

경계요소법을 이용한 파랑의 처오름높이 산정

○조용식¹⁾, 김영택²⁾, 이종인³⁾, 이정규⁴⁾

1. 서론

심해에서 발생한 파랑이 상대적으로 수심이 얇은 해안선근처로 전파해오면 수심의 변화와 같은 지형적인 영향과 파랑 상호간의 작용 및 해안구조물의 간섭 등으로 인하여 파랑의 특성이 변화한다. 그러므로, 해안선 근처에서 방조제나 방파제 등 연안 구조물을 건설하기 위해서는 파랑의 특성을 해석하여 이를 고려한 설계를 해야 한다.

일반적으로 바람에 의해 생성된 파랑이나 지진해일 또는 조석 등은 단일파(single wave)로 존재하지 않고 일정한 주기를 갖고 반복하는 주기파(periodic wave)의 형태로 존재한다. 본 연구에서는 정현파를 이용하여 파랑의 최대 처오름높이를 조사한다.

정현파의 처오름높이는 다른 파랑의 처오름높이 계산과 비교하여 비교적 쉽기 때문에 이론적인 방법을 이용하여 많이 연구되어 왔다. Kaplan (1955)은 수리모형실험을 통해 정현파의 최대 처오름높이를 산정하는 실험공식을 제안하였으며, Keller와 Keller (1964) 및 Goto와 Shuto (1983)는 선형이론을 이용하여 정현파의 처오름높이를 해석적으로 계산하였다. 최근에 Fujima (Liu 등, 1994)는 너비 7m, 길이 11m의 수조에서 정현파를 이용하여 원형섬에서의 최대 처오름높이를 관측하였다. 본 연구에서는 해석적인 방법과 경계요소법으로 정현파의 처오름높이를 계산하여 비교한다.

2. 이론적 배경

경계요소법은 비회전 흐름(irrotational flow 또는 potential flow) 문제의 수치해석에 있어 임의의 형태를 갖는 지형에도 큰 어려움 없이 적용할 수 있으며, 요소의 크기를 쉽게 조절할 수 있고, 또한 모든 수치오차는 경계에 제한할 수 있으므로 유한차분법 또는 유한요소법에 비하여 매우 효율적이며, 정확한 수치해를 제공하는 것으로 알려져 있다.

Laplace 방정식을 해석하기 위한 경계요소법에서는 속도포텐셜 함수(Φ) 및 속도포텐셜 함수에 관한 1차 도함수($\partial\Phi/\partial n$)에 관한 적분 방정식 (1)을 해석하여야 한다. 본 연구에서는 식 (2)의 무차원 변수를 사용한다.

$$\alpha \Phi_P = \int_{\partial D} \left[\Phi_Q \frac{\partial}{\partial n} (\ln r) - \ln r \frac{\partial \Phi_Q}{\partial n} \right] ds \quad (1)$$

$$t = t' \sqrt{g/h'}, \quad (x, z) = (x', z') \frac{1}{h'}, \quad (\zeta, H, R) = (\zeta', H', R') \frac{1}{h'} \quad (2)$$

식 (1)에서 아래첨자 P 와 Q 는 각각 기저점(base point)과 목표점(target point)을 나타내며, ∂D 는 영

-
- 1) 한양대학교 공과대학 토목공학과 조교수
 - 2) 한양대학교 대학원 토목공학과 연구조교
 - 3) 한국건설기술연구원 수자원환경연구부 해안항만그룹 선임연구원
 - 4) 한양대학교 공과대학 토목공학과 교수

역 D 의 경계, r 은 기저점과 목표점 사이의 직선거리를 나타내며, α 는 P 에서의 각도를 나타낸다. 또한, 식 (1)의 우변항에서 \vec{n} 은 영역으로부터 외부로 향하는 단위수직벡터(outward unit normal vector)를 표시하며, ds 는 요소의 길이, $\ln r$ 은 2차원 Laplace 방정식의 free space Green 함수이다. 그리고 식 (2)에서 ζ 는 자유수면변위, H 는 파고, h 는 수심을 나타낸다. 본 연구의 결과는 모두 식 (2)을 이용하여 무차원화한 것이다.

