

Bayesian Parameter Estimation using the MCMC method for the Mean Change Model of Multivariate Normal Random Variates¹⁾

Mi Ra Oh²⁾, Eoi Lyoung Kim³⁾, Jung Wook Sim⁴⁾, Young Sook Son⁵⁾

Abstract

In this thesis, Bayesian parameter estimation procedure is discussed for the mean change model of multivariate normal random variates under the assumption of noninformative priors for all the parameters. Parameters are estimated by Gibbs sampling method. In Gibbs sampler, the change point parameter is generated by Metropolis-Hastings algorithm. We apply our methodology to numerical data to examine it.

Keywords : Multivariate Normal Random Variates, Change Point, Parameter Estimation, Gibbs Sampling, Metropolis-Hastings algorithm.

1. 서론

변화점(change point) 문제는 원래 생산라인의 제품을 관측하면서 관리수준을 벗어나는 제품을 판별하고자 하는 품질관리에서 시작되었으나 오늘날은 공학, 환경과학, 수문학, 신호처리, 생물학, 기후학, 경제학 등 거의 모든 부문에서 사용하기에 이르러서 현재는 변화점에 관한 연구는 하나의 커다란 연구분야로 자리잡고 있다. 변화점 문제는 최대우도(maximum likelihood)방법과 베이저안 방법에 의한 모수적 방법, 비모수적 방법, 그리고 의사결정 방법에 기초하여 분석되고 있다.

변화점에 관한 모든 연구는 일반적으로 두 부분으로 나누어진다. 첫 번째는 실제로 변화점이 존재하였는지에 관한 검정이다. 두 번째는 일련의 자료에서 변화가 발생했을 때 변화시점 및 관련된 모수들의 추정이다.

본 논문에서는 평균변화를 갖는 다변량 정규확률모형에서 변화시점을 포함한 모수들의 베이저안 추정을 논의하고자 한다.

다변량 정규확률모형의 변화점에 관한 베이저안 선행연구로서 Booth와 Smith (1982)는 무정보 부적절 사전분포(noninformative improper prior distribution)의 가정 하에 무변화모형(no-change

1) This work was supported by grant No. R05-2000-000-00024-0 from the Korea Science & Engineering Foundation.

2) Doctoral course, Department of Statistics, Chonnam National University, 500-757, Kwangju, Korea

3) Master, Dept of Statistics, Chonnam National University, Kwangju, 500-757, Korea

4) Professor, Dept of Statistics, Chonnam National University, Kwangju, 500-757, Korea

5) Professor, Department of Statistics, Chonnam National University, Kwangju, 500-757, Korea.

E-mail : ysson@chonnam.ac.kr

model) 대 평균변화모형에서 사후확률의 비를 이용하여 모형의 변화가 일어났는지를 논의하였다. Jeong과 Son(2000)은 변화점을 갖지 않는 무변화모형 대 평균변화모형, 무변화모형 대 공분산변화모형, 혹은 무변화모형 대 평균 및 공분산변화모형의 선택을 위한 디폴트 베이지안 절차에 관하여 논의하였다. Parreault 등(2000)은 캐나다 북부 Québec Labrador 지역에 있는 6개 강의 유량자료에 대하여 다변량 정규벡터열의 평균변화모형에 적합한지를 검토하기 위하여 공액사전분포(conjugate prior distribution) 하에서 베이지안을 이용하였다.

본 논문에서는 평균변화를 갖는 다변량 정규확률모형의 베이지안 모수 추정을 위하여 사전분포로서 다변량 정규분포의 모수들은 무정보 부적절 사전분포를 가정하였고, 변화점에 대해서는 균일 사전분포를 가정하였다. 본 논문의 2절에서는 평균변화가 존재하는 다변량 정규확률모형과 우도함수를 소개하고, 3절에서는 깁스샘플링(Gibbs sampling)에 의한 모수 추정을 위해서 결합사후분포(joint posterior distribution)로부터 각 모수들의 완전조건부 사후분포(full conditional posterior distribution)를 계산하고, 메트로폴리스-헤스팅스(Metropolis-Hastings) 알고리즘을 포함하는 깁스샘플러를 구성한다. 4절에서는 3절에서 제안된 베이지안 모수 추정법을 모의실험자료와 실제자료에 적용해 본다.

2. 평균변화가 존재하는 다변량 정규확률모형

만약 $p \times 1$ 확률벡터 X 가 다변량 정규분포 $N_p(\mu, \Sigma)$ 을 따른다면, X 의 확률밀도함수는 다음과 같이 정의된다.

$$f(X | \mu, \Sigma) = (2\pi)^{-p/2} |\Sigma|^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}(X-\mu)'\Sigma^{-1}(X-\mu)\right\}.$$

크기가 n 이고 서로 독립인 $p \times 1$ 차원의 다변량 정규확률벡터를 $X = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ 라고 할 때, 변화점(change point) r 에서 평균이 변화하는 모형, 즉 평균변화모형은 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$X_t \sim \begin{cases} N_p(\mu_1, \Sigma), & t=1, 2, \dots, r, \\ N_p(\mu_2, \Sigma), & t=r+1, r+2, \dots, n, \end{cases}$$

여기서 X_t 는 $p \times 1$ 다변량 정규확률벡터, μ_1 과 μ_2 ($\mu_1 \neq \mu_2$)는 알려져 있지 않은 $p \times 1$ 평균벡터들, Σ 는 알려져 있지 않은 $p \times p$ 공분산행렬이다. 또한 $r \in I$ 이고, 양의 정수들의 집합인 I 는 평균변화모형에서 모든 모수들이 추정될 수 있도록 가정된다.

