

회전자유도를 갖는 비적합 8-절점 입체요소의 개선

Improved Nonconforming 8-node Solid Element with Rotational Degrees of Freedom

최 창 근*
Choi, Chang-Koon

정 근 영**
Chung, Keun-Young

이 태 열***
Lee, Tae-Yeol

요 지

본 연구에서는 찌그러진 요소에서의 휨거동 개선을 위한 추가적인 비적합변위형과 효율적인 비적합변위형의 수정방법의 개발을 통하여 기존 비적합 입체요소의 개선을 시도하였으며, 회전자유도가 독립변수로 존재하는 범함수를 이용하여 매개변수의 값에 따라 회전자유도의 도입유무가 결정되도록하는 입체요소를 개발하였다. 제시된 요소에서는 변위장과 회전장에 동일한 형상함수를 적용하였으며, 비적합변위형은 변위장에만 적용하였다. 다양한 예제를 통한 수치실험결과 개발된 요소는 양호한 거동을 보여주었으며, 특히 휨거동에 있어서 개선된 거동을 보였다.

핵심용어 : 비적합입체요소, 비적합변위형의 수정방법, 회전자유도, 형상함수

Abstract

In this paper, new additional nonconforming modes for the improvement of bending behavior in the distorted 8-node hexahedral element and their effective modification method are studied. The rotational degrees of freedom are introduced by using a functional in which the rotations are independent variables. In an element formulation, the same interpolations are used in displacement and rotation fields, but nonconforming modes are applied only in displacement fields. To verify the developed element various numerical tests are carried out and test results show good behavior.

Keywords : nonconforming hexahedral element, modification of nonconforming modes, rotational degrees of freedom, shape functions

1. 서 론

유한요소법은 공학분야에서 근사적으로 해를 구하는 수치해법 중의 하나로서 공학적 문제의 수치적 해석에 없어서는 안될 필수적인 도구가 되었다. 그러나 유한요소법은 주어진 연속적인 대상영역을 이상화된 모델로 분할하여 근사화된 해를 구하기 때문에 해석결과의 정확도는 선정된 요소의 종류 및 요소의 거동특성에 따라

다르며, 동일한 요소를 사용하여 해를 구하더라도 해석을 위해 구성된 요소체눈(element mesh)의 정도에 따라 상당한 해의 차이를 보인다¹⁾. 이러한 이유로 많은 연구자들이 유한요소를 이용한 수치해석의 정확도를 개선하기 위하여 다양한 유한요소의 개선에 많은 연구를 수행해 오고 있다.

1980년대 중반 이후 평면응력요소에 면내회전(drilling rotation)을 도입함으로써 회전자유도에 의해 보다 개

* 정회원 · 한국과학기술원 토목공학과, 석좌교수

** 정회원 · 한국과학기술원 토목공학과, 별정직 연구조교수

*** 한국과학기술원 토목공학과, 박사과정

· 이 논문에 대한 토론을 2001년 3월 31일까지 본 학회에 보내주시면 2001년 6월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

선된 요소를 개발하고자 하는 연구가 활발히 진행되어 왔다. 그 후 이 연구분야는 더욱 확장되어 쉘 및 입체 요소의 개발에 까지 이르렀다^{2)~7)}. 연속체요소(continuum element)에의 회전자유도의 도입은 입체요소와 쉘요소(shell element), 공간보요소(spatial beam element) 등의 구조용 요소와의 연결부분의 수치모형화의 편이성을 증진시킨다. 연속체요소에 회전자유도가 없는 경우 쉘요소나 공간보요소와의 연결을 위해서는 통상 실제로는 존재하지 않은 보조적인 구조용 요소를 연결부에 추가하는 것에 의해서 해결되어왔다. 이러한 편법에 의한 구조용 요소와 입체요소와의 연결은 자동화되기 곤란하며 번거로운 작업이라고 할 수 있다.

회전자유도를 갖는 요소의 개발에 있어서 종래에는 Allman형식의 형상함수에 의한 절점회전자유도의 도입이 주류를 이루었으나^{3)~5),7)}, Allman형식의 형상함수에 의한 회전자유도의 도입은 요소간의 적합성을 만족하지 못하고 실제의 회전(true rotation)이 아니라는 지적이 있으며⁶⁾, 요소의 모서리를 따라 포물선 형상을 갖는 변형형상을 이용하여 절점회전자유도를 도입함에 따라 표면장력에 의한 외력이 회전자유도 방향의 힘으로 작용하게 됨에 따라 실제문제에의 적용에 있어 등가의 절점하중의 산정에 어려움이 따른다. 본 연구에서는 이러한 문제를 해결하고자 요소의 정식화에 있어 회전장(rotation field)이 독립변수인 범함수(functional)를 사용하고, 회전장의 보간에 있어서 변위장(displacement field)의 보간에 사용된 형상함수와 동일한 형상함수를 사용함으로써 보다 실제에 가까운 회전자유도를 표현할 수 있도록 하였다. 이러한 방법에 의한 회전자유도의 도입시에는 Allman형식의 형상함수의 도입과는 달리 회전자유도의 도입에 따른 고차의 변형모드가 표현되지 않고 회전자유도가 제한조건에 의해 도입되는 형식이다. 또한, 본 연구에서는 제시된 8절점 입체요소의 횡거동특성을 비적합변위형에 의해 향상시켰으며, 회전자유도의 유무가 매개변수의 값에 의해 조절되도록 하였다.

