)x + B(t)u) + \frac{\partial T_n}{\partial t} \\ &= \frac{\partial T_n}{\partial x} A(t)x + \frac{\partial T_n}{\partial t} + \frac{\partial T_n}{\partial x} B(t)u \\ &= v \end{aligned} \quad (b-4)$$

이와같은 전개된 (b-1), (b-2), (b-3)에서 입력 u 에 대하여 독립이므로 다음이 성립한다.

$$\frac{\partial T_i}{\partial x} A(t)x + \frac{\partial T_i}{\partial t} = T_{i+1}, \quad i=1, 2, \dots, n-1 \quad (b-5)$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} B(t) = \frac{\partial T_2}{\partial x} B(t) = \dots = \frac{\partial T_{n-1}}{\partial x} B(t) = 0 \quad (b-6)$$

다시 표현하면, 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \langle dT_{i+1}, A(t)x \rangle + \langle dT_{i+1}, 1 \rangle &= T_{i+1}, \\ (i=1, 2, \dots, n-1) \end{aligned} \quad (b-7)$$

$$\begin{aligned} \langle dT_1, B(t) \rangle &= \langle dT_2, B(t) \rangle = \dots \\ &= \langle dT_{n-1}, B(t) \rangle = 0 \end{aligned} \quad (b-8)$$

여기서, dT_{i+1} 는 $\frac{\partial T_{i+1}}{\partial t}$ 를 나타낸다.

그리고, (b-4)와 (2)의 내용으로부터 다음이 성립한다.

$$\frac{\partial T_n}{\partial x} A(t)x + \frac{\partial T_n}{\partial t} = \langle dT_n, A(t)x \rangle + \langle dT_n, 1 \rangle \quad (b-9)$$

$$\frac{\partial T_n}{\partial x} B(t) = \langle dT_n, B(t) \rangle \neq 0 \quad (b-10)$$

여기서, (b-7), (b-8), (b-9) 및 (b-10)은 (4)와 동가이며, 이 조건을 만족하여야 선형 시변 시스템 (1)이 선형 시불변 시

스템 (3)으로 변환된다.

부록 C : 부록 C에서는 미분 기하학에서 사용되는 표준 표기, Lie Bracket과 Lie 도함수 등에 대하여 간단히 기술한다.

(1) f 와 g 가 R^n 상의 C^∞ 의 벡터장이라 할 때, Lie Bracket $[f, g]$ 는 R^n 상의 C^∞ 벡터장으로서 다음과 같이 정의된다.

$$[f, g] = \frac{\partial g}{\partial x} f - \frac{\partial f}{\partial x} g \quad (c-1)$$

여기서, $\frac{\partial g}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial x}$ 는 Jacobian 행렬이다.

(2) 반복적인 Lie Bracket의 표현은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} ad_f^0(g) &= g \\ ad_f^1(g) &= [f, g] \\ ad_f^2(g) &= [f, [f, g]] \\ &\vdots \\ ad_f^k(g) &= [f, ad_f^{k-1}(g)] \end{aligned} \quad (c-2)$$

(3) f, g 가 R^n 상의 C^∞ 의 벡터장이라 하고, h 가 R^n 상의 C^∞ 의 스칼라 함수라 할 때, f 에 대한 h 의 Lie 도함수는 f 와 h 의 경도(gradient)의 내적으로 표시되며, $L_f(h)$ 로 표시하며, R^n 상의 C^∞ 의 스칼라 함수이다.

$$L_f(h) = \langle dh, f \rangle = \sum_{i=1}^n \frac{\partial h}{\partial x_i} f_i \quad (c-3)$$

그리고, 다음의 Leibniz 관계식 또는 Jacobi 항등식이 성립한다.

$$\langle dh, [f, g] \rangle = \langle d\langle dh, g \rangle, f \rangle - \langle d\langle dh, f \rangle, g \rangle \quad (c-4)$$

기타 자세한 사항은 참고 문헌[14]를 참조하십시오.

부록 D : 정리 2의 증명은 다음과 같다.