$x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 를 X 의 관측치열이라 놓으면 평균변화모형에서의 우도함수는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}
 l(\mu_1, \mu_2, \Sigma, r | \mathbf{x}) &= \prod_{i=1}^r f(x_i | \mu_1, \Sigma) \prod_{i=r+1}^n f(x_i | \mu_2, \Sigma) \\
 &= (2\pi)^{-\frac{np}{2}} |\Sigma|^{-\frac{n}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2} \text{tr}\{\Sigma^{-1} U_1^r(\mu_1)\}\right] \exp\left[-\frac{1}{2} \text{tr}\{\Sigma^{-1} U_{r+1}^n(\mu_2)\}\right],
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

여기서

$$\begin{aligned}
 U_1^r(\mu_1) &= V_1^r + r(\mu_1 - \bar{x}_1^r)(\mu_1 - \bar{x}_1^r)', \\
 U_{r+1}^n(\mu_2) &= V_{r+1}^n + (n-r)(\mu_2 - \bar{x}_{r+1}^n)(\mu_2 - \bar{x}_{r+1}^n)', \\
 V_1^r &= \sum_{j=1}^r (x_j - \bar{x}_1^r)(x_j - \bar{x}_1^r)', \quad V_{r+1}^n = \sum_{j=r+1}^n (x_j - \bar{x}_{r+1}^n)(x_j - \bar{x}_{r+1}^n)', \\
 \bar{x}_1^r &= \sum_{j=1}^r \frac{x_j}{r}, \quad \bar{x}_{r+1}^n = \sum_{j=r+1}^n \frac{x_j}{n-r}.
 \end{aligned}$$

3. 깃스샘플링에 의한 베이저안 모수 추정

평균모수 벡터들 μ_1, μ_2 와 공분산행렬 Σ 에 대한 사전분포들은 무정보 부적절 사전분포를 가정한다. 다변량 정규분포의 평균벡터들과 공분산행렬은 서로 독립이라는 가정 하에서 평균변화모형에 대한 무정보 부적절 사전분포는 아래와 같다.

$$\pi(\mu_1, \mu_2, \Sigma) \propto c |\Sigma|^{-(p+1)/2}, \quad \Sigma > 0,$$

여기서 c 는 정의되지 않은 정규화 상수이다. 변화점 r 의 사전분포 $\pi(r)$ 은 균일분포로 가정한다.

다변량 정규분포 모수들의 사전분포 $\pi(\mu_1, \mu_2, \Sigma)$ 와 변화점의 균일 사전분포 $\pi(r)$ 이 서로 독립이라는 가정 하에서 변화점 r 이 고정되었을 때 자료 \mathbf{x} 의 주변확률밀도함수 $m(r, \mathbf{x})$ 는 다변량 정규확률밀도함수와 역위샤트(inverse Wishart) 확률밀도함수의 성질을 이용하여 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned}
 m(r, \mathbf{x}) &= \int \int \int \pi(\mu_1, \mu_2, \Sigma) \cdot \pi(r) \cdot l(\mu_1, \mu_2, \Sigma, r | \mathbf{x}) d\mu_1 d\mu_2 d\Sigma \\
 &= c \cdot \{\pi(r)\} \cdot \left\{ \frac{\prod_{i=1}^p \Gamma\left(\frac{n-i-1}{2}\right)}{r^{\frac{p}{2}} (n-r)^{\frac{p}{2}} \pi^{\frac{p(2n-p-3)}{4}} |V_1^r + V_{r+1}^n|^{\frac{n-2}{2}}} \right\}.
 \end{aligned}$$

또한, 평균변화모형에서 변화점 r 의 사후확률밀도함수는

$$f(r | \mathbf{x}) = \frac{m(r, \mathbf{x})}{\sum_{r \in I} m(r, \mathbf{x})}, \quad r \in I \tag{3.1}$$

이다.