2. 본 론

2.1 회전자유도를 갖는 입체요소의 정식화

입체요소에 회전자유도를 도입하기 위하여 Hughes와 Brezzi²⁾나 Iura와 Atluri⁶⁾에 의해 제안된 회전장(rotation field)을 독립변수로 갖는 범함수(functional)

를 유한요소의 정식화에 이용하였다. 이 변분법은 변위경사(displacement gradient)의 반대칭부분과 독립회전변위장과의 동일성을 부여하였으며, 직선변위와 회전변위를 각각 분리된 운동변수로 처리하고 있다. 본 연구에서 사용된 범함수를 표기의 간편성을 위하여 외력과 관련된 성분을 생략하고 표기하면 식(1)과 같다.

$$\begin{aligned} \Pi(\mathbf{u}, \boldsymbol{\theta}) = & \frac{1}{2} \int_V (\text{symm} \nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{D} \cdot (\text{symm} \nabla \mathbf{u}) dV \\ & + \frac{\alpha}{2} \mu \int_V (\boldsymbol{\theta} - \text{skew} \nabla \mathbf{u})^2 dV + \dots \end{aligned} \quad (1)$$

여기서, \mathbf{u} 는 변위장(displacement field), $\boldsymbol{\theta}$ 는 회전장(rotation field), \mathbf{D} 는 재료상수(constitutive constants), μ 는 전단탄성계수(shear modulus)이고 α 는 문제종속적인 상수로 Ibrahimbegovic과 Wilson 및 Iura와 Atluri 등의 연구자들의 경우 $\alpha=1$ 의 값을 수치해석에 사용하는 경향이 있으며, $\alpha=0$ 인 경우 회전장이 없는 경우의 범함수와 동일하다(그림 1). 또한, $\text{symm} \nabla$ 및 $\text{skew} \nabla$ 는 각각 대칭경사(symmetric gradient)와 반대칭경사(skew-symmetric gradient)의 연산자로 정의한다.

상기한 범함수를 이용하여 유한요소의 강성행렬을 구성하기 위해서는 요소내의 임의점에서의 변위를 형상함수(shape function)를 이용하여 근사적으로 표현하는 것이 필요하다. 범함수에서 독립변수로 사용된 변위장과 회전장은 동일한 형상함수 N_I 를 이용하여 보간하며, 비적합변위형(nonconforming modes) \bar{N}_K 는 변위장에만 부여하는 것으로 한다. 요소내의 임의점에서의 변위 및 회전은 8절점 입체요소의 절점변위 \mathbf{u}_I , 절점회전 $\boldsymbol{\theta}_I$ 및 비적합변위형의 진폭 \mathbf{a}_K 와 형상함수에

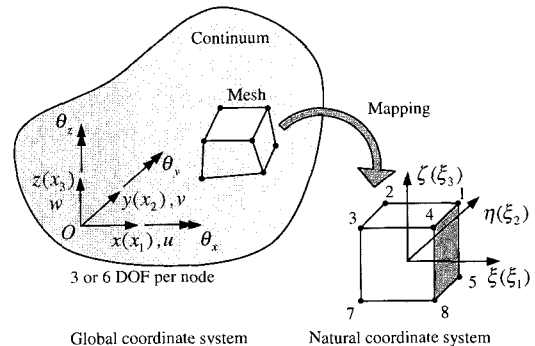


그림 1 회전자유도를 갖는 8절점 입체요소의 좌표와 자유도

의해 다음과 같이 근사화된다.

$$\mathbf{u}^h = \begin{Bmatrix} u^h \\ v^h \\ w^h \end{Bmatrix} = \sum_{I=1}^8 N_I \mathbf{u}_I + \sum_K N_K \mathbf{a}_K \quad (2)$$

$$\boldsymbol{\theta}^h = \begin{Bmatrix} \theta_x^h \\ \theta_y^h \\ \theta_z^h \end{Bmatrix} = \sum_{I=1}^8 N_I \boldsymbol{\theta}_I \quad (3)$$

여기서, ξ, η 및 ζ 는 자연좌표계(natural coordinate system) 상에서의 요소 내 임의점에서의 좌표이고, ξ_I, η_I 및 ζ_I 는 -1 혹은 1의 값을 갖는 자연좌표계상의 각 절점좌표일 때 형상함수 및 비적합변위행렬은 다음과 같다.

$$N_I = \begin{bmatrix} N_I & & \\ & N_I & \\ & & N_I \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$N_I = \frac{1}{8}(1 + \xi\xi_I)(1 + \eta\eta_I)(1 + \zeta\zeta_I)$$

$$\bar{N}_K = \begin{bmatrix} \bar{N}_K & & \\ & \bar{N}_K & \\ & & \bar{N}_K \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\bar{N}_K = 1 - \xi^2, 1 - \eta^2, 1 - \zeta^2 \text{ 등}$$

또한, 절점변위의 보간(interpolation)을 통하여 근사화된 변위장을 이용하여 대칭변위경사 및 반대칭변위경사를 표현하면, 아래와 같은 행렬식으로 표현된다.

$$\begin{aligned} \text{symm}\nabla\mathbf{u}^h &= \sum_{I=1}^8 \text{symm}\nabla N_I \mathbf{u}_I + \sum_K \text{symm}\nabla \bar{N}_K \mathbf{a}_K \\ &= \sum_{I=1}^8 \mathbf{B}_I \mathbf{u}_I + \sum_K \bar{\mathbf{B}}_K \mathbf{a}_K \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{B}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^e \\ \boldsymbol{\theta}^e \\ \mathbf{a}^e \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\theta}^h - \text{skew}\nabla\mathbf{u}^h &= \sum_{I=1}^8 N_I \boldsymbol{\theta}_I - \sum_{I=1}^8 \text{skew}\nabla N_I \mathbf{u}_I \\ &\quad - \sum_K \text{skew}\nabla \bar{N}_K \mathbf{a}_K \\ &= \sum_{I=1}^8 N_I \boldsymbol{\theta}_I + \sum_{I=1}^8 \mathbf{G}_I \mathbf{u}_I + \sum_K \bar{\mathbf{G}}_K \mathbf{a}_K \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{N} & \bar{\mathbf{G}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^e \\ \boldsymbol{\theta}^e \\ \mathbf{a}^e \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (7)$$