수치모형을 위한 조파수조에서 자유수면에는 두 개의 경계조건, 즉 운동학적 경계조건과 동력학적 경계조건이 설정된다. 최대 처오름높이를 결정하기 위해 경사부분의 격자점은 경사를 따라서 이동한다. 초기조건은 조파기에 의해 발생하는 파랑의 수평성분 유속으로 주어지며, 조파기에는 경사에서 되돌아오는 반사파가 조파기와 어떠한 간섭 없이 영역을 빠져나갈 수 있도록 하기 위한 방사경계조건이 설정되었다. Liu와 Cho (1994)에서 사용되었던 자유수면의 경계조건과 조파기에서의 방사조건(식 (5))은 다음과 같다.

$$\frac{\partial \zeta_*}{\partial t} = \frac{1}{\cos(\beta - \gamma)} \frac{\partial \Phi}{\partial n} \quad (3)$$

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)_{x_*} = -(x_* \sin \gamma + \zeta_* \cos \gamma) - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial s} \right)^2 - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)^2 - 2 \tan(\beta - \gamma) \frac{\partial \Phi}{\partial s} \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right] \quad (4)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = c \frac{\partial \psi}{\partial n} - 2c \frac{d\zeta}{dt} \quad (5)$$

식 (3)과 식 (4)는 각각 운동학적 경계조건과 동력학적 경계조건을 나타낸다. 새로운 좌표계 (x_*, z_*) 는 경사지역의 자유수면 격자점을 이동시키기 위해 설정한 좌표이며, 하부첨자는 고정된 위치를 의미한다, β 는 자유수면과 수평축이 이루는 각이며, γ 는 경사부분의 자유수면의 격자점의 이동경로를 지정하기 위한 각으로 θ 에 따라 결정되며, 각 β 와 γ 는 모두 반시계 방향으로 측정된 것이다.

본 연구에서는 격자간에 선형요소 방법을 이용하였다. 즉 각 요소내에서 포텐셜함수와 포텐셜함수의 1차 도함수는 각 요소내에서 선형으로 변환한다고 본다.

경계요소법을 이용한 수치해석 과정을 요약하면, 첫째, 주어진 영역에서 적분방정식 (1), 즉 Laplace 방정식을 해석한다. 둘째, 유한차분법으로 차분화한 자유수면 경계조건 및 방사조건, 즉 식 (3), (4)와 (5)를 이용하여 다음 시간단계로 자유수면을 이동시킨다. 자유수면 경계조건은 비선형항을 포함하므로 반복 계산에 의해 선형화한다. 셋째, 새로이 계산된 자유수면을 경계로 하여 다시 Laplace 방정식을 해석한다. 이와 같은 과정을 입사파가 경계에서 반사되어 영역을 빠져나갈 때까지 반복한다.