평균변화모형의 결합사후분포는 사전분포들과 우도함수를 결합함으로서 다음과 같이 얻어진다.

$$\begin{aligned} p(\mu_1, \mu_2, \Sigma, r | \mathbf{x}) &\propto \pi(\mu_1, \mu_2, \Sigma) \cdot \pi(r) \cdot l(\mu_1, \mu_2, \Sigma, r | \mathbf{x}) \\ &\propto (2\pi)^{-\frac{np}{2}} |\Sigma|^{-\frac{(p+1+n)}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2} \text{tr}\{\Sigma^{-1} U_1^r(\mu_1)\}\right] \quad (3.2) \\ &\quad \times \exp\left[-\frac{1}{2} \text{tr}\{\Sigma^{-1} U_{r+1}^n(\mu_2)\}\right]. \end{aligned}$$

한편 $p \times p$ 공분산행렬 Σ 가 자유도 m 과 척도 행렬 Ψ 을 갖는 역위샤트(inverse Wishart)분포를 따른다면 $W^{-1}(\Psi, m)$ 로 표시하고, 그것의 확률밀도함수는 다음과 같이 정의된다.

$$f(\Sigma | \Psi, m) = \frac{|\Psi|^{m/2} |\Sigma|^{-(m+p+1)/2} \exp\left\{-\frac{1}{2} \text{tr}(\Psi \Sigma^{-1})\right\}}{2^{mp/2} \pi^{p(p-1)/4} \prod_{i=1}^p \Gamma\left(\frac{m-i+1}{2}\right)}.$$

다음은 식 (3.2)를 이용하여 각 모수들의 완전조건부 사후분포를 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} [\mu_1 | \Sigma, r, \mathbf{x}] &\sim N_p\left(\bar{x}_r, \frac{1}{r} \Sigma\right), \\ [\mu_2 | \Sigma, r, \mathbf{x}] &\sim N_p\left(\bar{x}_{r+1}^n, \frac{1}{n-r} \Sigma\right), \\ [\Sigma | \mu_1, \mu_2, r, \mathbf{x}] &\sim W^{-1}(U_1^r(\mu_1) + U_{r+1}^n(\mu_2), n), \\ [r | \mu_1, \mu_2, \Sigma, \mathbf{x}] &\propto h(r), \end{aligned}$$

$$\text{여기서 } h(r) = \exp\left\{-\frac{1}{2} \text{tr}[\Sigma^{-1} U_1^r(\mu_1)]\right\} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2} \text{tr}[\Sigma^{-1} U_{r+1}^n(\mu_2)]\right\}.$$

모수 추정은 완전조건부 사후분포들로 구성되는 깃스샘플러에 의해 이루어진다. 그러나, 변화점 r 의 조건부 사후분포는 표준형의 분포가 아니므로 메트로폴리스-헤스팅스(Metropolis-Hastings: MH) 알고리즘을 깃스샘플러에 포함시킨다.

이제 깃스샘플링 알고리즘을 다음과 같이 구성한다.

<깃스샘플링 알고리즘>

[단계 1] 초기화 단계 : 변화점 r 과 공분산행렬 Σ 의 초기 값을 $(r^{(0)}, \Sigma^{(0)})$ 으로 설정한다.

[단계 2] 반복단계 : $(i=0, 1, 2, \dots, I)$

- (i) $N_p\left(\bar{x}_1^{(i)}, \frac{1}{r^{(i)}} \Sigma^{(i)}\right)$ 에서 $\mu_1^{(i+1)}$ 을 생성한다.
- (ii) $N_p\left(\bar{x}_{r^{(i)}+1}^{(i)}, \frac{1}{n-r^{(i)}} \Sigma^{(i)}\right)$ 에서 $\mu_2^{(i+1)}$ 을 생성한다.
- (iii) $W^{-1}(U_1^{r^{(i)}}(\mu_1^{(i+1)}) + U_{r^{(i)}+1}^n(\mu_2^{(i+1)}), n)$ 에서 $\Sigma^{(i+1)}$ 을 생성한다.
- (iv) $h(r^{(i)})$ 에서 $r^{(i+1)}$ 을 생성하기 위하여 다음의 MH 알고리즘을 수행한다.

<메트로폴리스-헤스팅스(MH) 알고리즘>

[단계 2.1] 초기화 단계 : 초기 값 $r_{(0)} = r^{(i)}$ 로 놓는다.

- 전이확률함수 $p(r)$ 를 $Uniform(r_{(0)} - a, r_{(0)} + b)$ 으로 설정한다. 여기서 a, b 는 변화점을 중심으로 모수가 생성될 수 있도록 정한다.

[단계 2.2] 반복단계 : $m = 1, 2, \dots, M$

- (i) 전이확률함수 $p(r)$ 로부터 이산형 균일 확률변수 r^* 값을 생성한다.
- (ii) $Uniform(0, 1)$ 에서 난수 U 을 생성한다.
- (iii) $\alpha = \min\left\{1, \frac{h(r^*)}{h(r_{(m-1)})}\right\}$ 를 계산한다.
- (iv) 만약에 $U \leq \alpha$ 이면 현재 생성 값을 이용한 $r_{(m)} = r^*$ 으로 갱신하고, 그렇지 않으면 이전의 상태 값을 이용한 $r_{(m)} = r_{(m-1)}$ 으로 한다.

[단계 2.3] 최종적으로 $r^{(i+1)} = r_{(M)}$ 으로 정한다.

4. 모의실험 및 예제

앞 절에서 논의된 깃스샘플링에 의한 다변량 정규확률모형의 평균변화모형에서 모수 추정 절차를 모의실험자료와 실제자료에 적용해 보았다. 모든 계산 수행은 MATLAB (The MathWorks Inc., 2002)을 사용하였다.