증명 : 이 증명은 비선형 시스템의 상태 궤환 선형화의 경우와 동가이다[7][8]. 먼저, 표현의 간략화를 위하여, 선형 시변 시스템의 (1)에서 각 항을 다음과 같이 설정하자.

$$\begin{aligned} f(x, t) &= A(t)x \\ &= \left[\sum_{j=1}^n a_{1j}(t)x_j, \sum_{j=1}^n a_{2j}(t)x_j, \dots, \sum_{j=1}^n a_{nj}(t)x_j \right]^T \\ &\in R^n \end{aligned} \quad (d-1a)$$

$$\begin{aligned} g(x, t) &= B(t) \\ &= [b_1(t), b_2(t), \dots, b_n(t)]^T \in R^n \end{aligned} \quad (d-1b)$$

그리고, 상태와 시간의 확장된 변수를 $X = [x^T, t]^T$ 로 표시하고, 다음과 같이 변수를 설정한다.

$$F = [f(x, t)^T, 1]^T \quad (d-2a)$$

$$G = [g(x, t)^T, 0]^T \quad (d-2b)$$

그러면, $W_0 = ad_F^0(G)$ 이고, $W_i = ad_F^{i-1}(G)$, ($i=1, \dots, n-1$)이다.

시간 종속 변환 T 에 대하여, Leibniz 관계를 이용하면 다음이 성립한다[7][8][14]. 표현을 간략히 하기 위하여 각 항의 인수는 생략하며, Lie 도함수 및 Lie Bracket에 관한 사항은 부록 C에 있다.

$$\langle dT, [f, g] \rangle = \langle d\langle dT, g \rangle, f \rangle - \langle d\langle dT, f \rangle, g \rangle \quad (d-3)$$

그러면, 정리 2의 첫 번째 조건은 선형 시변 시스템의 제어 가능성(controllability)을 나타낸다. 필요조건의 증명을 위하여 (2)로 정의된 시간종속 상태변환이 존재한다고 가정하자. 그리고 정리 2의 조건이 만족하는가를 보인다. 그러면, (4)로부터 다음과 같이 표현된다.

$$\langle dT_1, G \rangle = \langle (dT_{1x}, dT_{1t}), (g, 0) \rangle = \langle dT_{1x}, B(t) \rangle \quad (d-4a)$$

$$\langle dT_1, F \rangle = \langle (dT_{1x}, dT_{1t}), (f, 1) \rangle = T_2 \quad (d-4b)$$

그리고, (4)에서 $i=2$ 인 경우(부록 B의 (b-2))에 (d-3)을 사용하고 $\langle dT_{2x}, B(t) \rangle = 0$ 에 대입하면 다음과 같다.

$$\langle d \langle dT_1, F \rangle, G \rangle = \langle d \langle dT_1, G \rangle, F \rangle - \langle dT_1, [F, G] \rangle \quad (d-5)$$

Lie bracket, 반복적인 Lie bracket과 $\langle dT_1, G \rangle = 0$ 이므로 (d-5)는 다음과 같다.

$$\langle dT_1, [F, G] \rangle = 0 \quad (d-6)$$

여기서, $[F, G]$ 는 Lie bracket으로 다음과 같다.

$$[F, G] = \begin{bmatrix} [f, g] + \frac{\partial g}{\partial t} \\ 0 \end{bmatrix} = -A(t)B(t) + \frac{d}{dt}B(t) \quad (d-7)$$

이와 같이 반복하여, 적용하면 다음이 성립한다.

$$\langle dT_1, ad_F^i(G) \rangle = 0, i=0, 1, \dots, n-2 \quad (d-8)$$

$$\langle dT_1, ad_F^{n-1}(G) \rangle \neq 0 \quad (d-9)$$

필요조건 중 먼저 벡터집합 $[W_0, W_1, \dots, W_{n-1}]$ 이 선형 독립임을 보이기 위하여, 임의의 정수 $k(k \leq n-1)$ 에 대하여 다음이 성립하는 스칼라 함수 $\alpha_0(X), \alpha_1(X), \dots, \alpha_{k-1}(X)$ 가 있다고 가정하자. 그러면, 다음이 성립한다.

$$ad_F^k(G) = \sum_{j=0}^k \alpha_j(X) ad_F^j(G) \quad (d-10)$$

또한, 다음이 성립한다.

$$ad_F^{n-1}(G) = \sum_{j=n-k-1}^{n-2} \alpha_j(X) ad_F^j(G) \quad (d-11)$$

이때, (d-8)으로부터 다음이 성립한다.

$$dT_1 \cdot ad_F^{n-1}(G) = \sum_{j=n-k-1}^{n-2} \alpha_j(X) ad_F^j(G) = 0 \quad (d-12)$$

이것은 (d-9)의 모순이다. 그러므로, 벡터집합 $[W_0, W_1, \dots, W_{n-1}]$ 은 선형독립이다.