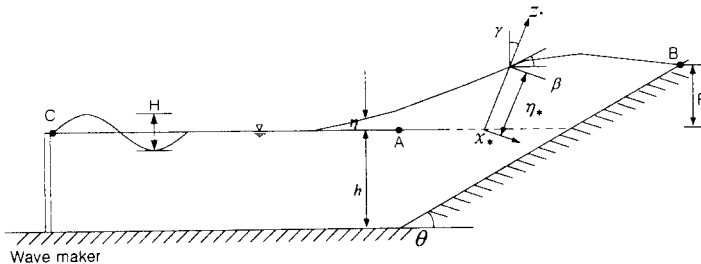


그림 1. Definition sketch of numerical wave tank and run-up

3. 경계 요소법을 이용한 정현파의 처오름높이

정현파의 수치실험은 그림 1과 같은 조파수조를 이용하였다. 조파수조의 길이는 경사지형을 제외하고

파장의 0.75배(무차원길이=15.0), 수심은 무차원길이 1.0을 사용하였다. 조파수조의 길이를 상대적으로 짧게 한 이유는 조파수조의 길이가 길면 파랑의 진행과정에서 조파기에서 발생시킨 원래 크기의 파랑이 전파하지 못하고 파고가 줄어들므로 이를 방지하기 위해서 조파수조의 길이를 줄인 것이다. 그렇지만 수리실험에서와 마찬가지로 수로의 길이가 짧은 경우, 반사파의 영향으로 정확한 결과를 얻을 수 없으나, 이번의 수치 실험에서는 조파기에서의 경계조건에 방사경계조건을 적용함으로써 경사면에서 반사되어 나온 파랑이 조파기에서 다시 반사하지 않고 통과하도록 하였다.

방사경계조건은 매우 만족할 만한 결과를 제공한다(그림 2 참고). 특히 그림 2와 그림 3에서는 경사면이 시작되는 위치(A)와 최대처오름이 발생하는 위치(B) 그리고 조파기(C)에 파고계를 설치하여 파랑의 진행과정, 생성 및 최대 처오름높이를 계측하였다. 그림 2는 경사면의 각도가 10° 이며 무차원 주기가 20일 경우에 대한 파랑의 진행과정 및 최대 처오름에 대한 그림이며, 그림 3은 경사면의 각도가 45° 인 경우이다. 그림 2에서 볼 수 있듯이 짧은 점선은 A지점에서 파랑의 진행과정을 나타내는 것이다. 위에서 언급했듯이 조파기에서의 방사경계조건이 잘 적용되고 있음을 알 수 있다. 물론 파랑의 크기도 조파기에서 발생시킨 $H/2=0.5$ 가 잘 진행함을 볼 수 있다. 그리고 실선은 점 B에서 즉, 경사면을 따른 파랑의 처오름높이를 나타낸 것이다. 이는 아래의 표 1에 정리되어 있으며 그 결과를 도시한 것이 그림 4이다. 그림 4는 x 축($H/2$)과 y 축(run-up height: R)에 각각 log를 취해 표현한 것으로, 각각의 축에 log를 취할 경우 결과 값이 선형분포에 가깝게 plot됨을 볼 수 있으며 그 결과를 회귀분석한 것이 식 (6)이다.

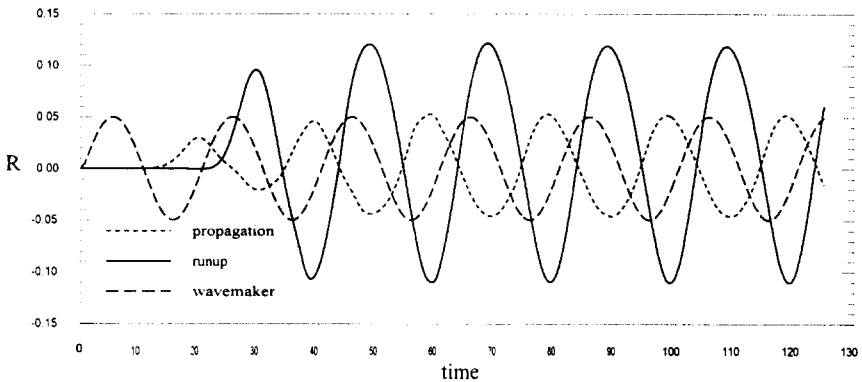


그림 2. Time history of sinusoidal wave propagation and run-up ($\theta=10^\circ$)