4.1 모의실험 자료분석

표본 크기가 $n=50$ 이고 변화점이 $r=n/2=25$ 인 서로 독립인 4변량 정규확률벡터를 생성하였다. 이때 변화점 $r=25$ 까지의 자료는 $\mu_1 = \Omega_4$, $\Sigma = I_4$ 이고, $r=25$ 이후의 자료는 $\mu_2 = \tau \mathbf{1}_4$, $\Sigma = I_4$ 인 다변량정규분포로부터 생성하였다. 여기서 $\Omega_4 = [0, 0, 0, 0]'$, $\mathbf{1}_4 = [1, 1, 1, 1]'$ 이고 I_4 는 4×4 단위행렬을 의미한다. 깃스샘플링에서 난수의 생성은 MATLAB의 확률변수 생성함수인 MVNRND와 INVWISHRND로부터 각각 μ_1, μ_2 와 Σ 을 생성하였고, 메트로폴리스-헤스팅스 알고리즘에서 균일분포의 난수 생성을 위해서는 UNIFRND를 사용하였다. 깃스샘플러는 11000회 반복하였고, 그중 처음 1000회의 결과는 버리고 총 10000회의 생성된 모수 값들이 사후분포를 얻

는데 이용되었다. 깃스샘플링에서 초기 값 $r^{(0)}$ 로서는 식 (3.1)의 변화점 r 의 사후확률밀도함수 $f(r | \mathbf{x})$ 의 최빈값(mode)을 사용하였고, 초기 값 $\Sigma^{(0)}$ 로서는 표본 공분산행렬을 사용하였다. 한편 MH 알고리즘은 50회 반복 수행한다. <표 4.1>을 살펴보면 변화점 r 은 평균변화가 커질수록 (τ 의 값이 3 이상) 안정적으로 추정이 되었다.

4.2 실제 자료분석

(예제 1) <표 4.2>의 Holmes와 Mergen (1993)의 gravel 자료($p=2, n=56$)는 Sullivan과 Woodall (2000)의 관리도에 의한 변화점 분석에서는 $r=24$ 에서 평균변화가 있었다고 결론지었다. 식 (3.1)을 이용한 각 변화시점에 대한 사후확률을 구하여 <표 4.2>의 마지막 열에 제시하였다. 최대의 사후확률 값을 가지는 24를 깃스샘플링에서 변화점의 초기 값으로 사용하였다. <그림 4.1>에서는 gravel 자료 전체를 표현하고 신뢰영역 50%와 90%에 대한 타원영역을 표시하였다. <그림 4.2>는 처음 자료부터 24번째의 자료를 group 1, 나머지의 자료를 group 2로 표시하여 신뢰영역을 50%와 90%에 대한 타원영역을 표시하였다. <그림 4.2>를 살펴보면 평균변화가 있음을 짐작할 수 있다. <표 4.3>를 살펴보면 표본의 추정 값은 실제자료를 $r=24$ 로 정하여 구한 값이고, 평균, 표준편차, 중앙값은 10000회 반복(MH는 50회) 깃스샘플링으로부터 얻어진 사후분포 값이다. 변화점 r 은 24에 가깝게 추정되었다.

(예제 2) Shakespeare의 38개 희곡($n=38$)에서 대명사적인 형태($p=7$)의 빈도수 자료(Brainerd (1979))가 <표 4.4>에 제시 되어있다. 이 자료는 Gupta와 Chen (1996)의 슈바르츠 정보 기준에 의한 변화점 분석에서는 14번째 희곡에서 평균변화가 있었다고 결론지었다. <표 4.4>의 마지막 열에 변화점의 사후확률을 제시하였다. 여기에서 최대의 사후확률 값을 가지는 13을 깃스샘플링에서 변화점의 초기 값으로 사용하였다. <표 4.5>를 살펴보면 표본의 추정 값은 실제자료를 $r=14$ 로 정하여 구한 값이고, 평균, 표준편차, 중앙값은 10000회 반복(MH는 50회) 깃스샘플링으로부터 얻어진 사후분포 값이다. 변화점 r 은 거의 14에 가깝게 추정되었다.

5. 맺음말

본 논문에서는 서로 독립인 다변량 정규확률변수열의 평균변화모형에서 모수 μ_1 과 μ_2 그리고 Σ 에 대해 무정보 부적절 사전분포, 그리고 변화점 r 에 대해서는 균일분포를 가정한 후, 각 모수의 사후분포를 통하여 모수를 추정하는 베이저안 절차를 제시하였다.

각 모수를 추정하기 위한 깃스샘플러에서 μ_1 과 μ_2 는 다변량 정규분포로부터, 그리고 Σ 는 역 위샤트 분포로부터 모수 생성을 할 수 있지만 변화점 r 의 생성분포는 일반적인 형태를 따르지 않으므로 메트로폴리스-헤스팅스 알고리즘을 이용하였다.

이론적으로 본 논문에서 정립한 베이저안 모수추정의 절차를 검토하기 위해 모의실험자료와 실제자료에 적용하였다.

