

확률론적 구조설계 최적화기법에 대한 비교연구

A Comparative Study on Probabilistic Structural Design Optimization

양 영 순*

Yang, Young-Soon

이 재 옥**

Lee, Jae-Ohk

(논문접수일 : 2000년 12월 13일 ; 심사종료일 : 2001년 5월 3일)

요 지

확률론적 구조설계 최적화는 구조물의 역학적 특성이나 하중의 불확실성이나 임의성과 같은 변동성을 정량적이고 합리적으로 고려할 수 있다는 점에서 기존의 전통적인 확정론적 최적화와 비교된다. 확률론적 최적화의 방법론으로는 개선된 일계이차모멘트법을 이용하는 신뢰도지수에 기반한 접근법(MPDF search)이 널리 알려져 있으며, 최근 목표성능치에 기반한 접근법(MPTP search)이 새롭게 제안되었다. 본 논문에서는 이들 두 가지 접근법에 대한 정식화를 수행하고, 특히 탐색과정에서 소모적인 반복계산을 발견하고 제거하는 알고리즘을 제시하였다. 예제에서 두 접근법에 의한 확률론적 최적화를 수행하고 구조설계 최적화의 관점에서 두 접근법의 장단점을 비교·검토하였다.

핵심용어 : 확률론적 구조설계 최적화, 신뢰도지수, 목표성능치

Abstract

Probabilistic structural design optimization which is characterized to have the so-called probabilistic constraints is preferred to deterministic design optimization because inherent randomness and uncertainties in structural and environmental properties are to be taken into account in quantitative and rational way. In this paper, the well-known reliability index based approach, that is, the MPDF search, and the newly introduced target performance based approach, that is, the MPTP search, are formulated. Additionally an algorithm which detects and eliminates exhaustive iterations is presented. Two approaches are applied for some application examples and their characteristics are compared in view of structural design optimization.

Keywords : structural design optimization, probabilistic constraints, reliability index, target performance

1. 서 론

구조 신뢰성공학은 구조물이 받는 하중의 임의성이나 불확실성, 그리고 구조물 자체의 역학적·기하학적 특성치에서 확인되는 변동성을 고려하여 확률론적 관점에서 구조물의 안전성을 정량적으로 평가할 수 있는 방법론을 제공한다. Monte-Carlo 추출법 등에 의한

파괴확률의 직접적인 산정이나 개선된 일계이차모멘트법 등을 이용한 신뢰도지수의 산정은 이와 같은 확률론적 구조 안전성 해석의 대표적인 방법론이다.¹⁾ 특히 최근 이들 구조 신뢰성공학의 방법론은 응답면 기법과 연계되어 개발되면서 불확실성과 변동성의 고려라는 개념적인 합리성과 계산상의 효율성을 동시에 추구하며 그 적용범위를 점차 확장하고 있다.²⁾

* 정회원·서울대학교 조선해양공학과, 교수

** 서울대학교 조선해양공학과, 박사과정

• 이 논문에 대한 토론을 2001년 9월 29일까지 본 학회에 보내주시면 2001년 12월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

식(1)로 표현할 수 있는 기존의 전통적인 확률론적 최적화와는 달리

$$\begin{aligned} & \text{find } \mathbf{d}, \text{ which minimizes } f(\mathbf{d}) \\ & \text{subjected to } g_i(\mathbf{d}) \geq 0 \quad (i=1, 2, \dots, p) \quad (1) \end{aligned}$$

확률론적 구조설계 최적화는 아래의 식(2)에서와 같이 설계변수 \mathbf{d} 와 함께 불확실성을 고려하기 위한 확률변수 \mathbf{x} 를 도입하여 식(1)에서의 확률론적 구속조건이 위배될 확률을 허용 위배확률 P_i 이하로 제한하는 확률론적 구속조건을 갖는 최적화 문제로 표현된다.

$$\begin{aligned} & \text{find } \mathbf{d}, \text{ which minimizes } f(\mathbf{d}) \\ & \text{subjected to } P[g_i(\mathbf{d}, \mathbf{x}) \leq 0] \leq P_i \\ & \quad (i=1, 2, \dots, p) \quad (2) \end{aligned}$$

여기서 확률론적 구속조건의 만족여부는 추출법이나 모멘트법을 이용하여 판별할 수 있는데, 충분한 횟수의 한계상태식 평가가 요구되는 추출법은 계산상의 시간 비용 측면에서나 효율적인 최적점 탐색을 위한 민감도의 산정 측면 모두에서 불리하다. 따라서 지금까지의 연구에서는 일반적으로 모멘트법을 이용하여 계산된 신뢰도지수를 목표 신뢰도지수와 비교하여 확률론적 구속조건을 만족여부를 판별하고 설계변수에 대한 신뢰도지수의 민감도를 이용하는 방법이 선호되고 있다.³⁾⁻⁷⁾ 한편 최근에 신뢰도지수를 이용하여 확률론적 구속조건을 평가하는 정식화 과정을 역으로 적용하여 목표 신뢰도지수로부터 목표성능치를 계산하여 확률론적 구속조건을 평가하고 설계변수에 대한 목표성능치의 민감도를 이용하는 방법론이 새롭게 소개된 바 있다.⁸⁾

본 논문에서는 확률론적 구조설계 최적화의 방법론으로 지금까지 일반적으로 이용되어온 신뢰도지수에 기반한 접근법과 최근에 새롭게 소개된 목표성능치에 기반한 접근법의 두 접근법에 대해 기본 개념과 정식화 과정을 정리하였다. 또한 각 접근법에서 신뢰도지수 및 목표성능치를 계산하는 과정에서 발생할 수 있는 소모적인 반복계산을 발견하고 제거하여 계산효율을 개선할 수 있는 알고리즘을 제시하였다. 두 접근법을 이용하여 몇 가지 예제에 대해 확률론적 구조설계 최적화를 수행하고 각 접근법의 장단점을 비교 검토하였다.

2. 신뢰도지수에 기반한 접근법

신뢰도지수에 기반한 접근법에 의한 확률론적 구조설계 최적화는 다음의 식(3)과 같이 표현할 수 있으며,

$$\begin{aligned} & \text{find } \mathbf{d}, \text{ which minimizes } f(\mathbf{d}) \\ & \text{subjected to } \beta_i(\mathbf{d}) \geq \beta_{i, target} \\ & \quad (i=1, 2, \dots, p) \quad (3) \end{aligned}$$

설계변수 \mathbf{d} 와 확률변수 \mathbf{x} 의 함수로 주어지는 한계상태식 $g_i(\mathbf{d}, \mathbf{x})=0$ 에 대한 신뢰도지수 $\beta_i(\mathbf{d})$ 를 산정하기 위해서는 일반적으로 2.1절에 소개된 개선된 일제이차모멘트법(Advanced First-Order Second-Moment method : AFOSM)이 이용된다. 특히 이 경우에 전체적인 최적화 과정은 최적점에 도달하기까지 설계변수 \mathbf{d} 가 갱신되는 외부적인 최적화 과정이 있고 각 설계점마다 다시 신뢰도지수를 산정하기 위해 확률변수 \mathbf{x} 가 갱신되는 최적화 과정이 내포된 형태가 된다.