다음으로 정리 2의 두 번째 조건에 대하여 살펴보면, Frobenius 정리와 (d-8)에서 $n-1$ 개의 편미분 방정식을 만족하는 스칼라 함수 T_1 의 존재로부터 (d-8)과 (d-9)는 벡터 집합 $[W_0, W_1, \dots, W_{n-2}]$ 이 포합적이라는 것을 나타낸다.

다음으로 충분조건에 대하여 살펴보면, 정리 2의 두 번째 포합적 조건으로부터 다음을 만족하는 영이 아닌 스칼라 함수 $T_1(x, t) = T_1(X)$ 가 존재한다. 그러므로 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} L_G(T_1(X)) &= L_{[F, G]}(T_1(X)) = \dots \\ &= L_{ad_F^{n-1}(G)}(T_1(X)) = 0 \end{aligned} \quad (d-13)$$

(d-13)에서, L 은 Lie 도함수를 나타낸다. 위의 편미분 방정식은 Lie bracket의 성질을 이용하여 다음과 같은 편미분 방정식의 집합으로 표현된다.

$$\begin{aligned} L_G(T_1(X)) &= L_G L_F(T_1(X)) = \dots \\ &= L_G L_F^{n-2}(T_1(X)) = 0 \end{aligned} \quad (d-14)$$

이 편미분 방정식은 (d-8)과 동가이다. 또한 벡터집합 $[W_0, W_1, \dots, W_{n-1}]$ 이 선형 독립이라면, Lie bracket과 Jacobi 항등식[14]을 적용하면 (d-9)가 유도된다. 그러므로 (d-9)와 (d-13)을 만족하기 위한 필요충분 조건은 정리 2의 조건과 같다. ■

부록 E : 보조정리 1의 증명은 다음과 같다.

먼저 공칭 선형 시변 시스템의 변환 T_1 이 불확실성을 가지는 선형 시변 시스템의 변환 \hat{T}_1 이라 하자.

$$\hat{T}_1 = T_1 \quad (e-1)$$

다음과 같이 \hat{T}_1 을 시간에 대하여 미분하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \hat{T}_2 &= \dot{\hat{T}}_1 = \frac{\partial T_1}{\partial x} \left(\frac{dx}{dt} \right) + \frac{\partial T_1}{\partial t} \\ &= \frac{\partial T_1}{\partial x} (Ax + \Delta Ax + Bu + \Delta Bu) + \frac{\partial T_1}{\partial t} \\ &= \frac{\partial T_1}{\partial x} (Ax + Bu) + \frac{\partial T_1}{\partial x} \Delta Ax + \frac{\partial T_1}{\partial x} \Delta Bu \\ &\quad + \frac{\partial T_1}{\partial t} \end{aligned} \quad (e-2)$$

공칭 선형 시변 시스템의 상태 변환 조건에 의하여 $\frac{\partial T_1}{\partial x} B = 0$ 이고, 보조정리 1의 조건 ①에 의하여 $\Delta B \in \text{span}\{B\}$ 이므로, $\frac{\partial T_1}{\partial x} \Delta B = 0$ 이 성립한다. 그러므로, (e-2)는 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \hat{T}_2 &= \frac{\partial T_1}{\partial x} (A + \Delta A)x + \frac{\partial T_1}{\partial t} \\ &= \frac{\partial T_1}{\partial x} Ax + \frac{\partial T_1}{\partial t} + \frac{\partial T_1}{\partial x} \Delta Ax \end{aligned} \quad (e-3)$$

또한, 다음과 같이 정의를 사용하면,

$$\begin{aligned} X &= [x^T, t]^T, F = [(AX)^T, 1]^T, G = [B^T, 0]^T, \\ \Delta F &= [(\Delta Ax)^T, 0]^T, \Delta G = [\Delta B^T, 0]^T, \hat{F} = F + \Delta F, \\ \hat{G} &= G + \Delta G \end{aligned}$$