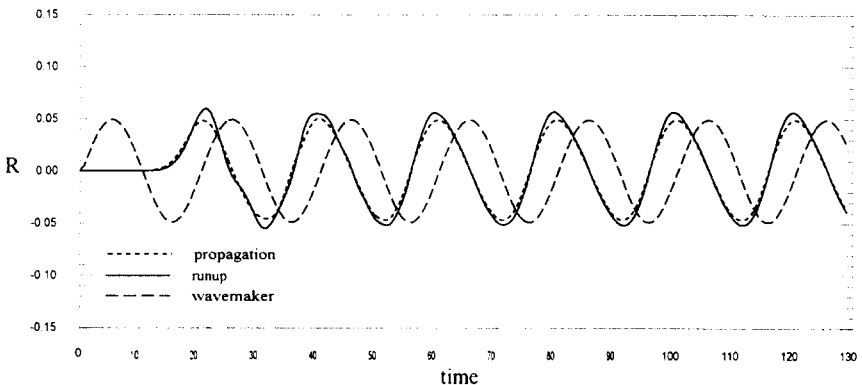


그림 3. Time history of sinusoidal wave propagation and run-up ($\theta=45^\circ$)

표 1. The run-up height of sinusoidal waves($\theta = 10^\circ$ $L = 20$)

H/2	1st	2nd	3rd	4th	5th	average
0.010	0.018384	0.023104	0.023349	0.023152	0.023123	0.023182
0.015	0.027730	0.034816	0.035157	0.034821	0.034760	0.034889
0.018	0.033395	0.041896	0.042286	0.041852	0.041767	0.041950
0.023	0.042916	0.053599	0.054293	0.053624	0.053486	0.053751
0.027	0.050598	0.063396	0.063931	0.063092	0.062907	0.063332
0.033	0.062217	0.077963	0.078608	0.077387	0.077169	0.077782
0.037	0.070020	0.087790	0.088509	0.087019	0.086750	0.087517
0.040	0.075900	0.095227	0.096002	0.094288	0.093979	0.094874
0.045	0.085747	0.107807	0.108626	0.106499	0.106126	0.107265
0.050	0.095651	0.120600	0.121433	0.118846	0.118408	0.119822
0.055	0.105606	0.133631	0.134435	0.131351	0.130842	0.132565
0.060	0.115614	0.146924	0.147652	0.144033	0.143439	0.145512
0.065	0.125674	0.160516	0.161104	0.156908	0.156213	0.158685
0.070	0.135789	0.174404	0.174788	0.170028	0.169307	0.172132
0.075	0.145992	0.188570	0.188728	0.194222	0.182025	0.188386

$$R = 2.6476H^{1.0317} \quad (\theta = 10^\circ, L = 20) \quad (6)$$

표 2. The run-up heights of sinusoidal waves($\theta = 45^\circ$, $L = 20$)

H/2	1st	2nd	3rd	4th	5th	average
0.025	0.029723	0.027395	0.027366	0.027796	0.027843	0.027600
0.030	0.035829	0.032893	0.033066	0.033634	0.033618	0.033303
0.034	0.040748	0.037319	0.037715	0.038340	0.038324	0.037925
0.037	0.044465	0.040661	0.041257	0.041909	0.041904	0.041433
0.040	0.048188	0.044017	0.044860	0.045544	0.045501	0.044981
0.046	0.055686	0.050898	0.052150	0.053017	0.052910	0.052244
0.053	0.064504	0.059580	0.061048	0.062022	0.061837	0.061122
0.060	0.073400	0.068728	0.070345	0.071425	0.071096	0.070399
0.064	0.078575	0.074134	0.075859	0.076988	0.076609	0.075898
0.068	0.083800	0.079711	0.081535	0.082858	0.082459	0.081641
0.079	0.098298	0.095940	0.097907	0.099520	0.099023	0.098098
0.085	0.106295	0.105289	0.107522	0.109283	0.108594	0.107672
0.090	0.112997	0.113304	0.115901	0.117573	0.116853	0.115908
0.098	0.123778	0.126828	0.129956	0.131846	0.130997	0.129907
0.105	0.133272	0.139298	0.142986	0.145214	0.144224	0.142931
0.115	0.147202	0.158175	0.162651	0.165548	0.164242	0.162654
0.125	0.161383	0.178298	0.184047	0.187462	0.185626	0.183858