2.1 신뢰도지수의 산정

평균이 μ 이고 표준편차가 σ 인 정규분포 확률변수 X 는 식(4)에 의해

$$U = (X - \mu) / \sigma \quad (4)$$

평균이 0이고 표준편차가 1인 표준정규분포 확률변수 U 로 변환되며, 표준정규분포 확률변수의 공간에서 한계상태식이 선형이면 신뢰도지수 β 는 원점에서 한계상태식까지의 최소거리와 같고 파괴확률 P_f 와는 다음의 관계가 있다.¹⁾

$$\begin{aligned} P_f &= \Phi(-\beta) = 1 - \Phi(\beta), \\ \text{where } \Phi(\beta) &= \int_{-\infty}^{\beta} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} u^2\right) du \quad (5) \end{aligned}$$

따라서 신뢰도지수는 다음과 같이 표준정규분포 확률변수의 공간에서 정의되는 새로운 최적화 문제로 정식화할 수 있는데,

$$\begin{aligned} & \text{find } \mathbf{u}, \text{ which minimizes } \beta = |\mathbf{u}| = \sqrt{\mathbf{u}^T \mathbf{u}} \\ & \text{subjected to } g(\mathbf{u}) = 0 \quad (6) \end{aligned}$$

한계상태식을 일차항까지 Taylor 전개하여 선형 근사하고 Lagrangian multiplier를 이용하면 반복계산을 위한 새로운 확률변수 벡터를

$$\mathbf{u}^{(k+1)} = \frac{\mathbf{G}_{\mathbf{u}^{(k)}}^T \mathbf{u}^{(k)} - \mathbf{g}(\mathbf{u}^{(k)})}{\mathbf{G}_{\mathbf{u}^{(k)}}^T \mathbf{G}_{\mathbf{u}^{(k)}}} \mathbf{G}_{\mathbf{u}^{(k)}},$$

$$\text{where } \mathbf{G}_{\mathbf{u}} = \left\{ \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial u_1}, \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial u_2}, \dots, \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial u_n} \right\}^T \quad (7)$$

로 쉽게 유도할 수 있다. 이때 반복계산의 시작점으로 는 일반적으로 평균점이 이용된다.

이러한 방법론은 한계상태식을 일차항까지만을 고려하고 확률변수의 통계적 정보는 이차 모멘트인 표준편차까지만을 고려하므로 일계이차모멘트법이라고 한다. 그리고, 식(6)의 최적점 \mathbf{u}^* 은 한계상태식의 값이 0인 파괴면 상의 점들 중 표준정규분포 확률변수의 공간에서 원점으로부터의 거리가 가장 가까워 발현빈도가 가장 높은 점이므로 MPFP(Most Probable Failure Point)라고 한다.

비정규분포 확률변수의 경우에는 다음과 같은 Rackwitz-Fiessler 변환법을 이용하여 표준정규분포 확률변수로 변환한다.

$$F_X(x) = \Phi(u) \quad (8)$$

2.2 설계변수에 대한 신뢰도지수의 민감도

FDM(Feasible Direction Method)이나 SLP(Sequential Linear Programming), SQP(Sequential Quadratic Programming) 등과 같은 많은 최적화 기법에서는 효과적인 최적점 탐색을 위해 설계변수에 대한 구속조건의 미분계수가 이용되며, 식(3)으로 정식화된 확률론적 최적화 문제에서는 설계변수에 대한 신뢰도지수의 민감도가 요구된다. Kwak 등은 최적화 문제의 이론적인 정식화 과정에서부터, Bjerager 등은 신뢰도지수와 확률변수 공간에서의 수학적 접근으로부터 설계변수에 대한 신뢰도지수의 민감도를 다음과 같이 유도하였다.^{9),10)}

$$\frac{d\beta}{d\mathbf{d}} = \frac{\mathbf{G}_d}{\sqrt{\mathbf{G}_{\mathbf{u}^*}^T \mathbf{G}_{\mathbf{u}^*}}} \quad (9)$$

한계상태식 g 는 확률변수 x_i 와 확률변수와는 무관한 인자인 y_i 의 함수이며, 설계변수는 평균이나 표준편차와 같은 확률변수의 통계적 특성치 z_i 이거나 확률변수와는 무관한 y_i 이다. 따라서 식(8)의 변환식을 고려하면 식(9)에서의 각 미분계수는

$$G_d|_{d_i=y_i} = \frac{\partial g(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial y_i}$$

$$G_d|_{d_i=z_i} = \frac{\partial g(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial z_i} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial g(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial z_i}$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{\partial g(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial x_k} \frac{\partial F_{X_k}^{-1}(\Phi(u_k), \mathbf{z})}{\partial z_i}$$

$$G_{u_i} = \frac{\partial g(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial u_i} = \frac{\partial g(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial u_i}$$

$$= \frac{\partial g(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial x_i} \frac{\partial F_{X_i}^{-1}(\Phi(u_i), \mathbf{z})}{\partial u_i}$$

$$= \frac{\partial g(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial x_i} \frac{\partial F_{X_i}^{-1}(\Phi(u_i), \mathbf{z})}{\partial \Phi(u_i)} \phi(u_i) \quad (10)$$

로부터 계산할 수 있다.

한편 설계변수가 확률변수의 통계적 특성치 z_i 인 경우에는 원점으로부터 MPFP까지의 거리로 표현되는 신뢰도지수의 정의로부터

$$\frac{\partial \beta}{\partial z_i} = \frac{\partial}{\partial z_i} \sqrt{\mathbf{u}^T \mathbf{u}} = \frac{1}{\beta} \sum_{k=1}^n u_k \frac{\partial u_k}{\partial z_i}$$

$$= \frac{1}{\beta} \sum_{k=1}^n u_k \frac{\partial \Phi^{-1}(F_{X_k}(x_k, \mathbf{z}))}{\partial z_i}$$

$$= \frac{1}{\beta} \sum_{k=1}^n \frac{u_k}{\phi(\Phi^{-1}(F_{X_k}(x_k, \mathbf{z})))} \frac{\partial F_{X_k}(x_k, \mathbf{z})}{\partial z_i} \quad (11)$$

를 얻을 수 있는데, 식(11)과 식(10)의 두 번째 식이 동일함은 쉽게 증명되며 특히 식(11)은 한계상태식의 미분계수를 계산하지 않고도 설계변수에 대한 신뢰도지수의 민감도를 얻을 수 있는 장점이 있다.