여기서, 대칭변위경사와 반대칭변위경사를 구하기 위한 연산자는 아래와 같이 정의한다.

$$\text{symm}\nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\text{skew}\nabla = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z} & \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z} & 0 & -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x} \\ -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y} & \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix}$$

또한, 근사화된 변위장 및 회전장을 범함수에 대입하고 변분을 취하면 회전자유도를 갖는 요소의 강성행렬을 구성할 수 있다.

$$\mathbf{K}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{CC} & \mathbf{K}_{CN} \\ \mathbf{K}_{CN}^T & \mathbf{K}_{NN} \end{bmatrix} \quad (9)$$

여기서, 각 부행렬(submatrix)들은 다음과 같다.

$$\mathbf{K}_{CC} = \int_V \begin{bmatrix} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} + \alpha\mu \mathbf{G}^T \mathbf{G} & \alpha\mu \mathbf{G}^T \mathbf{N} \\ \alpha\mu \mathbf{N}^T \mathbf{G} & \alpha\mu \mathbf{N}^T \mathbf{N} \end{bmatrix} dV \quad (10a)$$

$$\mathbf{K}_{CN} = \int_V \begin{bmatrix} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \bar{\mathbf{B}} + \alpha\mu \mathbf{G}^T \bar{\mathbf{G}} \\ \alpha\mu \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{G}} \end{bmatrix} dV \quad (10b)$$

$$K_{NN} = \int_V [\bar{B}^T D \bar{B} + \alpha \mu \bar{G}^T \bar{G}] dV \quad (10c)$$

또한, 식(9)의 강성행렬은 비적합변위형의 진폭에 해당하는 자유도를 갖고 있으므로, 비적합변위형에 해당하는 자유도를 정적응축(static condensation)기법¹⁾에 의해 소거하면 요소절점의 자유도만으로 표현된 다음과 같은 최종적인 강성행렬이 얻어진다.

$$K^e = K_{CC} - K_{CN} K_{NN}^{-1} K_{CN}^T \quad (11)$$

이러한 정식화방법에 의해 회전자유도를 도입하는 것은 범함수의 Euler-방정식에서 반대칭변위경사의 성분을 회전자유도와와의 상관관계를 맺어주는 것이므로, 계층적인 2차함수의 사용에 의한 회전자유도를 도입하는 Allman type의 형상함수를 사용한 방법과는 달리 회전자유도의 도입에 따른 요소의 거동향상은 거의 없다. 따라서, 요소의 거동향상을 위해서는 회전자유도가 없는 요소에서의 각종 요소거동개선방법이 동시에 사용되어야 할 것이다. 본 연구에서는 요소강성행렬관련 수치적 분사 14점 적분법(14-point integral rule)을 이용하여 체적적분을 수행하였다.

2.2 거동 개선을 위한 비적합변위형 및 수정

8절점 육면체요소를 비롯한 등매개변수(isoparametric) 요소는 요소의 형상이 간단하고, 절점이 꼭지점에만 존재하기 때문에 사용이 편리한 장점을 갖는다. 하지만, 이 요소가 가지고 있는 결정적인 결점은 휨 문제에 있어서 지나치게 강(stiff)하다는 것이다. 이 요소는 휨에 대해서도 전단변형 모드(parasitic shear deformation mode)로 변형을 일으키기 때문에 변형에 대한 제약으로 말미암아 같은 양의 변형을 일으키게 하는데 휨(bending) 모드로 변형을 일으키는 경우 보다 훨씬 더 큰 에너지가 필요하다. 즉, 같은 변형에 대해서도 휨 변형모드에 비해 더 큰 변형에너지가 저장되고 이로 말미암아 해석결과의 수렴속도가 매우 느리게 된다. 이러한 오차의 근원은 그림 2와 같은 순수휨이 작용하는 사각형 요소의 거동으로 설명할 수 있다¹⁾.

본 연구에서는 이러한 거짓전단변형모드에 의한 오차를 줄이고자 비적합변위형(nonconforming modes)을 사용하였다. 비적합변위형을 추가하는 기본 개념은

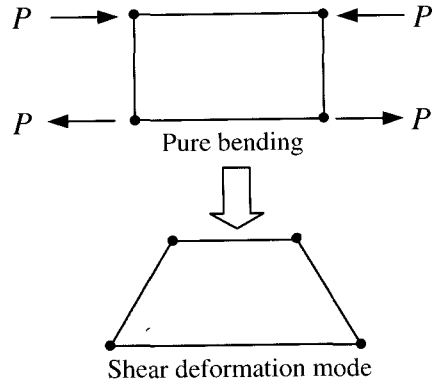


그림 2 기본요소에서의 거짓전단변형모드

적분과정에서 인위적으로 전단에너지를 무시하는 것과는 달리 절점별로 정의된 형상함수로 표현되는 원래의 변위형태에 추가적인 변위 모드(비적합변위형)를 추가하여 전단변형모드로 제약된 변위모드를 풀어주어 실제 변위에 가까운 변위로 복원하는 것이다¹⁾. 8절점 입체요소에서 일반적으로 널리 사용되는 비적합변위형은 $1-\xi^2$, $1-\eta^2$, $1-\zeta^2$ 및 $(1-\xi^2)(1-\eta^2)(1-\zeta^2)$ 이나, 본 연구에서는 입체요소가 찌그러진 상태에서의 거동을 보다 향상시키기 위하여 다음과 같은 비적합변위형들을 기본적인 비적합변위형과 더불어 추가적으로 사용하였다.