$$R = 1.9214H^{1.1638} \quad (\theta = 45^\circ, L = 20) \quad (7)$$

위의 표 2는 같은 조건에서 경사면의 각도를 45° 로 했을 경우의 결과이다. 그리고 그림 5는 마찬가지로 x , y 각각의 축에 대해 \log 을 적용하여 나타낸 것이다. 그림 4와 같이 각각의 축에 \log 을 적용할 경우 파고에 대한 처오름의 높이가 선형적인 분포를 함을 알 수 있으며, 그 결과를 회귀분석한 식이 식 (7)이다.

처오름높이의 분석에 있어서 평균값은 표 1과 2에서 첫 번째로 입사한 파랑에 의한 처오름은 제외하고 2~5번째의 처오름높이만을 평균해서 얻은 결과이다. 이는 첫 번째의 처오름높이는 뒤따르는 것에 비해 그 크기가 매우 작거나 다소 크기 때문에 비교적 크기의 변화가 작은 2~5번째의 값을 평균하였다.

이는 조파기에서 발생한 첫 번째 파랑으로 인해 생성된 처오름은 완전하지 않기 때문이다. 그리고 그림 2와 그림 3을 비교해 보면, 그림 2에서 A점과 B점에서의 파랑의 위상차가 주기의 1/2 차이가 발생함을 볼 수 있다. 이는 경사가 10°인 경우에는 경사면을 따라 파랑이 진행함에 따라 처오름높이도 상대적으로 같며, A점과 B점에서의 위상차도 파장의 1/2이 발생함을 알 수 있으나, 사면의 경사가 45°인 경우에는 그림 3에서 볼 수 있듯이 경사면을 따라 파랑이 진행하지 못하고 거의 그대로 전달되기 때문에 위상차가 거의 발생하지 않는다. 즉, 경사면의 각도가 작을수록 처오름높이는 더 커짐을 알 수 있다.

4. 해석적인 방법에 의한 정현파의 처오름높이 계산

Keller와 Keller (1964) 및 Goto와 Shuto (1983)는 선형이론을 이용하여 일정한 경사면에서 정현파의 최대 처오름높이를 계산하는 식 (8)을 제안하였다.

$$R = \frac{H}{[J_0^2(\nu) + J_1^2(\nu)]^{1/2}} \quad (8)$$

식 (8)에서 J_0 과 J_1 는 각각 제1종 0차 및 1차 Bessel 함수를 나타내며, ν 는 식 (9)와 같다.

$$\nu = \frac{4\pi h}{L} \cot \theta \quad (9)$$

식 (8)의 Bessel 함수는 식 (10)을 이용하여 다음과 같이 근사적으로 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} J_0(\nu) &= 1 - \frac{\nu^2}{2^2} + \frac{\nu^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{\nu^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} \dots \\ J_1(\nu) &= \frac{\nu}{2} - \frac{\nu^3}{2^2 \cdot 4} + \frac{\nu^5}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6} - \frac{\nu^7}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8} \dots \end{aligned} \quad (10)$$

식 (8)에 의한 해석적 결과와 경계요소법에 의한 결과의 비교가 그림 4와 그림 5에 나타나 있다.