본 논문에서 다루지 못했던 분산변화모형, 평균과 분산의 동시변화모형에 대한 베이저안 추정은

앞으로 수행되어야 할 과제이다.

참고문헌

- [1] Booth, N. B. and Smith, A. F. M. (1982). A Bayesian Approach to Retrospective Identification of Change-Points, *Journal of Econometrics*, Vol. 19, 7-22.
- [2] Brainerd, B. (1979). Pronouns and Genre in Shakespeare's Drama. *Computers and the Humanities*, Vol. 13, 3-16.
- [3] Gupta, A. K. and Chen, Jie. (1996). Detecting Changes of Mean in Multidimensional Normal Sequence with Application to Literature and Geology. *Computational Statistics*, Vol. 11, 211-221.
- [4] Holmes, D. S. and Mergen, A. E. (1993). Improving the performance of the T^2 control chart. *Quality Engineering*, Vol. 5, 619-625.
- [5] Jeong, S. Y. and Son, Y. S. (2000). Default Bayesian Method for Detecting the Changes in a Sequence of Independent Multivariate Normal Vectors. *Proceedings of the Spring Conference, Korea Statistical Society*, 95-100.
- [6] Perreault, L., Parent, E., Bernier, J., Bobée, B., and Slivitzky, M. (2000). Retrospective Multivariate Bayesian Change-Point Analysis : A Simultaneous Single Change in the Mean of Several Hydrological Sequences. *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment*, Vol. 14, 243-261.
- [7] Sullivan, J. H. and Woodall, W. H. (2000). Change-Point Detection of Mean Vector Covariance Matrix Shifts using Multivariate Individual Observations. *IIE Transactions*, Vol. 32, 537-549.
- [8] The MathWorks Inc. (2002). *MATLAB/Statistics Toolbox*, Version 6.5. Natick, MA

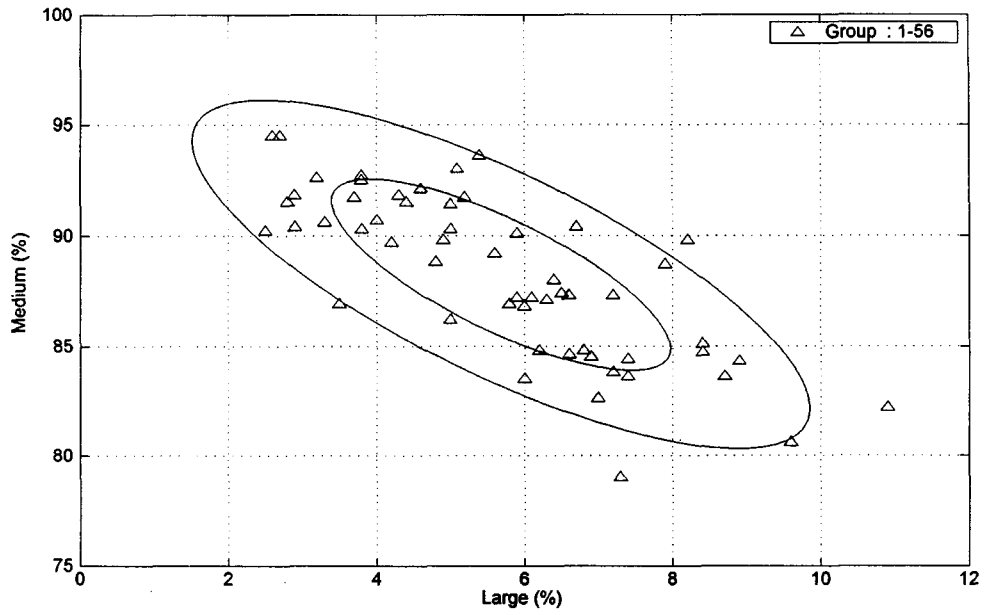
[2003년 9월 접수, 2004년 2월 채택]

<표 4.1> 모의실험 자료에 대한 모수들의 사후분포 ($n=50$)