$$(1-\xi^2)\eta, (1-\xi^2)\zeta, (1-\eta^2)\xi, (1-\eta^2)\zeta, (1-\zeta^2)\xi \text{ 및 } (1-\zeta^2)\eta \quad (12)$$

기본적인 비적합변위형과 추가적인 비적합변위형의 조합에 의해 보다 다양한 변형형상이 표현가능하며 이러한 비적합변위형의 조합에 의해 표현되는 변형형상은 찌그러진 요소에서의 휨거동개선에 기여할 것으로 기대된다(그림 3).

일반적으로 비적합변위형의 사용은 요소간의 변위적 합성(displacement compatibility)을 만족하지 못한다. 요소체적이 세분화되어 감에 따라 참값에 수렴하도록 하기 위하여 비적합 유한요소에서는 완화된 제한조건(relaxed restriction)으로서 조각시험(patch test)을 만족하도록 하고 있다. 이를 위해 일정응력상태(constant stress state)에서는 비적합변위형에 의한 변형에너지(strain energy)가 소거되도록 할 필요가

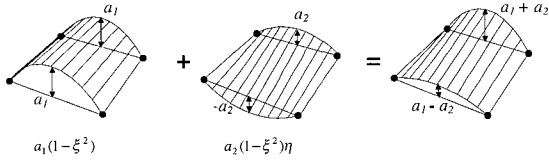


그림 3 비적합변위형의 조합에 의한 다양한 변형형상의 표현

있다^{9)~11)}. 일정한 응력상태 σ_c 에서 비적합변위형에 관련된 변형에너지가 소거되는 조건은 비적합변위형에 대한 변형-변위관계행렬 \bar{B} 의 체적적분값이 영이되는 조건이며, 비적합변위형 \bar{N}_l 의 각 미분성분에 대해 다음과 같이 간략화 된다.

$$\int_V \bar{B}^T \sigma_c dV = 0 \rightarrow \int_V \bar{B}^T dV = 0 \rightarrow \int_V \frac{\partial \bar{N}_l}{\partial x_i} dV = 0 \quad (13)$$

Wilson과 Ibrahimbegovic은 비적합변위형에 의한 변형도-변위관계행렬(strain-displacement relationship matrix)를 수정행렬(correction matrix)에 의해 수정하도록 제안하였다¹¹⁾. 한편, Taylor¹⁰⁾는 완전성조건(completeness condition)의 다른 표현으로 일정변형율상태에서는 비적합변위에 의한 영향이 없어지도록 하기 위하여 Jacobian행렬을 요소의 중앙점($\xi = \eta = \zeta = 0$)에서의 Jacobian 값을 사용하도록 하도록 제안하였다. 하지만, 이 Taylor의 방법은 $1-\xi^2$, $1-\eta^2$, $1-\zeta^2$ 과 같이 형상함수의 자연좌표계에 대한 미분이 기함수(odd function)가 되는 경우에는 적용성이 우수하나, $(1-\xi^2)\eta$, $(1-\xi^2)\zeta$ 등의 비적합변위형과 같이 미분값이 우함수(even function)가 되는 경우에는 개선의 효과가 없다. 따라서, 본 연구에서는 임의의 비적합변위형의 사용시 비적합변위형의 사용에 따른 바람직하지 못한 현상을 소거하기 위하여 Taylor 방법(Taylor's scheme)과 Wilson의 수정행렬법(일명 B-bar방법)의 개념을 조합하여 보다 효율적으로 비적합변위형을 수정하는 방법을 개발하였다.

이 새로운 방법은 Taylor방법의 개념에 Wilson의 B-bar방법의 개념을 첨가하는 것으로 요소중앙위치에서의 Jacobian행렬을 이용하여 비적합변위형의 미분값을 간단하게 수정할 수 있는 장점이 있다. 비적합변위형을 \bar{N}_l 라 하고 Taylor방법의 개념에 따라 Jacobian행렬 $J(\xi, \eta, \zeta)$ 대신 $\xi = \eta = \zeta = 0$ 에서의 Jaco-

bian행렬 $J(0,0,0)$ 의 역행렬 $J^{-1}(0,0,0)$ 를 식(13)의 비적합변위형의 미분에 적용한다면, 일정변형율상태에서 비적합변위형에 의해서 변형에너지를 야기하지 않을 조건은 다음과 같이 표현된다.

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{|J(\xi, \eta, \zeta)|} \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial \bar{N}_l}{\partial \xi_\alpha} J_{i\alpha}^{-1}(0,0,0) \right) J(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta = 0 \quad (14)$$

윗식으로부터 자연좌표계의 각 미분성분별로 만족하여야 할 조건을 살펴보면 보다 간단히 표현된다.

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial \bar{N}_l}{\partial \xi_\alpha} d\xi d\eta d\zeta = 0 \quad (15)$$

비적합변위형의 미분값이 상기 식을 만족하지 않을 때 인위적인 상수값 $c_{i\alpha}$ 에 의해 수정하고자 하는 경우(Wilson방법의 개념)는 다음과 같이 표현된다.