(e-3)는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \hat{T}_2 &= \left[\frac{\partial T_1}{\partial x}, \frac{\partial T_1}{\partial t} \right] \begin{bmatrix} Ax \\ 1 \end{bmatrix} + \left[\frac{\partial T_1}{\partial x}, \frac{\partial T_1}{\partial t} \right] \begin{bmatrix} \Delta Ax \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \left[\frac{\partial T_1}{\partial x}, \frac{\partial T_1}{\partial t} \right] \left\{ \begin{bmatrix} Ax \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta Ax \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \\ &= \frac{\partial T_1}{\partial X} \hat{F} = L_F T_1 \end{aligned} \quad (e-4)$$

즉, 보조정리 1의 ①조건은 $\Delta G \in \text{span}\{G\}$ 이므로, $\Delta G = \alpha G$ 로 놓을 수 있다. 여기서, α 는 임의의 상수이다. 그러므로, 변환 \hat{T}_2 가 입력 u 에 대하여 독립이 성립한다.

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial T_1}{\partial x}, \frac{\partial T_1}{\partial t} \right] \left\{ \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta B \\ 0 \end{bmatrix} \right\} Y &= \frac{\partial T_1}{\partial X} \hat{G} = L_G T_1 \\ &= L_{(1+\alpha)G} T_1 = (1+\alpha) L_G T_1 \\ &= 0 \end{aligned} \quad (e-5)$$

다음으로, 변환 \hat{T}_2 을 시간에 대하여 미분하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \hat{T}_3 &= \dot{\hat{T}}_2 = \frac{\partial \hat{T}_2}{\partial x} \left(\frac{dx}{dt} \right) + \frac{\partial \hat{T}_2}{\partial t} \\ &= \frac{\partial \hat{T}_2}{\partial x} (Ax + \Delta Ax + Bu + \Delta Bu) + \frac{\partial \hat{T}_2}{\partial t} \\ &= \frac{\partial \hat{T}_2}{\partial x} Ax + \frac{\partial \hat{T}_2}{\partial x} \Delta Ax + \frac{\partial \hat{T}_2}{\partial t} + \frac{\partial \hat{T}_2}{\partial x} (B + \Delta B)u \\ &= \left[\frac{\partial \hat{T}_2}{\partial x}, \frac{\partial \hat{T}_2}{\partial t} \right] \begin{bmatrix} Ax \\ 1 \end{bmatrix} + \left[\frac{\partial \hat{T}_2}{\partial x}, \frac{\partial \hat{T}_2}{\partial t} \right] \begin{bmatrix} \Delta Ax \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\quad + \left[\frac{\partial \hat{T}_2}{\partial x}, \frac{\partial \hat{T}_2}{\partial t} \right] \left\{ \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta B \\ 0 \end{bmatrix} \right\} u \\ &= L_F \hat{T}_2 + L_G \hat{T}_2 u = L_F^2 T_1 + L_G L_F T_1 u \end{aligned}$$

$$= L_F^2 T_1 - (1+\alpha) L_{[\Delta F, G]} T_1 u \quad (e-6)$$

여기서, 입력 u 의 항은 다음과 같은 과정을 통하여 얻어진다.

$$\begin{aligned} L_G L_F T_1 &= L_F L_G T_1 - L_{[F, G]} T_1 = -L_{[F, G]} T_1 \\ &= -(1+\alpha) L_{[F, G]} T_1 - (1+\alpha) L_{[\Delta F, G]} T_1 \\ &= -(1+\alpha) L_{[\Delta F, G]} T_1 \end{aligned}$$

보조정리 1의 조건 ②에 의하여, $[\Delta F, G] \in \text{span}\{G, [F, G]\}$ 이므로, $L_{[\Delta F, G]} T_1 = 0$ 이 된다. 그래서 \hat{T}_3 는 u 에 독립이다. 즉, $L_G L_F T_1 = 0$ 이다.

$$\hat{T}_3 = L_F^2 T_1 \quad (e-7)$$

또한, \hat{T}_3 을 시간에 대하여 미분하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \hat{T}_4 &= \dot{\hat{T}}_3 = \frac{\partial \hat{T}_3}{\partial x} \left(\frac{dx}{dt} \right) + \frac{\partial \hat{T}_3}{\partial t} \\ &= L_F \hat{T}_3 + L_G \hat{T}_3 u = L_F^3 T_1 + L_G L_F^2 T_1 u \end{aligned} \quad (e-8)$$