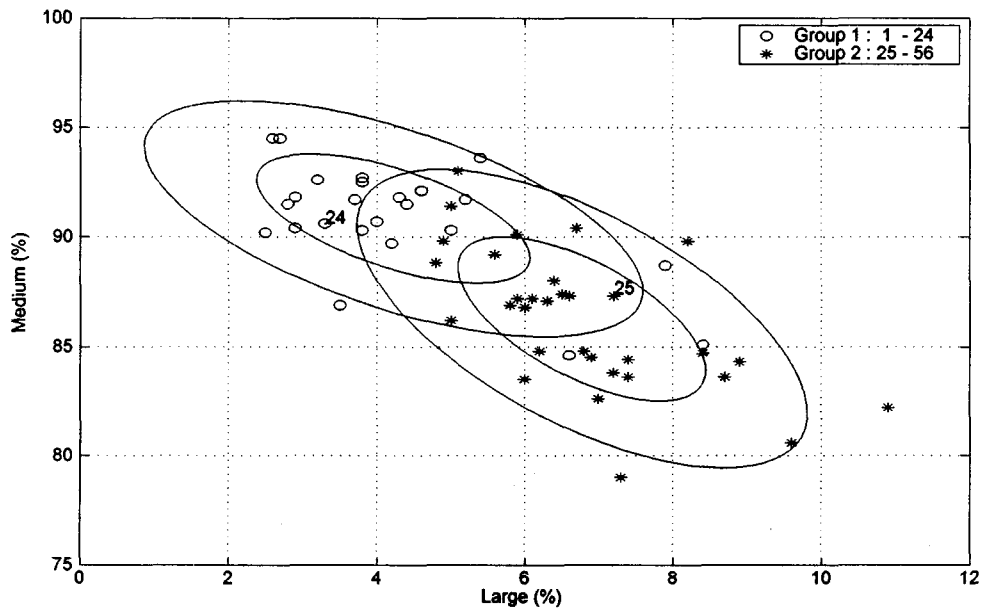
0.0853	-0.0382	0.1139	0.0780	0.1984	0.2196	0.1947	0.2017	0.0840	-0.0398	0.1140	0.0758
0.6906	0.9780	0.8228	1.1810	0.2126	0.2337	0.2051	0.2151	0.6863	0.9761	0.8249	1.1770
1.0030	-0.2052	-0.0728	-0.1138	0.2408	0.1894	0.1645	0.1711	0.9719	-0.1955	-0.0695	-0.1070
-0.2052	1.2205	-0.2330	0.0300	0.1894	0.2926	0.1871	0.1900	-0.1955	1.1791	-0.2225	0.0283
-0.0728	-0.2330	0.9769	0.0854	0.1645	0.1871	0.2309	0.1710	-0.0695	-0.2225	0.9442	0.0797
-0.1138	0.0300	0.0854	1.0425	0.1711	0.1900	0.1710	0.2503	-0.1070	0.0283	0.0797	1.0054
26.7333				1.3339				27.0000			
0.0101	0.3903	-0.1159	0.0256	0.2004	0.2517	0.2530	0.1848	0.0112	0.3928	-0.1180	0.0269
2.2962	2.2627	2.1072	2.2445	0.2086	0.2622	0.2616	0.1931	2.2963	2.2625	2.1072	2.2458
1.0405	0.1017	0.1205	-0.1039	0.2544	0.2229	0.2209	0.1598	1.0014	0.0963	0.1169	-0.0992
0.1017	1.6627	-0.2025	0.1050	0.2229	0.4010	0.2791	0.2034	0.0963	1.6044	-0.1927	0.0980
0.1205	-0.2025	1.6329	0.1014	0.2209	0.2791	0.4018	0.2033	0.1169	-0.1927	1.5696	0.0946
-0.1039	0.1050	0.1014	0.8933	0.1598	0.2034	0.2033	0.2111	-0.0992	0.0980	0.0946	0.8632
25.8744				0.3323				26.0000			
-0.0470	-0.0813	0.0409	-0.3024	0.2501	0.1860	0.2275	0.2117	-0.0462	-0.0799	0.0400	-0.3065
2.9635	3.2787	2.7021	2.9243	0.2489	0.1865	0.2230	0.2128	2.9640	3.2780	2.7023	2.9244
1.5534	0.0028	-0.1672	0.0098	0.3681	0.1942	0.2368	0.2223	1.5048	0.0010	-0.1570	0.0087
0.0028	0.8663	-0.1329	-0.1474	0.1942	0.2064	0.1778	0.1674	0.0010	0.8361	-0.1245	0.1403
-0.1672	-0.1329	1.2617	-0.1565	0.2368	0.1778	0.3057	0.2025	-0.1570	-0.1245	1.2181	-0.1502
0.0098	0.1474	-0.1565	1.1240	0.2223	0.1674	0.2025	0.2663	0.0087	0.1403	-0.1502	1.0859
24.9983				0.0412				25.0000			
-0.1148	0.1873	-0.0269	0.1159	0.2165	0.2012	0.2320	0.2156	-0.1146	0.1900	-0.0288	0.1200
4.2165	3.7014	3.7268	3.7242	0.2176	0.2028	0.2315	0.2151	4.2167	3.6989	3.7241	3.7213
1.1790	0.1471	-0.0011	-0.1124	0.2833	0.1851	0.2116	0.1953	1.1385	0.1370	-0.0013	-0.1050
0.1471	1.0282	0.0327	-0.1935	0.1851	0.2443	0.1960	0.1849	0.1370	0.9951	0.0285	-0.1818
-0.0011	0.0327	1.3407	-0.3097	0.2116	0.1960	0.3155	0.2151	-0.0013	0.0285	1.3021	-0.2937
-0.1124	-0.1935	-0.3097	1.1694	0.1953	0.1849	0.2151	0.2791	-0.1050	-0.1818	-0.2937	1.1276
25				0.0000				25			
-0.1169	-0.046	-0.1086	0.0268	0.2591	0.2415	0.2257	0.2144	-0.1146	-0.0333	-0.1074	0.0275
6.1066	5.9183	5.7677	5.4680	0.2555	0.2404	0.2243	0.2128	6.1066	5.9183	5.7677	5.4680
1.6863	0.4604	0.1220	0.2561	0.4007	0.2744	0.2441	0.2347	1.6243	0.4365	0.1149	0.2446
0.4604	1.4447	-0.0498	0.3221	0.2744	0.3486	0.2243	0.2208	0.4365	1.3879	-0.0465	0.3041
0.1220	-0.0198	1.2793	-0.2527	0.2441	0.2243	0.3083	0.2083	0.1149	-0.0465	1.2378	-0.2408
0.2561	0.3221	-0.2527	1.1501	0.2347	0.2208	0.2083	0.2738	0.2446	0.3041	-0.2048	1.1101
25				0.0000				25			
0.2047	-0.0722	0.3903	0.1753	0.2513	0.2299	0.2272	0.2040	0.2039	-0.0705	0.3903	0.1755
7.9819	8.0118	8.1657	7.9597	0.2487	0.2297	0.2251	0.2043	7.9790	8.0103	8.1642	7.9585
1.5544	-0.0719	0.0750	-0.0900	0.3754	0.2394	0.2346	0.2166	1.4984	-0.0693	0.0730	-0.0880
-0.0719	1.3133	0.1109	0.0649	0.2394	0.3156	0.2175	0.1972	-0.0693	1.2686	0.1050	0.0620
0.0750	0.1109	1.2852	-0.1349	0.2346	0.2175	0.3057	0.1978	0.0730	0.1050	1.2422	-0.1272
-0.0900	0.0649	-0.1349	1.0612	0.2166	0.1972	0.1978	0.2525	-0.0880	0.0620	-0.1272	1.0241
25				0.0000				25			