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(\frac{\partial \bar{N}_l}{\partial \xi_\alpha} + c_{i\alpha} \right) d\xi d\eta d\zeta = 0 \quad (16)$$

따라서, 수정계수 $c_{i\alpha}$ 를 해석적으로 직접 구할 수 있다.

$$c_{i\alpha} = -\frac{1}{8} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial \bar{N}_l}{\partial \xi_\alpha} d\xi d\eta d\zeta \quad (17)$$

즉, 비적합변위형의 자연좌표계에 대한 미분값을 수정계수 $c_{i\alpha}$ 를 이용하여 수정함으로써 비적합변위에 의한 바람직하지 못한 변형성분이 제거되고 조각시험을 통과하는 것이 보장된다. 또한, 강성행렬을 구성할 때 비적합변위형의 전체좌표계 x_i 에 대한 미분은 Taylor의 방법을 적용하여 다음과 같이 최종적으로 구해진다.

$$\frac{\partial \bar{N}_l}{\partial x_i} = \frac{1}{|J(\xi, \eta, \zeta)|} \sum_{\alpha=1}^3 \left\{ J_{i\alpha}^{-1}(0,0,0) \left(\frac{\partial \bar{N}_l}{\partial \xi_\alpha} + c_{i\alpha} \right) \right\} \quad (18)$$

여기서, $c_{i\alpha}$ 가 영인 경우는 기존의 Taylor방법과 동일하다. 본 논문에서 제안된 방법에 따른 각종 비적합

표 1 비적합변위형의 자연좌표계에 대한 미분값의 수정값

\bar{N}_I	비적합변위형	$c_{I\xi}$	$c_{I\eta}$	$c_{I\zeta}$
\bar{N}_1	$1-\xi^2$	0	0	0
\bar{N}_2	$1-\eta^2$	0	0	0
\bar{N}_3	$1-\zeta^2$	0	0	0
\bar{N}_4	$(1-\xi^2)\eta$	0	$-\frac{2}{3}$	0
\bar{N}_5	$(1-\xi^2)\zeta$	0	0	$-\frac{2}{3}$
\bar{N}_6	$(1-\eta^2)\xi$	$-\frac{2}{3}$	0	0
\bar{N}_7	$(1-\eta^2)\zeta$	0	0	$-\frac{2}{3}$
\bar{N}_8	$(1-\zeta^2)\xi$	$-\frac{2}{3}$	0	0
\bar{N}_9	$(1-\zeta^2)\eta$	0	$-\frac{2}{3}$	0
\bar{N}_{10}	$(1-\xi^2)(1-\eta^2)(1-\zeta^2)$	0	0	0

변위형의 자연좌표계에 대한 미분값의 수정값은 표 1에 정리하였다. 이 방법은 비적합변위형의 수정을 위하여 요소전체영역에 대한 적분을 필요로 하지 않고 비적합변위형의 미분값에 대한 직접적인 수정과, 요소중앙점에서의 Jacobian행렬만 계산하면 되므로 기존의 방법보다 효과적으로 비적합요소의 불합리한 거동요인을 제거하는 문제에 적용될 수 있으며, 다양한 비적합변위형의 적용에 응용될 수 있을 것으로 기대된다.

3. 수치시험

본 연구에서 개발된 입체요소의 타당성 및 적용성의 검증을 위하여 수치시험을 수행하였다. 본 연구에서 개발된 요소는 식(1)의 α 값에 따라 회전자유도의 유무가 결정되며, α 가 영인 경우는 회전자유도가 없는 입체요소(절점당 3자유도)가 되며 영이 아닌 경우는 절점당 6자유도를 갖는다. 또한, 비적합변위형의 선택에 따라 다음과 같은 2가지 경우를 고려하였다.

- 경우 1 : 기본적인 비적합변위형과 추가적 비적합변위형
- 경우 2 : 기본적인 비적합변위형

3.1 고유치시험

본 연구에서 개발된 요소에서의 거짓영에너지모드(spurious zero energy mode) 발생 여부를 검증하기 위하여 개별 요소강성행렬을 이용한 고유치해석을

수행하였다⁸⁾. 3차원 입체요소는 구속조건이 없는 하나의 요소에 대하여 6개의 강제운동모드(rigid body mode)가 존재하여야 한다. 수치실험결과 개발된 모든 요소는 구속되지 않은 직육면체형태 및 찌그러진 형태에 있어서 강제운동을 표현하기위한 6개의 영에너지모드를 가지며, 거짓영에너지모드는 발생하지 않음을 알 수 있었다.

3.2 조각시험

본 연구에서 개발한 요소가 일정변형률상태(constant strain state)를 표현할 수 있는가를 검증하기 위해 조각시험을 수행하였다. 조각시험은 7개의 찌그러진 요소로 구성된 부피가 1인 정육면체 형태의 조각시험방법⁹⁾과 단일요소(single element)의 조각시험방법⁴⁾ 두 가지가 행하여졌다(그림 4, 그림 5, 표 2). 개발된 모든 요소는 두 종류의 조각시험에 대해 이론치와 동일한 일정한 응력상태를 보여 조각시험을 통과하였다.