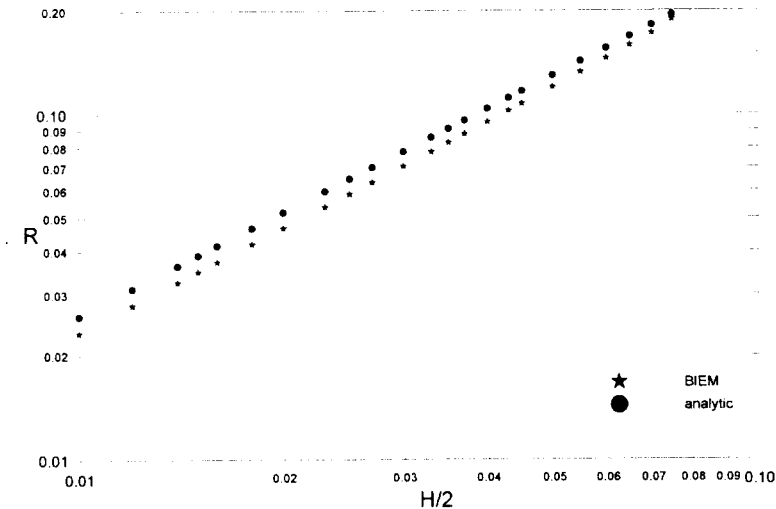


그림 4. Maximum run-up heights of sinusoidal waves ($\theta = 10^\circ$)

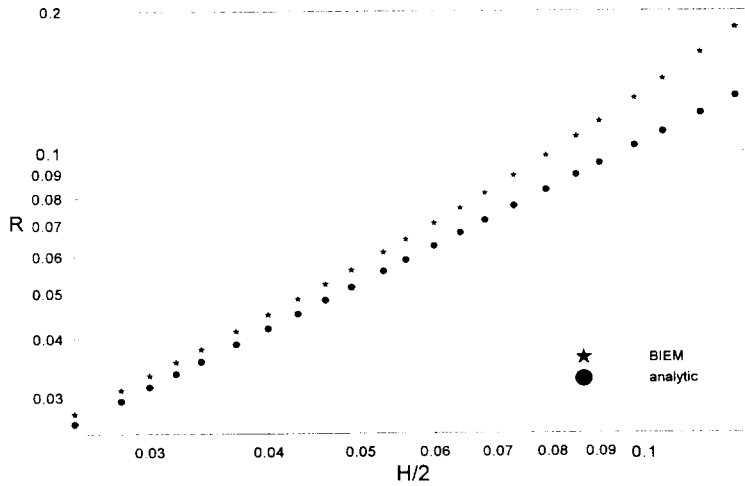


그림 5. Maximum run-up heights of sinusoidal waves ($\theta = 45^\circ$)

5. 결론

본 연구에서는 경계요소법을 이용하여 정현파의 최대치오름높이를 계산하였다. 그리고 수치해석 결과를 해석해와 비교하여 거의 정확한 결과가 나옴을 알 수 있었다. 본 논문에서는 해안경사가 10° 와 45° 에 적용했으나 여러 각도와 주기에 대해서도 본 모형은 적용이 가능하다.

감사의 글

본 연구는 한국학술진흥재단의 연구비에 의하여 지원되었기에 이에 사의를 표합니다 (KRF-99-041-E00587).

참고문헌

- Kaplan, K., 1955, Generalized laboratory study of tsunami run-up, *Technical Memorandum 60*, Beach Erosion Board, U.S. Army Corps of Engineers.
- Keller, J.B. and Keller, H.B., 1964, Water wave run-up on a beach. *ONR Report*, Contract No. NONR-3828(00), Department of Navy, USA, pp. 40.
- Liu, P.L.-F. and Cho, Y.-S., 1994, Integral equation model for wave propagation with bottom frictions, *J. of Waterway, Port, Coastal and Ocean Eng.*, ASCE, 120, pp. 594-608.
- Liu, P.L.-F., Cho, Y.-S. and Fujima, K., 1994, Numerical solutions of three-dimensional run-up on a circular island, *Proc. of International Symposium: Waves-Physical and Numerical Modelling*, pp. 1,031-1,040.
- Goto, C. and Shuto, N., 1983, Numerical simulation of tsunami propagation and run-up, *Tsunami-Their Science and Engineering*, K. Iida and T. Iwasaki, ed., Terra Scientific Publishing Co., Japan, pp. 439-451.
- 조용식, 이봉희, 윤태훈, 1999, 주기파의 최대 치오름높이에 관한 연구, 한국수자원학회논문집, 제32권, 제 6호, pp. 647-653.