<표 4.2> gravel 자료와 변화점들의 사후확률

Obs. no.	Large(%)	Medium(%)	$f(\tau x)$
	5.4	93.6	.
	3.2	92.6	.
	5.2	91.7	0.0000
	3.5	86.9	0.0000
	2.9	90.4	0.0000
	4.6	92.1	0.0000
	4.4	91.5	0.0000
	5	90.3	0.0000
	8.4	85.1	0.0000
	4.2	89.7	0.0000
	3.8	92.5	0.0000
	4.3	91.8	0.0000
	3.7	91.7	0.0000
	3.8	90.3	0.0000
	2.6	94.5	0.0000
	2.7	94.5	0.0004
	7.9	88.7	0.0002
	6.6	84.6	0.0000
	4	90.7	0.0001
	2.5	90.2	0.0002
	3.8	92.7	0.0012
	2.8	91.5	0.0082
	2.9	91.8	0.0857
	3.3	90.6	0.7407
	7.2	87.3	0.1506
	7.3	79	0.0063
	7	82.6	0.0014
	6	83.5	0.0010
	7.4	83.6	0.0003
	6.8	84.8	0.0002
	6.3	87.1	0.0001
	6.1	87.2	0.0001
	6.6	87.3	0.0001
	6.2	84.8	0.0001
	6.5	87.4	0.0000
	6	86.8	0.0001
	4.8	88.8	0.0001
	4.9	89.8	0.0003
	5.8	86.9	0.0005
	7.2	83.8	0.0004
	5.6	89.2	0.0005
	6.9	84.5	0.0006
	7.4	84.4	0.0005
	8.9	84.3	0.0001
	10.9	82.2	0.0000
	8.2	89.8	0.0000
	6.7	90.4	0.0000
	5.9	90.1	0.0000
	8.7	83.6	0.0000
	6.4	88	0.0000
	8.4	84.7	0.0000
	9.6	80.6	0.0000
	5.1	93	0.0000
	5	91.4	.
	5	86.2	.
	5.9	87.2	.



<그림 4.1> gravel 자료의 50% 및 90% 신뢰영역



<그림 4.2> 변화점 24를 중심으로 두 개의 그룹으로 나누어진 gravel 자료

<표 4.3> gravel 자료에 적용한 평균변화모형에서 모수들의 사후분포

모수	표본의 추정값		평균		표준편차		증양값	
μ_1	4.2292	90.8333	4.6820	89.7495	0.4666	1.1316	4.7213	89.7495
μ_2	6.7719	86.2594	6.5418	86.9978	0.4700	0.7491	6.5326	87.0184
Σ	3.7702	-5.4955	3.4546	-4.9736	0.7739	1.3516	3.3666	-4.8454
	-5.4955	13.5285	-4.9736	13.4468	1.3516	2.3055	-4.8454	13.1043
γ	24.0000		24.0144		1.3971		24.0000	