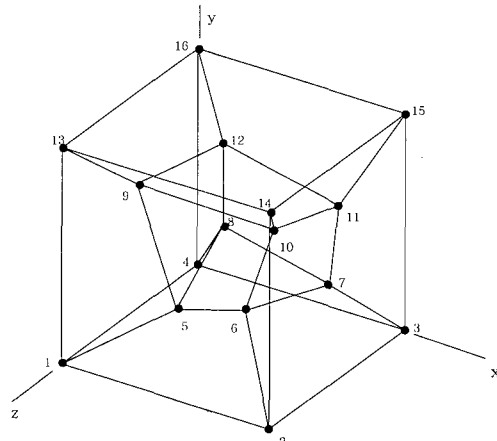


그림 4 변위경계조건에 의한 조각시험

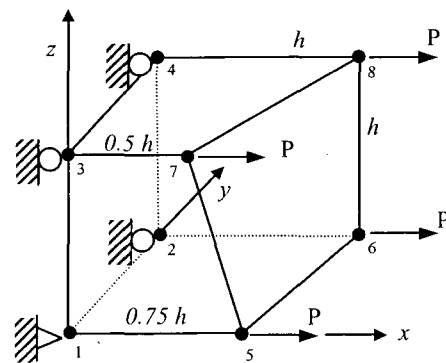


그림 5 단일요소의 조각시험

표 2 조각시험에서의 변위경계조건과 이론해

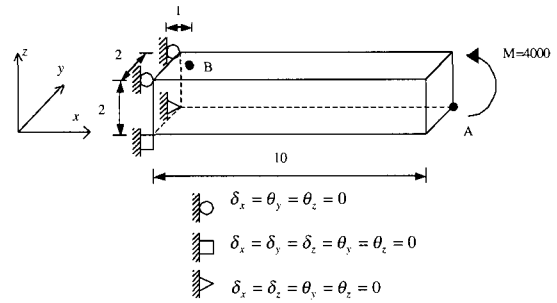
변위 경계 조건	이론해
$u = 10^{-3}(2x + y + z)/2$	$\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = \gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 10^{-3}$
$v = 10^{-3}(x + 2y + z)/2$	$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 2000$
$w = 10^{-3}(x + y + 2z)/2$	$\tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 400$

3.3 순수 휨을 받는 캔틸레버보

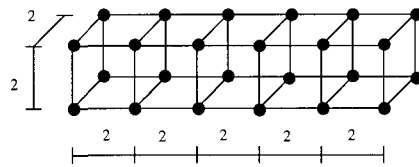
제안된 요소의 휨문제에서의 거동특성을 살펴보기 위하여 순수휨을 받는 캔틸레버보(그림 6)에 대한 해석을 수행하였다^{8),12)}. 해석모델의 경계조건은 부재가 순수휨을 받도록하기 위하여 순수휨을 받는 부재의 고정단에서는 이론치에 따른 변형형상을 표현할 수 있도록 설정하였다. 따라서 고정단에서의 경계조건은 yz-평면에 대칭이되도록 하였으며, 추가적으로 강제운동을 억제하기 위하여 최소의 변위가 구속되었다. 이때의 강제운동을 억제하기 위한 변위구속조건은 회전자유도가 없는 전형적인 문제에서 사용하는 구속조건과 동일하게 설정되었다. 캔틸레버보에 작용하는 휨모멘트를 표현하기 위하여 등가의 절점하중을 사용하였으며, 주어진 문제의 탄성계수 및 포아송비는 $E=1500$, $\nu=0.25$ 이다.

해석결과와 비교를 위하여 비적합변위형이 없는 기본 입체요소인 C-V1과 $1-\xi^2$, $1-\eta^2$ 및 $1-\zeta^2$ 의 3가지 비적합변위형과 Wilson과 Ibrahimbegovic에 의해 제안된 비적합변위형의 수정방법이 사용된 입체요소인 NC-V1이 사용되었다¹²⁾. 회전자유도를 갖는 요소로는 NCH-3와 NCH-4가 사용되었다⁸⁾. 해석결과는 표 3에

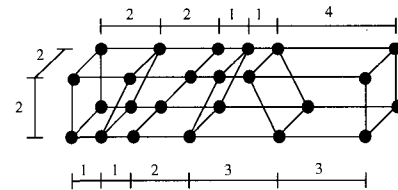
나타내었다. 해석결과를 살펴볼 때 비적합변위형이 사용된 요소의 경우 찌그러지지 않은 형상의 요소에서는 모두 이론치와 동일한 결과를 보여주었다. 찌그러진 요소체군의 경우 본 연구에서 제안된 방법이 휨거동을 개



(a) 순수휨을 받는 캔틸레버보



(b) 정규 요소체군 A



(c) 찌그러진 요소체군 B

그림 6 순수휨을 받는 캔틸레버보

표 3 순수휨을 받는 캔틸레버보의 거동

요소구분		정규요소체군 A			찌그러진 요소체군 B		
		A점	A점	B점	A점	A점	B점
비적합변위형	α 값	수직처짐	회전각	휨응력	수직처짐	회전각	휨응력
Case 1	0.0	100.00	N/A	-3000.0	94.53	N/A	-2919.5
	1.0	100.00	-20.00	-3000.0	92.13	-18.83	-2960.5
Case 2	0.0	100.00	N/A	-3000.0	92.61	N/A	-2721.5
	1.0	100.00	-20.00	-3000.0	87.76	-18.43	-2682.0
C-V1 ¹²⁾		66.67	N/A	-2200.0	44.38	N/A	-1736.0
NC-V1 ¹²⁾		100.00	N/A	-3000.0	87.45	N/A	-2262.0
NCH-3 ⁸⁾		100.00	-20.00	-3000.0	97.33	-18.62	-2270.0
NCH-4 ⁸⁾		100.00	-20.00	-3000.0	91.75	-18.16	-2814.5
이론값		100.00	-20.00	-3000.0	100.00	-20.00	-3000.0

선함을 알 수 있었으며, 추가적인 비적합변위형이 사용된 경우에 있어서도 찌그러진 요소체눈에서의 거동이 향상되었다. 또한, 본 연구에서 제시된 요소는 처짐, 회전 및 휨응력의 3가지 항목모두에서 양호한 거동을 보이고 있음을 알 수 있다.