3. 목표성능치에 기반한 접근법

신뢰도지수를 이용한 확률론적 구속조건의 평가는 각 설계점에서 신뢰도지수를 계산하고 이를 목표 신뢰

도지수와 비교하는 것이 핵심이다. 이때 개선된 일계이차모멘트에 의한 신뢰도지수의 산정은 원점으로부터 최단거리에 있는 한계상태식상의 점인 MPFP의 탐색과정으로 설명할 수 있다.

목표성능치에 기반한 접근법은 이러한 신뢰도지수에 기반한 접근과정을 역으로 적용한 방법이다.⁸⁾ 즉 먼저 한계상태식의 값이 0이면서 원점으로부터의 거리가 최소인 점을 탐색하는 식(6)과는 반대로, 원점으로부터 목표 신뢰도지수만큼의 거리에 있는 점들 중에서 한계상태식의 최소값 a_{target} 를 얻는다. 한계상태식을 흔히 성능함수라고도 하므로 a_{target} 를 목표성능치라고 하는데, 이 목표성능치가 0 보다 크면 원점으로부터 목표 신뢰도지수만큼 떨어진 위치의 모든 점에서 한계상태식의 값이 양수로서 파괴가 발생하지 않은 것을 의미하므로 목표 신뢰도지수만큼의 확률론적 안전성을 만족한다고 할 수 있다. 반대로 목표성능치가 음수이면 파괴가 발생한 점이 존재하므로 목표 신뢰도지수만큼의 안전성을 만족하지 못 한다고 할 수 있다.

따라서 목표성능치에 기반한 확률론적 구조설계 최적화는 목표성능치 a_{target} 의 부호에 의해 확률론적 구속조건이 평가되며 다음과 같이 정식화할 수 있다.

$$\begin{aligned} & \text{find } \mathbf{d}, \text{ which minimizes } f(\mathbf{d}) \\ & \text{subjected to } a_{i,target}(\mathbf{d}) \geq 0 \\ & (i = 1, 2, \dots, p) \end{aligned} \quad (12)$$

3.1 목표성능치의 산정

목표성능치 a_{target} 은 원점으로부터의 거리가 목표 신뢰도지수 β_{target} 와 같은 점들에서 한계상태식의 최소값이므로 다음과 같은 새로운 최적화 문제로 정의할 수 있는데,

$$\begin{aligned} & \text{find } \mathbf{u}, \text{ which minimizes } a_{target} = g(\mathbf{u}) \\ & \text{subjected to } \beta = |\mathbf{u}| = \sqrt{\mathbf{u}^T \mathbf{u}} = \beta_{target} \end{aligned} \quad (13)$$

신뢰도지수의 산정을 위한 식(6)의 정식화와 비교할 때 목적함수와 등가구속조건이 서로 자리바꿈한 형태이므로 역 일계이차모멘트법(Inverse AFOSM)이라

고도 할 수 있다.

식(13)의 최적점 \mathbf{u}^* 는 표준정규분포 확률변수의 공간에서 원점으로부터의 거리가 β_{target} 인 목표점들 가운데 성능이 최소인 점이므로 MPTP(Minimum Performance Target Point)라고 하며 다음의 식(14)를 이용한 반복계산으로부터 얻을 수 있다.

$$\mathbf{u}^{(k+1)} = -\beta_{target} \frac{\mathbf{G}_{\mathbf{u}^{(k)}}}{\sqrt{\mathbf{G}_{\mathbf{u}^{(k)}}^T \mathbf{G}_{\mathbf{u}^{(k)}}}} \quad (14)$$

이때 반복계산의 시작점은 MPFP 탐색에서와 같이 평균점을 이용할 수도 있으나 MPTP의 탐색에 있어서는 MPTP가 반드시 원점으로부터 β_{target} 의 거리에 위치한다는 점을 이용하여 다음과 같이 MPTP로 예상되는 점을 이용할 수도 있다.

$$x_i^{(0)} = \begin{cases} \mu_i - \frac{\beta_{target}}{\sqrt{n}} \sigma_i & \text{if } \frac{\partial g}{\partial x_i} |_{\mu} > 0 \\ \mu_i + \frac{\beta_{target}}{\sqrt{n}} \sigma_i & \text{if } \frac{\partial g}{\partial x_i} |_{\mu} < 0 \end{cases} \quad (15)$$

3.2 설계변수에 대한 목표성능치의 민감도

목표성능치는 바로 한계상태식의 값이므로 식(9)나 식(11)에 보인 신뢰도지수의 민감도보다 훨씬 간단하게 설계변수에 대한 한계상태식의 미분계수가 바로 목표성능치의 민감도가 된다.

$$\frac{da_{target}}{d\mathbf{d}} = \mathbf{G}_d = \frac{dg}{d\mathbf{d}} \quad (16)$$

따라서 항상 비선형인 신뢰도지수의 민감도와는 달리 목표성능치의 민감도는 한계상태식이 선형일 경우 식(12)에서의 확률론적 구속조건이 선형성을 유지할 가능성이 많으므로 좀더 효과적인 최적화를 기대할 수 있다.

4. 소모적인 반복계산의 제거

확률론적 구속조건의 평가를 위해 신뢰도지수나 목표성능치를 이용하는 방법은 모두 설계변수의 최적화를

위한 반복계산 과정에 내부적으로 포함된, 확률변수 공간에서 MPFP나 MPTP를 탐색하기 위한 또다른 최적화 과정이다. 따라서 각 설계점에서 수행되는 내부 최적화 과정에서 반복계산의 횟수를 감소시켜 수렴속도를 향상시키고 MPFP나 MPTP의 탐색에 실패하는 경우를 제거하는 등의 개선은 확률론적 최적화의 효율적이고 자동화된 일괄수행을 위해 매우 중요하다.

Fig. 1은 MPFP나 MPTP 탐색과정에서 확인되는 대표적인 세 가지 탐색점의 이동기록인데, (c)를 제외한 (a)와 (b)에서 소모적인 반복계산이 확인되며 특히 (b)의 경우는 결과적으로 발산하게 되므로 최적화에 실패한다.