여기서, 입력의 항을 정리하면, (e-9)로 간략화 된다.

$$\begin{aligned} L_G L_F^2 T_1 &= L_F^2 L_G T_1 - 2L_F L_{[F, G]} T_1 + L_{ad_F^2 G} T_1 \\ &= L_{ad_F^2 G} T_1 \end{aligned} \quad (e-9)$$

한편, (e-9)의 $ad_F^2 \hat{G}$ 는 다음과 같이 정리된다.

$$\begin{aligned} ad_F^2 \hat{G} &= (1+\alpha) ad_F^2 G \\ &= (1+\alpha) ad_F^2 G + (1+\alpha)[F, [\Delta F, G]] \\ &\quad + (1+\alpha)[\Delta F, [F, G]] + (1+\alpha) ad_F^2 G \end{aligned} \quad (e-10)$$

여기서, (e-10)는 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$\begin{aligned} [F, [\Delta F, G]] &= [F, \beta_1 G + \beta_2 ad_F G] \\ &= \beta_1 [F, G] + \beta_2 [F, [F, G]] \\ [\Delta F, [\Delta F, G]] &= [\Delta F, \beta_1 G + \beta_2 ad_F G] \\ &= \beta_1 [\Delta F, G] + \beta_2 [\Delta F, ad_F G] \end{aligned}$$

여기서, β_1, β_2 는 영이 아닌 임의 상수이다. 그러므로 (e-10)는 다음과 같이 요약된다.

$$\begin{aligned} ad_F^2 \hat{G} &= (1+\alpha) ad_F^2 G + (1+\alpha) \beta_1 ad_F G \\ &\quad + (1+\alpha) \beta_2 ad_F^2 G + (1+\alpha) [\Delta F, ad_F G] \\ &\quad + (1+\alpha) \beta_1 [\Delta F, G] + (1+\alpha) \beta_2 [\Delta F, ad_F G] \\ &= (1+\alpha) \beta_1 ad_F G + (1+\alpha)(1+\beta_2) ad_F^2 G \\ &\quad + (1+\alpha) \beta_1 [\Delta F, G] + (1+\alpha)(1+\beta_2) [\Delta F, ad_F G] \end{aligned}$$

그러므로 (e-9)는, $L_{ad_F G} T_1 = L_{ad_F^2 G} T_1 = L_{[\Delta F, G]} T_1 = 0$ 이므로, 다음과 같이 간략화 된다.

$$\begin{aligned} L_{ad_F^2 G} T_1 &= (1+\alpha) \beta_1 L_{ad_F G} T_1 + (1+\alpha)(1+\beta_2) L_{ad_F^2 G} T_1 \\ &\quad + (1+\alpha) \beta_1 L_{[\Delta F, G]} T_1 + (1+\alpha)(1+\beta_2) L_{[\Delta F, ad_F G]} T_1 \\ &= (1+\alpha)(1+\beta_2) L_{[\Delta F, ad_F G]} T_1 \end{aligned}$$

그러므로, (e-8)은 다음과 같다.

$$\hat{T}_4 = \dot{\hat{T}}_3 = L_F^3 T_1 + (1+\alpha)(1+\beta_2) L_{[\Delta F, ad_F G]} T_1 u \quad (e-11)$$

여기서, 보조정리 1의 조건 ②에 의하여 $[\Delta F, ad_F G] = \text{span}\{G, [F, G], [F, [F, G]]\}$ 이므로, $L_{[\Delta F, ad_F G]} T_1 = 0$ 가 된다. 그러므로 \hat{T}_4 는 입력 u 에 대하여 독립이다. 또한, $L_G L_F^2 T_1 = 0$ 이다. 최종적으로 (e-8)은 다음과 같이 표현된다.

$$\hat{T}_4 = L_F^3 T_1 \quad (e-12)$$

이와 같은 과정을 반복 적용하면, \hat{T}_n 은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \hat{T}_n &= \dot{\hat{T}}_{n-1} = \frac{\partial \hat{T}_{n-1}}{\partial x} \left(\frac{dx}{dt} \right) + \frac{\partial \hat{T}_{n-1}}{\partial t} \\ &= L_F^{n-1} T_1 + L_G L_F^{n-2} T_1 u \end{aligned} \quad (e-13)$$