3.4 Cook의 평면문제

전단력과 휨이 동시에 작용하는 찌그러진 요소형상 문제에서 요소의 개수에 따른 거동특성을 평가하기 위하여 Cook의 평면문제에 적용하였다⁶⁾. Cook의 평면 문제는 주로 쉘요소의 면내방향 거동을 평가하기 위하여 주로 사용되어왔다. 평판의 두께는 1.0이며 한쪽면은 고정되어있고 다른 면은 크기가 1.0인 하중이 균일한 분포하중으로 작용한다(그림 7). 재료의 탄성계수는 1.0이며 포아송비는 1/3이다. 또한, 끝단의 중앙(A점)에서의 수직변위에 대한 참고값(reference value)은 23.91이다.

요소의 체눈을 세분화시켜가면서 수치시험을 행하였으며, 그 결과를 표 4에 나타내었다. 해석결과를 비교

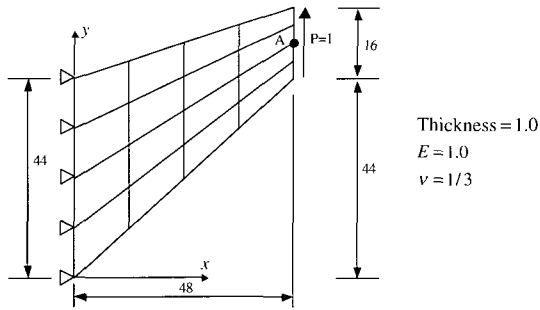


그림 7 Cook의 평면문제(4×4×1 Mesh)

해볼 때 제안된 요소의 추가적인 비적합변위형에 의한 해의 개선효과는 순수휨 문제 만큼은 아니지만 양호한 결과를 보여주고 있으며, 요소가 세분화되어감에 따라 참값에 수렴해가는 경향을 보여주고 있다.

3.5 비틀어진 캔틸레버보

이 문제는 직사각형단면을 갖는 캔틸레버보를 길이 방향에 대해 90° 만큼 비틀어 놓은 것이다(그림 8). 이 보에 작용하는 하중은 단면의 중심에서 가까운 두 절점으로 하중을 분산하여 집중하중으로 가하였다. 한 쪽 단면은 고정된 지지조건을 갖고 다른 쪽 단면은 자유단이다. 따라서 고정단에서의 모든 자유도는 움직임이 억제되었으며, 다른 절점에서의 모든 자유도는 자유롭게 움직일 수 있도록 설정하였다. 보의 길이는 12이며, 폭은 1.1, 두께는 0.32이다. 그리고 재료의 탄성계수는 29.0×10^6 이며, 포아송비는 0.22이다. 이 문제에 대한 비교 값으로 평면내 하중이 작용하는 경우의 하중작용방향의 참고값(reference value)은 0.5424×10^{-2} 을 가지며 평면외 하중이 작용하는 경우는 하중작용방향의 변위가 0.1754×10^{-2} 을 가진다. 해석결과를 참고값으로 정규화하여 표 5에 나타내었다. 해석결과 본 연구에서 제안한 요소는 두 방향의 하중에 대해서 양호한 결과를 보여주고 있다.

3.6 α 값에 따른 요소거동 변화

본 연구에서 사용한 변분법의 경우 매개변수로 α 가 존재하며, α 가 영의 값을 갖는 경우에는 회전자유도가 없는 요소의 정식화방법이 된다. 이론적으로는 α 값이 영이 아닐 때 값의 변화에 무관하게 Euler-방정식에 의해

표 4 Cook의 평면문제에서의 끝단변위

요소구분		요소의 세분화 정도				비교
비적합 변위형	α 값	1×1×1	2×2×1	4×4×1	8×8×1	
Case 1	0.0	16.35	21.04	22.98	23.67	
	1.0	15.38	20.54	22.90	23.65	
Case 2	0.0	15.82	20.96	22.97	23.67	
	1.0	14.56	20.33	22.88	23.65	
Iura & Atluri (M1) ⁵¹⁾		17.93	21.92	23.36	23.78	4절점 평면응력요소, 조각시험 비통과
Iura & Atluri (M2) ⁵¹⁾		12.80	20.09	22.90	23.66	4절점 평면응력요소, 조각시험 통과
Ibrahimbegovic 등 ³¹⁾		14.07	20.68	22.98	23.63	회전자유도 갖는 4절 점 평면요소
참고값		23.91				

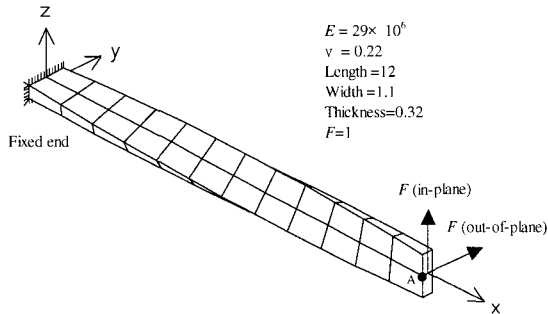


그림 8 비틀어진 캔틸레버

표 5 비틀어진 캔틸레버의 정규화된 끝단변위

요소구분		하중작용방향		비고
비적합 변위형	α 값	평면내하중	평면외하중	
Case 1	0.0	0.997	0.990	
	1.0	0.995	0.990	
Case 2	0.0	0.988	0.983	
	1.0	0.984	0.982	
HEXA(8) ⁹⁾		0.983	0.977	8절점 입체요소
HEXA20 ⁹⁾		0.991	0.995	20절점 입체요소
HEX20(R) ⁹⁾		0.993	0.999	20절점 입체요소
HEX8R ⁵⁾		0.951	0.960	8절점 입체요소
HEX8RX ⁵⁾		1.001	0.957	8절점 입체요소
참고값		1.000	1.000	

변위장과 회전장의 관계가 만족된다⁶⁾. 그러나, 순수휨을 받는 캔틸레버의 문제(그림 6(b))를 대상으로 α 값을 변화시켜가며 수치시험을 시행한 결과 α 값에 따라 해석의 정확성이 변하는 경향을 보인다. α 값의 변화에 따른 수치시험결과를 이론해로 정규화하여 그림 9에 나타내었다.