이러한 반복계산을 피하기 위해 연속적으로 얻어지는 세 탐색점 $\mathbf{u}^{(k-1)}$, $\mathbf{u}^{(k)}$, $\mathbf{u}^{(k+1)}$ 이

$$\frac{\mathbf{u}^{(k-1)T} \mathbf{u}^{(k+1)}}{|\mathbf{u}^{(k-1)}| |\mathbf{u}^{(k+1)}|} > \frac{\mathbf{u}^{(k)T} \mathbf{u}^{(k+1)}}{|\mathbf{u}^{(k)}| |\mathbf{u}^{(k+1)}|} \quad (17)$$

을 만족하면 소모적이거나 발산하는 반복과정일 수 있

으므로, 이 경우에는 $\mathbf{u}^{(k+1)}$ 대신

$$\mathbf{u}^{new} = \beta^{new} \frac{\mathbf{u}^{(k-1)} + \mathbf{u}^{(k)}}{|\mathbf{u}^{(k-1)} + \mathbf{u}^{(k)}|} \quad (18)$$

를 이용하는데 여기서 β^{new} 는 다음과 같다.

$$\beta^{new} = \begin{cases} \frac{\beta^{(k)} g(\mathbf{u}^{(k-1)}) - \beta^{(k-1)} g(\mathbf{u}^{(k)})}{g(\mathbf{u}^{(k-1)}) - g(\mathbf{u}^{(k)})} & \text{for the MPFP search} \\ \beta_{target} & \text{for the MPTP search} \end{cases} \quad (19)$$

Fig. 2에는 MPFP나 MPTP의 탐색과정에서 발생하는 소모적인 반복계산의 실례를 보였는데, 앞에서 제시한 대로 식(17)로 소모적 반복계산 여부를 판별하고 식(18)의 새로운 탐색점을 이용한 경우 Fig. 2에 보인 각각의 경우는 Fig. 3에 보인 바와 같이 개선되었다.

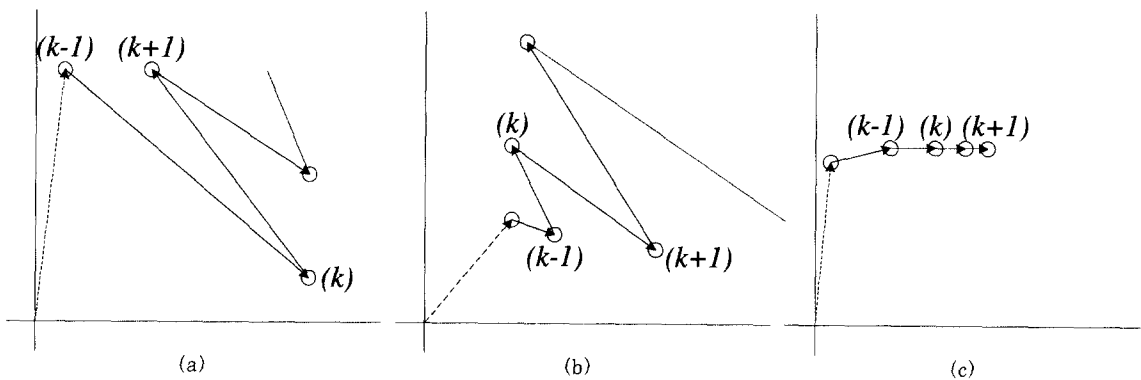


Fig. 1 Representative trends of iteration history

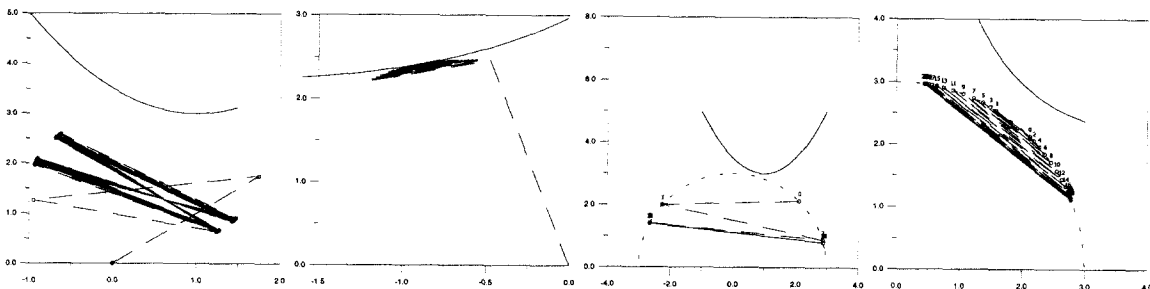


Fig. 2 Examples of exhaustive iterations

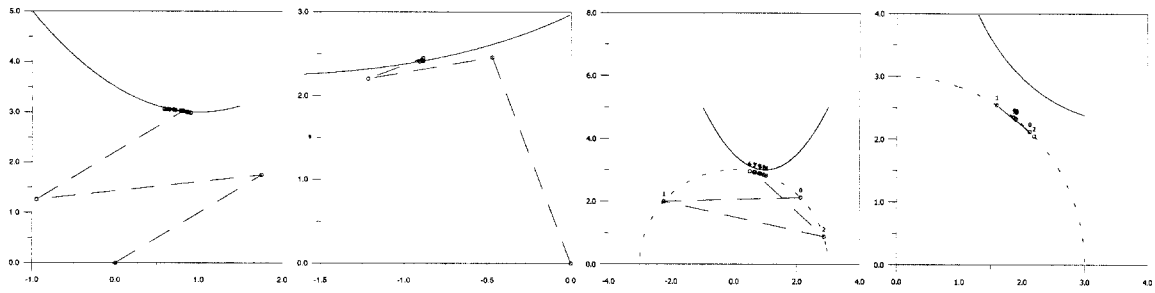


Fig. 3 Improvement by eliminating exhaustive iterations

5. 두 가지 접근법의 비교

MPFP 탐색법과 MPTP 탐색법에서의 반복계산 횟수는 한계상태식의 비선형성, 확률변수의 개수 및 확률분포의 비정규성, 그리고 탐색의 시작점으로부터 MPFP 나 MPTP까지의 거리 등과 관계가 있다. Fig. 4에는 표준정규분포 확률변수의 공간에서 MPFP와 MPTP를 탐색하는 개략적인 과정을 보였다. MPFP 탐색의 경우에는 탐색이 평균점, 즉 원점에서 출발하여 한계상태식의 값이 0이 되는 파괴면까지 이동하는데, 이 파괴면의 위치는 설계점에 따라 원점에서 가까울 수도 있고 멀 수도 있다. 반면 MPTP 탐색에서는 식(15)로 제안된 MPTP로 추정되는 점을 이용하거나 원점에서 출발하더라도 식(14)에 의하면 다음 단계에서는 이미 원점으로부터 목표 신뢰도지수만큼의 거리에 위치하게 되며 이후 그 부근에서 탐색이 이루어진다.