(e-13)의 마지막 항 $L_G L_F^{n-2} T_1$ 에 Liebniz 공식을 적용하면, 다음과 같다.

$$\begin{aligned} L_G L_F^{n-2} T_1 &= L_F^{n-2} L_G T_1 - (n-2) L_F^{n-3} L_{ad_F G} T_1 \\ &\quad + \frac{(n-2)(n-3)}{2!} L_F^{n-4} L_{ad_F^2 G} T_1 \\ &\quad + \frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{3!} L_F^{n-5} L_{ad_F^3 G} T_1 \\ &\quad + \dots + (-1)^{n-2} L_{ad_F^{n-2} G} T_1 \end{aligned} \quad (e-14)$$

여기서, $L_G T_1 = L_{ad_F G} T_1 = \dots = L_{ad_F^{n-2} G} T_1 = 0$ 이므로, (e-14)는 다음과 같다.

$$L_G L_F^{n-2} T_1 = (-1)^{n-2} L_{ad_F^{n-2} G} T_1 \quad (e-15)$$

$ad_F^{n-2} G$ 에 대하여, Lie Bracket 연산을 적용하면, $\beta_{n-2} [\Delta F, ad_F^{n-3} G]$ 로 표현되어, 이로부터 $L_G L_F^{n-2} T_1 = (-1)^{n-2} \beta_{n-2} L_{[\Delta F, ad_F^{n-3} G]} T_1$ 이 성립된다. 여기서, β_{n-2} 는 임의의 영이 아닌 상수이다. 또한 보조정리 1의 조건 ② $[\Delta F, ad_F^{n-3} G] = \text{span}\{G, ad_F G, \dots, ad_F^{n-2} G\}$ 에 의하여, $L_G L_F^{n-2} T_1 = 0$ 이 된다. 그러므로 \hat{T}_n 은 입력 u 에 대하여 독립이 되며, 다음과 같이 표현된다.

$$\hat{T}_n = \dot{\hat{T}}_{n-1} = L_F^{n-1} T_1 \quad (e-16)$$

그러므로 보조정리 1의 조건을 가지는 선형 시변 시스템은 공칭 선형 시변 시스템의 변환 T_1 에 의하여 완전 선형 시불변 시스템으로 변환된다. 이상으로 보조정리 1의 증명이 완료되었다. 또한 불확실성을 가지는 선형 시변 시스템의 완전 선형 시불변화를 위한 불확실성 유계 범위가 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\textcircled{1} \Delta B \in \text{span}\{B\} \Leftrightarrow \Delta G \in \text{span}\{G\}$$

$$\textcircled{2} [\Delta F, ad_F^k G] \in \text{span}\{G, ad_F G, \dots, ad_F^{k+1} G\}$$

$$\Leftrightarrow [\Delta A, W^k] \in \text{span}\{W_0, W_1, \dots, W_{k+1}\},$$

$$(k=0, 1, 2, \dots, n-3)$$

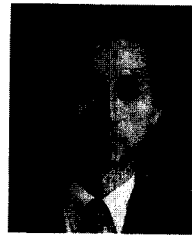
그리고 보조정리 1의 조건은 모델의 정합 조건, $\Delta A = \beta A, \Delta B = \alpha B$ 을 포함하므로, 기존의 모델 정합을 확장한 것이다. ■



조도현

1987년 광운대 공대 전자공학과 졸업.
1990년 동 대학원 전자공학과 졸업(석사). 1991년~1993년 LG전자 중앙연구소 근무. 1998년 광운대 대학원 제어계측공학과 졸업(공학박). 현재 삼성생명과학연구소 근무. 관심분야는 강건성 제어

설계, PLC응용, 로봇 제어.



이상효

1981년 연세대 전기공학과 졸업(공학박).
1980년 광운대 공대 전자공학과 조교수.
1983년~1984년 캘리포니아대학(버클리) 객원 연구원 현재 광운대 공대 제어계측공학과 교수. 관심분야는 강건성 제어 설계, PLC응용.