수치시험결과를 비교해볼 때, 기본적인 비적합변위형만 사용한 경우(case 2)는 추가적인 비적합형이 모두 사용된 경우(case 1)에 비해 α 값이 커짐에 따라 해의 정확성이 나빠지는 경향이 두드러졌다. 따라서, α 의 값은 본 연구의 수치예제에서 사용한 바와 같이 값을 1로 사용하는 것이 적당할 것으로 보이며, 본 연구에서 사용한 추가적인 비적합변위형이 α 값의 변화에 따른 해의 변화를 둔감하게 하는 효과가 있음을 확인하였다. 따라서 회전자유도를 도입할 경우(α 값이 0이 아닌경우)에는 본 연구에서 제안한 비적합변위형의 추가 및 수정하는 방법이 매우 효율적임을 알 수 있다.

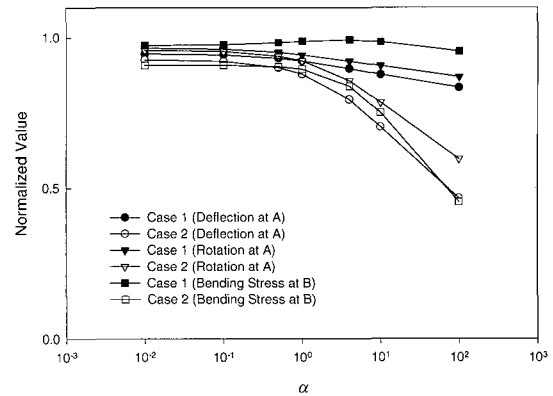


그림 9 값의 변화에 따른 요소의 거동변화

4. 결 론

본 연구에서는 회전장이 독립변수로 존재하는 범함수를 이용하여 회전자유도의 도입여부가 α 값에 따라 결정되는 8절점 비적합 입체요소를 개발하였다. 이 요소는 기본적인 비적합 변위형외에 찌그러진 요소에서의 휨거동개선을 위하여 추가적인 비적합변위형이 채택되어 사용되었으며, 일정변형율의 표현을 위한 비적합변위형의 효과적인 수정방법을 제시하였다. 제시된 비적합변위형의 수정방법은 개발된 요소의 수치시험을 통하여 적용성이 검증되었다. 다양한 수치시험결과 본 연구에서 제시된 요소는 정규체눈을 가진 요소체눈의 경우는 물론 찌그러진 요소체눈 상태에서도 양호한 결과를 보여주었다. 본 연구에서 제시된 요소들 중 경우 1이 가장 양호한 거동을 보였으며, 회전자유도의 필요성 유무에 따라 값을 1 혹은 0의 값이 선택적으로 사용될 수 있다.

참 고 문 헌

1. 최창근, 유한요소법, 집문당, 1992
2. Hughes, J. R. and Brezzi, F., "On drilling degrees of freedom," *Comp. Methods Appl. Mech. Eng.*, 72, 1989, pp.105~121
3. Ibrahimbegovic, A., Taylor, R. L., Wilson, E. L., "A robust quadrilateral membrane element with rotational degrees of freedom," *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 30, 1990, pp.445~457

4. Ibrahimbegovic, A. and Wilson, E. L., "Thick Shell and Solid Finite Elements with Independent Rotation Fields," *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 31, 1991, pp.1393~1414
5. Yunus, S. M. and Pawlak, T. P., "Solid Elements with Rotational Degrees of Freedom: Part I - Hexahedron Elements," *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 31, 1991, pp.573~592
6. Iura, M. and Atluri, S. N., "Formulation of a membrane finite element with drilling degrees of freedom," *Computational Mechanics*, 9, 1992, pp.417~428
7. Choi, C. K., and Chung, K. Y., "Three dimensional variable node solid element with drilling degrees of freedom," *Proceedings of 6th International Conference on Computing in Civil and Building Eng.*, Berlin, Germany, 12-15, July, 1, 1995, pp.521~528
8. Choi, C. K., Chung, K. Y. and Lee, N. H., "Three-dimensional non-conforming 8-node solid elements with Rotational Degrees of Freedom," *Structural Engineering and Mechanics*, Vol. 4, No. 5, 1996, pp.569~586
9. MacNeal, R. H. and Harder, R. L., "A Proposed Standard Set of Problems to Test Finite Element Accuracy," *Finite Elements in Analysis and Design*, 1, 1985, pp.3~20
10. Taylor, R. L., Simo, J. C., Zienkiewicz, O. C. and Chan, A. C. H., "The Patch Test - a Condition for Assessing FEM convergence," *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 22, 1986, pp. 39~62
11. Wilson, E. L. and Ibrahimbegovic, A., "Use of incompatible displacement modes for the calculation of element stiffnesses or stresses", *Finite Elements in Analysis and Design*, 31, 1990, pp.229~241
12. Choi, C. K. and Lee, N. H., "Three Dimensional Solid elements for Adaptive Mesh Gradation," *Structural Engineering and Mechanics*, Vol. 1, No. 1, 1993, pp.61~74

(접수일자 : 2000. 8. 10)