따라서 MPTP 탐색법의 경우에는 설계점의 변화에 무관하게 반복계산 횟수가 비교적 일정하지만, MPFP 탐색법에서는 신뢰도지수의 크기에 비례하여 반복계산 횟수도 증가하는 경향에 따라 설계점의 변화에 따라 반복계산 횟수도 변화한다. 그러므로, 설계점이 설계불가 영역(infeasible region)에 위치하여 신뢰도지수가 목표

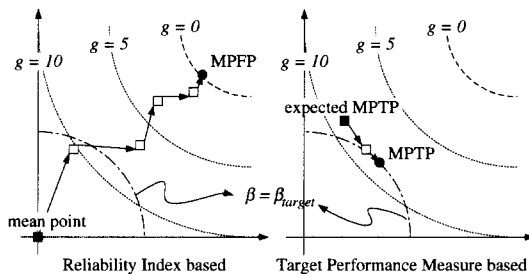


Fig. 4 Searches for the MPFP & the MPTP

신뢰도지수보다 작은 경우에는 MPFP 탐색법이 MPTP 탐색법과 반복계산 횟수에서 경쟁력이 있으나, 설계점이 설계가능영역(feasible region)에 위치하는 경우에는 일반적으로 MPFP 탐색법에서의 반복계산 횟수가 MPTP 탐색법의 경우보다 크므로 비효율적이라고 할 수 있다.

또한 MPFP 탐색법은 신뢰도지수의 값이 커서 파괴면이 원점으로부터 멀리 떨어져 있으면 반복계산의 횟수가 증가하는 단점과 함께 신뢰도지수의 값이 증가해서 발생하는 수치해석 상의 불안정성도 높아진다. 즉 신뢰도지수의 값이 크면 수치해석 상의 오류로 인해 MPFP의 탐색에 실패하는 경우가 증가하는데, 이러한 문제는 최적화 문제에서 초기 설계점의 선택에 더 많은 주의가 요구될 뿐 아니라 설계영역 전체에 대해 무작위적인 탐색(blind search)을 수행하는 유전자 알고리즘과 같은 최적화 기법의 적용을 어렵게 한다.

또한, 기본적으로 식(6)에 보인 MPFP 탐색법의 정식화에는 신뢰도지수의 부호에 대한 구분이 고려되어 있지 않으므로 반드시 평균점에서의 한계상태식의 값을 조사하여 신뢰도지수가 양인 경우와 음인 경우를 가려 주어야 한다. 식(13)의 MPTP 탐색법에 대한 정식화에서도 목표 신뢰도지수의 부호에 대한 구분이 고려되지 않은 점은 동일하지만, 일반적인 구조최적화 문제에서는 음의 목표 신뢰도지수가 주어지는 경우는 없으며 예외적으로 음의 목표 신뢰도지수가 주어진 경우에도 식(14)를 이용한 탐색점의 갱신을 동일하게 적용할 수 있다.

마지막으로 최적화를 위한 설계변수에 대한 신뢰도지수와 목표성능치의 민감도와 관련하여 이미 살펴본 바와 같이 신뢰도지수의 민감도는 항상 비선형일 수밖에 없으나 목표성능치의 민감도는 한계상태식이 선형인 경우 선형성이 유지되는 경우가 많아 효율적인 최적화가 가능하다.

이와 같이 여러 가지 측면에서 MPTP 탐색법을 이용하는 목표성능치에 기반한 확률론적 구조설계 최적화가 상대적으로 유리한 특성을 보인다고 할 수 있다. 그러나, 특히 반복계산 횟수와 관련하여 설계점의 이동이 설계불가영역(infeasible region)에 머무는 경우에는 MPFP 탐색법도 충분히 효율적이며, 동일한 한계상태식에 대해서도 신뢰도지수와 목표성능치로 표현된 확률론적 구속조건은 설계공간에서 서로 전혀 다른 등가선(contour)을 가지므로 최적화 과정의 전체적인 효율까지 단정할 수 없음을 유의할 필요가 있다.

6. 계산 예

6.1 외팔보 문제

Fig. 5에서와 같이 피로하중 Q_1 과 설계하중 Q_2 를 받는 외팔보 단면의 최적화를 수행하였다.⁷⁾

고려된 구속조건은 식(20)에 보인 4개이며 g_1 과 g_2 에 대한 목표 신뢰도지수는 3.0이고 g_3 과 g_4 에 대한 목표 신뢰도지수는 2.0이다.

$$g_1 = Q_2 - \frac{0.3Eb^3d}{L^2} \leq 0 \quad g_2 = N_0 \frac{6Q_1L}{bd^2} - A \leq 0$$

$$g_3 = \frac{4Q_2L^3}{Ebd^3} - A_0 \leq 0 \quad g_4 = \frac{6Q_2L}{bd^2} - R \leq 0,$$

where $L = 30.0 [in]$, $N_0 = 2.0 \times 10^6 [cycles]$,
 $A_0 = 0.15 [in]$ (20)

최적화는 FDM을 이용하였으며 초기점 (b_0, d_0) 은 (2.0, 2.0)으로 설정하였다. Table 1에는 확률론적 구속조건을 평가하기 위해 이용된 확률변수의 통계적 특성을 정리하였다.

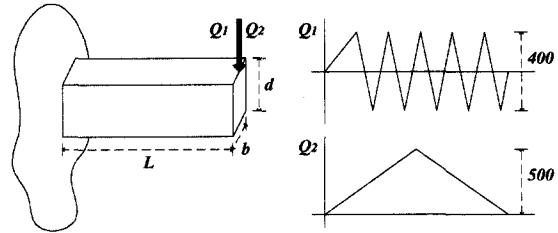


Fig. 5 The cantilever beam problem

전통적인 확정론적 최적화와 확률론적 최적화에서의 구속조건과 최적점을 설계공간에서 보면 Fig. 6과 같다. 확정론적 최적화에서 최적점이 구속조건에 위치하는 데 반해 확률론적 최적화의 경우에는 목표 신뢰도지수만큼의 확률론적 안전여유를 위해 경계로부터 일정한 거리를 유지하고 있음을 확인할 수 있다.

한편 신뢰도지수와 목표성능치에 기반한 두 접근법의 차이점을 보이기 위해 한계상태식 g_3 에 대해 세 설계점 (2.0, 2.0), (2.0, 2.2), (0.28, 3.95)에서 신뢰도지수와 목표성능치의 관계를 보인 그림이 Fig. 7이다. (2.0, 2.0)에서는 신뢰도지수(점 A)가 목표 신뢰도지수인 2.0보다 작고 목표성능치(점 C)도 0보다 작아 확률론적 구속조건이 만족되지 못한 경우이고, (2.0, 2.2)에서는 신뢰도지수(점 B)도 2.0보다 크고 목표성능치(점 D)도 양수이므로 설계변수를 갱신하여 목적함수의 감소를 좀더 추구할 수 있는 경우이다. 이때 신뢰도지수에 주목하여 점 A나 점 B를 최적점에서의 점 O로 옮기는 접근법이 신뢰도지수에 기반한 접근법이고 목표 신뢰도지수축에서의 한계상태식의 값인 목표성능치에 주목하여 점 C나 점 D를 점 O로 옮기는 접근법이 목표성능치에 기반한 접근법이 된다.