<표 4.4> Shakespeare의 희곡 자료들과 변화점들의 사후확률

관측번호	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	$P(\hat{\theta} x)$
1	998	167	401	329	283	34	200	.
2	1164	93	340	513	304	182	244	.
3	1445	146	165	773	552	92	280	.
4	1029	176	226	842	609	60	392	.
5	1062	129	274	432	272	57	180	.
6	1262	135	220	700	488	155	298	.
7	930	216	236	534	345	53	280	.
8	873	165	251	409	235	64	143	0.0006
9	1364	133	234	647	450	43	272	0.0041
10	1240	149	313	740	550	63	262	0.010
11	1287	163	300	718	354	149	287	0.1947
12	1376	253	292	734	694	117	423	0.0082
13	1271	107	343	645	500	85	300	<u>0.5166</u>
14	1384	259	290	768	511	119	456	<u>0.2267</u>
15	913	272	397	420	377	21	200	0.0341
16	1201	298	458	295	499	4	211	0.0013
17	1305	296	480	492	532	15	256	0.0006
18	1351	268	353	776	613	26	311	0.0014
19	944	460	251	623	635	26	313	0.0001
20	989	285	457	368	390	44	135	0.0000
21	1264	244	543	399	590	26	251	0.0000
22	1206	359	575	355	562	34	209	0.0000
23	1745	300	568	689	609	55	269	0.0000
24	1246	214	77	803	673	56	320	0.0000
25	1113	288	346	586	693	93	307	0.0000
26	1041	503	276	986	935	15	391	0.0000
27	1003	231	519	380	357	78	188	0.0000
28	1305	176	605	414	376	134	289	0.0000
29	904	191	513	439	498	10	301	0.0000
30	947	275	230	562	528	7	231	0.0013
31	693	285	222	339	370	22	248	.
32	1399	370	272	821	737	55	621	.
33	1417	269	550	709	595	68	315	.
34	1638	157	320	728	594	181	522	.
35	1209	404	423	539	643	91	377	.
36	1451	350	406	687	622	131	435	.
37	841	254	231	568	343	111	232	.
38	1151	388	223	640	516	121	309	.

<표 4.5> Shakespeare의 희곡 자료에 적용한 평균변화모형에서 모수들의 사후분포

		Σ								μ
	1177.9474	1151.7317	1.0400	0.9925	1.0141	1.0313	1.0298	1.0703	1.0332	14.0000
	157.1643	286.1733	0.9925	1.1810	1.0285	1.0032	1.0695	0.8728	1.0285	
	271.1053	355.0020	1.0141	1.0285	1.1887	0.9418	0.9935	0.9438	0.9754	
	606.2903	539.4342	1.0313	1.0032	0.9418	1.1033	1.0615	1.1161	1.0770	
	417.1726	536.4167	1.0298	1.0695	0.9935	1.0615	1.1019	0.9661	1.0731	
	80.6081	39.7918	1.0703	0.8728	0.9438	1.1161	0.9661	2.3251	1.0923	
	274.2488	285.5744	1.0332	1.0285	0.9754	1.0770	1.0731	1.0923	1.1108	
평균	1148.4606	1159.7955	1.0782	0.9837	1.0252	1.0615	1.0572	1.1432	1.0649	13.7867
	161.5655	275.8577	0.9837	1.2185	0.9998	1.0167	1.0701	0.8628	1.0287	
	275.1071	344.2603	1.0252	0.9998	1.3658	0.8929	0.9593	0.9436	0.9423	
	574.8786	556.8372	1.0615	1.0167	0.8929	1.2088	1.1284	1.2207	1.1560	
	406.5863	535.5203	1.0572	1.0701	0.9593	1.1284	1.1700	0.9881	1.1307	
	71.4457	44.5977	1.1432	0.8628	0.9436	1.2207	0.9881	4.5694	1.2097	
	259.1126	294.6124	1.0649	1.0287	0.9423	1.1560	1.1307	1.2097	1.2169	
표준 편차	97.2280	67.6483	0.0283	0.0299	0.0381	0.0349	0.0321	0.1068	0.0361	1.6125
	27.5171	28.2002	0.0299	0.1076	0.0676	0.0507	0.0544	0.1264	0.0505	
	49.6099	42.6033	0.0381	0.0676	0.1640	0.0562	0.0532	0.1558	0.0572	
	77.2693	53.6593	0.0349	0.0507	0.0562	0.0835	0.0616	0.1882	0.0716	
	53.5587	44.9469	0.0321	0.0544	0.0532	0.0616	0.0696	0.1204	0.0622	
	31.5680	13.8381	0.1068	0.1264	0.1558	0.1882	0.1204	1.6717	0.1931	
	35.085	30.0126	0.0361	0.0505	0.0572	0.0716	0.0622	0.1931	0.0890	
총계	1153.0261	1161.5333	1.0728	0.9853	1.0228	1.0562	1.0520	1.1299	1.0591	14.0000
	159.8940	275.8800	0.9853	1.1977	0.9973	1.0166	1.0614	0.8779	1.0265	
	276.0826	345.9531	1.0228	0.9973	1.3382	0.9022	0.9618	0.9501	0.9472	
	574.9709	556.0921	1.0562	1.0166	0.9022	1.1941	1.1183	1.2003	1.1431	
	409.8481	534.8612	1.0520	1.0614	0.9618	1.1183	1.1571	0.9906	1.1201	
	71.3736	44.3275	1.1299	0.8779	0.9501	1.2003	0.9906	3.8932	1.1892	
	259.8179	293.4158	1.0591	1.0265	0.9472	1.1431	1.1201	1.1892	1.2009	