Table 1 Statistical properties for the cantilever beam problem (* for median)

	description		distribution	mean	CoV
E	Young's modulus	[ksi]	Normal	30000.0	0.10
Q_1	fatigue load	[klb]	Log-Normal	0.4*	0.15
Q_2	design load	[klb]	Log-Normal	0.5*	0.15
R	yield strength	[ksi]	Weibull	50.0	0.12
A	fatigue strength coeff.	[ksi]	Log-Normal	1.46E+10*	0.50

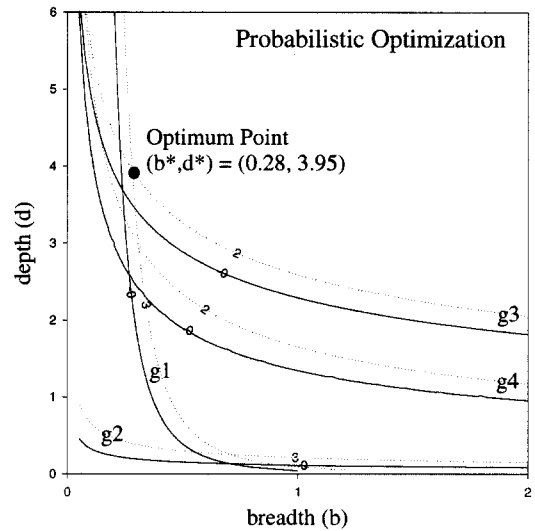
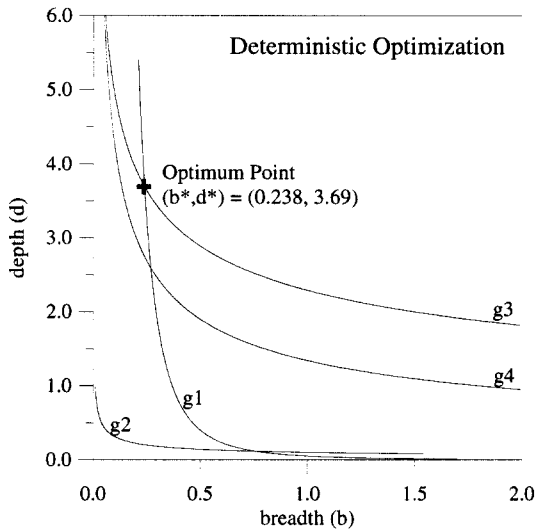


Fig. 6 Constraints and optimum points in deterministic and probabilistic optimization

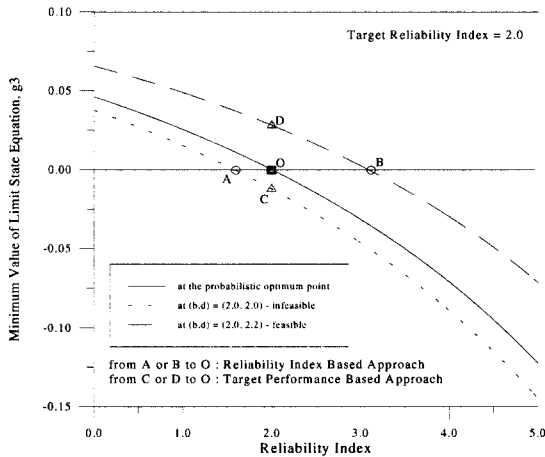


Fig. 7 Comparison of two approaches

FDM에 의해 신뢰도지수에 기반한 접근법은 9번, 목표성능치에 기반한 접근법은 10번의 반복계산 후 최적점에 도달하였으며 그동안 각 설계점에서 신뢰도지수와 목표성능치의 산정을 위해 요구된 반복계산 횟수의 합을 Table 2에 정리하였다. 목표성능치에 기반한 접근법이 FDM에 의해 1회 더 많은 반복계산을 수행하였음에도 불구하고 목표성능치의 산정을 위해 수행된 반복계산 횟수가 신뢰도지수의 산정을 위해 수행된 반복계산 횟수보다 작다. 특히 한계상태식 g_2 에 대해서는 Fig. 6에서 확인할 수 있듯이 신뢰도지수의 값이

Table 2 Iterations for searches of the MPFP and the MPTP for the cantilever beam problem

	g_1	g_2	g_3	g_4
β -based	73	169	84	101
α_{target} -based	73	22	77	79

크므로 신뢰도지수에 기반한 접근법에서는 169번의 반복계산이 수행된 반면 목표성능치에 기반한 접근법에서는 단 22회의 반복계산만이 수행되었다.

이와 같이 MPFP 탐색법의 경우 신뢰도지수의 크기에 따라 반복계산의 횟수가 비례하는 현상은 단면의 폭 b 를 2.0으로 고정하고 깊이 d 만을 변화시키며 MPFP 탐색법과 MPTP 탐색법에서의 반복계산 횟수를 보인 Fig. 8에서도 확인할 수 있다. 즉 왼편의 MPFP 탐색법에서는 깊이 d 가 증가함에 따라 신뢰도지수의 값도 증가하고 반복계산 횟수도 따라서 증가하지만 오른편의 MPTP 탐색법에서는 신뢰도지수의 값에 무관하게 반복계산 횟수가 일정한 경향을 보인다.

6.2.3 요소 트러스 문제

Fig. 9에 보인 3 요소 트러스 구조물의 중량이 최소화 되도록 각 요소의 단면적 최적화를 수행하였다.⁷⁾

각 요소에 발생하는 응력성분에 대한 제한만을 확률론적 구속조건으로 고려하고

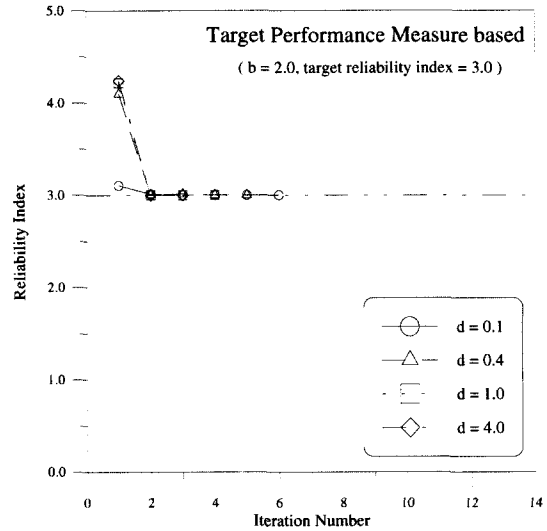
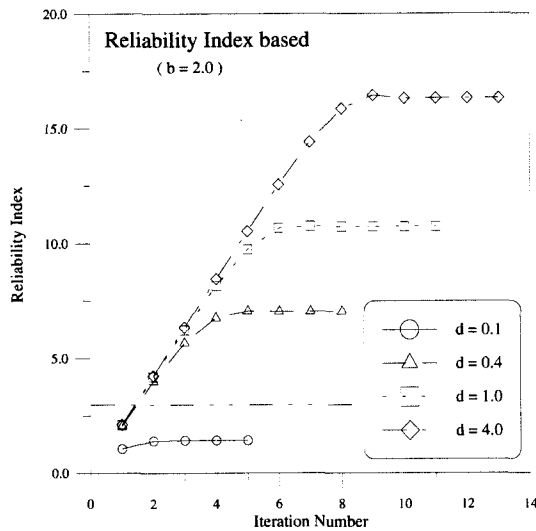


Fig. 8 Comparison of iteration numbers required for the MPFP and the MPTP searches

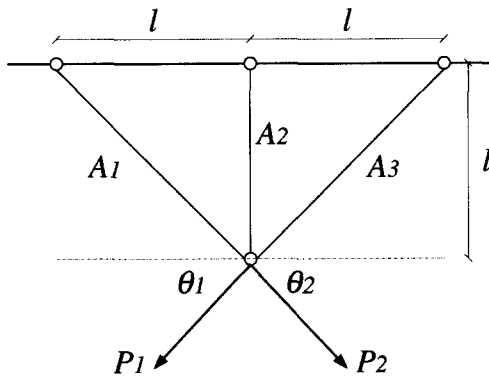


Fig. 9 The 3 bar truss problem

$$\begin{aligned}
 g_{1,2} &: -\sigma_a^- \leq \sigma_1 \leq \sigma_a^+, \\
 g_{3,4} &: -\sigma_a^- \leq \sigma_2 \leq \sigma_a^+, \\
 g_{5,6} &: -\sigma_a^- \leq \sigma_3 \leq \sigma_a^+
 \end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned}
 g_{7,8} &: 0.5 \leq A_1 \leq 1.2, \\
 g_{9,10} &: 0.0 \leq A_2 \leq 4.0, \\
 g_{11,12} &: 0.5 \leq A_3 \leq 1.2
 \end{aligned} \tag{22}$$

설계변수인 각 요소의 단면적의 범위를 제한하였으며, 고려된 확률변수의 통계적 특성은 Table 3에 정리된 바와 같다.

FDM을 이용하여 최적화를 수행하였으며 구조물의 기하학적, 역학적 특성이 완전히 좌우대칭인 점과 각 요소에서 발생되는 응력성분에 대한 추정으로부터 설계변수는 $A_1 (= A_3)$ 와 A_2 의 두 개로 설정하고 응력에 대한 구속조건도 g_2 와 g_4 만을 고려하였다. 이때 초기 점 ($A_1 = A_3, A_2$)은 (0.85, 2.00)을 이용하였다.

목표 신뢰도지수가 2.0일 때 FDM에 의한 반복계산 횟수와 최적해, MPFP나 MPTP의 탐색을 위한 반복계산 횟수의 합을 Table 4에 정리하였다. 괄호안에 표시된 MPFP나 MPTP의 탐색을 위한 반복계산 횟

Table 3 Statistical properties of random variables for the 3 bar truss problem(* for median)

	description		distribution	mean	CoV
P_1	external load	[lbs]	Gumbel	20000.0	0.20
P_2	external load	[lbs]	Gumbel	20000.0	0.20
θ_1	loading angle		Normal	$\pi / 4$	0.10
θ_2	loading angle		Normal	$\pi / 4$	0.10
σ_a^+	tens. allowable stress	[lbs]	Log-Normal	20000.0*	0.05
$-\sigma_a^-$	comp. allowable stress	[lbs]	Log-Normal	15000.0*	0.05

Table 4 Results of probabilistic optimization ($\beta_{target}=2.0$)

(A_1^*, A_3^*, A_2^*)	Iterations by FDM		f^*	Iterations for Searches of The MPFP or The MPTP	
				g_2	g_4
β -based	6	(0.5613 , 1.5005)	3.0882	57 (9.5)	48 (8.8)
a_{target} -based	10	(0.5618 , 1.5002)	3.0892	72 (7.2)	55 (5.5)

수의 평균값에서는 MPTP 탐색법이 여전히 우수하지만, 목표성능치에 기반한 접근법의 경우 FDM에 의한 반복계산 횟수가 신뢰도지수에 기반한 접근법의 두 배 가까이 크므로 전체적인 반복계산 횟수에서는 역전된 결과를 보여준다.

그러나, 대칭성을 이용한 문제의 단순화를 무시하여 A_1, A_2, A_3 모두를 별개의 설계변수로 고려하고 응력 구속조건도 g_1 에서 g_6 모두를 고려하면, 목표성능치에 기반한 접근법으로는 Table 4와 동일한 최적해를 얻을 수 있었으나 신뢰도지수에 기반한 접근법으로는 최적해를 얻을 수 없었다. 이는 응력 구속조건 g_1, g_3, g_5 에 대한 신뢰도지수가 과도하게 커서 유발되는 수치해석상의 오류에 기인한 것이다. 따라서 대상 구조물이 복잡하여 무의미한 구속조건에 대한 선별작업이 어려울 경우에는 신뢰도지수에 기반한 접근법에 의한 확률론적 구조설계 최적화는 세심한 주의가 요구된다고 할 수 있다.

6.3 10 요소 트러스 문제

구조물의 중량이 최소가 되도록 Fig. 10에 보인 10 요소 트러스 구조물의 단면적 최적화를 수행하였다.⁴⁾ 설계변수는 각 요소 단면적 (A_i)의 평균이고 목적함수는 비중이 0.11lb/in^3 일 때 전체 구조물의 중량이며 모든 요소의 단면적이 0.1in^2 이상이어야 한다는 10개의 확률론적 구속조건과 2번 절점에서의 처짐이 2.0in 를 넘을 확률이 0.001 ($\beta_{target}=3.09023$) 이하이도록 확률론적 구속조건을 설정하였다.

확률변수로는 각 요소의 단면적과 평균이 각각 10^7psi , 10^5lb 인 탄성계수 (E)와 하중 (P)을 포함하여 12개가 고려되었으며 모두 변동계수(CoV)가 0.05인 정규분포로 가정하였다. 시작점 (A_1, A_2, \dots, A_{10})이 (10.0, 10.0, ..., 10.0)인 SLP를 이용하여 최적화를 수행하고 그 결과를 Table 5에 정리하였다.

각 설계점에서 MPFP나 MPTP의 탐색을 위한 반

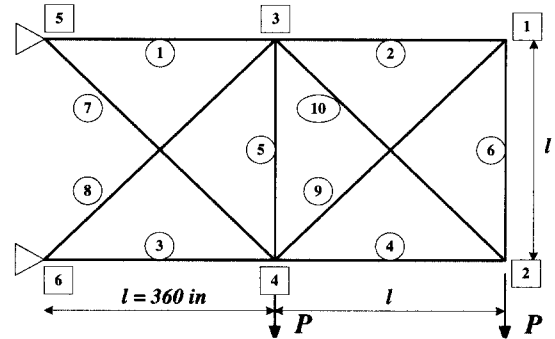


Fig. 10 The 10 bar truss problem

복계산 횟수는 비슷하지만 목표성능치에 기반한 접근법이 SLP에 의한 반복횟수가 적어 전체적으로 효율적인 결과를 보여주고 있다. 특히 팔호안의 숫자는 소모적인 반복계산을 제거하지 않은 경우의 반복계산 횟수를 기록한 것인데, 신뢰도지수에 기반한 접근법의 경우 시작점에서 많은 횟수의 반복계산이 수행되었을 뿐 아니라 첫 갱신점에서는 탈산하여 결과적으로 최적화에 실패하게 된다.

7. 결 론

본 논문에서는 구조물이 받게 되는 하중환경이나 구조물 자체의 역학적·기하학적 특성치에서 확인되는 임의성과 불확실성, 변동성을 확률변수로 고려하는 확률론적 구조설계 최적화의 방법론에 대해 살펴보았다. 널리 알려진 신뢰도지수에 기반한 접근법과 최근 새롭게 소개된 목표성능치에 기반한 접근법에 대하여 정식화 과정을 정리하고, MPFP 탐색법과 MPTP 탐색법에서 소모적인 반복계산을 판별하여 제거하는 알고리즘을 제안하였다. 두 가지 접근법을 이용하여 몇 가지 계산예의 구조설계 최적화를 수행하고 각 접근법의 특성과 장단점을 비교 검토하였다.

목표성능치에 기반한 접근법이 주어진 설계점에서

Table 5 Iteration histories for the 10 bar truss problem (*: sum of iterations)

iter. # by SLP	Deterministic		β -based Probabilistic			a_{target} -based Probabilistic				
	f^*	v_2	f^*	β	iter. for the MPFP	f^*	a_{target}	iter. for the MPTP		
0	4196.47	3.94	4196.47	-8.5455	47	(91)	4196.47	-2.9639	10	(30)
1	5881.38	2.64	7237.24	-0.5658	6	(div)	5988.87	-1.1399	8	(8)
2	5838.76	2.19	6417.15	-0.3222	4		7163.30	-0.3271	8	(56)
3	5413.11	2.12	7733.23	2.5330	6		6888.43	-0.1114	8	(8)
4	5151.92	2.07	7171.37	2.6123	8		6382.95	-0.0638	8	(12)
5	4934.66	2.06	6859.19	2.6279	11		6030.39	-0.0533	7	(33)
6	4785.09	2.06	6683.13	2.6845	7		6020.18	-0.0453	12	(14)
7	4832.79	2.05	6516.80	2.8994	7		6038.82	-0.0379	8	(8)
8	4791.07	2.04	6336.69	2.9057	10		6063.08	-0.0259	9	(15)
9	4861.45	2.01	6195.59	2.9136	10		6058.78	-0.0254	6	(6)
10	4861.92	2.01	6094.61	2.9167	6					
11			6051.30	2.9205	7					
12			6078.63	2.9265	9					
13			6069.99	2.9632	11					
14			6084.90	2.9659	7					
15			6083.35	2.9938	7					
optimum	4861.92	2.01	6083.35	2.9938	163*		6058.78	0.0254	84*	(190*)

MPTP를 탐색하기 위한 반복계산의 횟수가 비교적 일정할 뿐 아니라 탐색범위가 원점으로부터 목표 신뢰도 지수만큼 떨어진 영역으로 한정되어 수치해석 상의 안정성이 높고, 음의 신뢰도지수 여부에 대한 확인이 불필요하며 최적화를 위한 민감도 측면에서도 선형성이 유지되기 쉬운 장점이 있다. 그러나, 설계불가능영역(infeasible region)에서는 신뢰도지수에 기반한 접근법도 MPFP의 탐색을 위한 반복계산 횟수 측면에서 충분히 효율적이며, 특히 동일한 한계상태식에 대해서도 신뢰도지수와 목표성능치로 표현되는 확률론적 구속조건은 설계공간에서 전혀 다른 등가선(contour)을 형성하므로 전체적인 최적화 측면에서의 효율성을 단정하기에는 어려움이 있다.

감사의 글

본 논문은 한국과학재단 특정기초연구(과제번호 1999-2-305-003-3)의 지원에 의한 연구의 일부로서 한국과학재단의 지원에 감사드립니다.

참고 문헌

1. 양영순, 서용석, 이재욱, 구조 신뢰성 공학, 서울대학교 출판부, 1999, p.248
2. Das, P. K. and Zheng, Y., "Cumulative Formation of Response Surface and Its Use in Reliability Analysis", *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol. 15, 2000, pp.309~315
3. Enevoldsen, I. and Sorensen, J.D., "Reliability-based Optimization in Structural Engineering", *Structural Safety*, Vol. 15, 1994, pp.169~196
4. Xiaodong, L. and Grandhi, R. V., "ASTROS for Reliability-based Multidisciplinary Structural Analysis and Optimization", *Computers & Structures*, Vol. 62, 1997, pp.717~745
5. Nakib, R., "Deterministic and Reliability-based Optimization of Truss Bridges", *Computers & Structures*, Vol. 5, 1997, pp.767~775
6. Barakat, S. A., Malkawi, A. I. H. and Tahat, R. H., "Reliability-based Optimization of Laterally

- Loaded Piles", *Structural Safety*, Vol. 21, 1999, pp.45~64
7. Thanedar, P. B. and Kodiyalam, S., "Structural Optimization Using Probabilistic Constraints", *Structural Optimization*, Vol. 4, 1992, pp.236~240
 8. Tu, J., Choi, K. K. and Park, Y. H., "A New Study on Reliability-based Design Optimization", *Journal of Mechanical Design*, Vol. 121, 1999, pp.557~564
 9. Kwak, B. M. and Lee, T. W., "Sensitivity Analysis for Reliability-based Optimization Using an AFOSM Method", *Computers & Structures*, Vol. 27, 1987, pp.399~406
 10. Bjerager, P. and Krenk, S., "Sensitivity Measures in Structural Reliability Analysis", In: Thoft-Christensen P, editor. Proc. of the First IFIP Working Conference on Reliability and Optimization of Structural Systems. Berlin : Springer Verlag, 1987, pp.459~470