

# 유한요소기법을 이용한 비보존력이 작용하는 보-기둥 구조의 다양한 제변수 변화에 따른 동적 안정성 해석

## Dynamic Stability Analysis of Nonconservative Systems for Variable Parameters using FE Method

이 준 석\*

민 병 철\*\*

김 문 영†

Lee, Jun-Seok

Min, Byoung-Cheol

Kim, Moon-Young

(논문접수일 : 2004년 4월 26일 ; 심사종료일 : 2004년 10월 12일)

### 요 지

비보존력을 받는 보-부재의 질량행렬, 탄성강도행렬, circulatory 비보존력의 방향변화로 인한 load correction 강도행렬, 그리고 Winkler 및 Pasternak 지반강도행렬을 고려한 운동방정식을 유도하고 divergence 및 flutter에 의한 안정성 해석을 수행한다. 또한 내적 및 외적 감쇠계수를 운동방정식에 포함시킴으로써 감쇠효과를 고려하고, 2차 고유치문제의 해법(quadratic eigen problem solution)을 적용하여 flutter에 미치는 영향을 조사한 후, Beck's column, Leipholz's column 및 Hauger's column에 대하여 비보존력의 방향파라미터  $\alpha$ 에 대한 임계하중의 영향, 내적 및 외적 감쇠계수 및 Winkler 및 Pasternak 지반에 의한 임계하중의 영향을 각각 조사한다.

**핵심용어** : 비보존력, 2차 고유치 해법, Beck's column, follower force, Winkler foundation, Pasternak foundation

### Abstract

Equation of motion of non conservative system considering mass matrix, elastic stiffness matrix, load correction stiffness matrix by circulatory force's direction change and Winkler and Pasternak foundation stiffness matrix is derived. Also stability analysis due to the divergence and flutter loads is performed. And the influence of internal and external damping coefficient on flutter load is investigated applying the quadratic eigen problem solution. Additionally the influence of non-conservative force's direction parameter, internal and external damping and Winkler and Pasternak foundation on the critical load of Beck's and Leipholz's and Hauger's columns are investigated.

**keywords** : non conservative force, quadratic eigen problem, beck's column, follower force, winkler foundation, Pasternak foundation

### 1. 서 론

응용역학 분야에서 취급되는 하중들은 대부분 보존력(conservative force)들로써 포텐셜 에너지를 갖지만 비보존력(non-conservative force)은 포텐셜 에너지를 가질 수 없다. 예를 들면, 물체의 접촉면에서 발생하는 마찰력, 감쇠계수, 그리고 작용점의 변위에 따라 작용 방향

이 바뀌는 follower force들이 이에 속한다. 이러한 follower force를 받는 시스템의 안정성 문제는 탄성지만, 감쇠계수 그리고 경계조건 등 여러 가지 파라미터들에 따라서 정적 불안정 평형상태(divergence)가 존재하여 종래의 좌굴 해석으로 취급할 수 있는 경우와, flutter 현상과 같이 정적인 평형상태가 존재하지 않기 때문에 동적인 방법에 의해서만 해석이 가능한 경우로 나눌 수 있다.

† 책임저자, 정회원 · 성균관대학교 토목환경공학과 교수  
전화 : 031-290-7514 : Fax : 031-290-7549  
E-mail: kmye@skku.ac.kr

\* 성균관대학교 토목환경공학과 박사과정

\*\* 인덕대학 건설환경전공 전임강사

• 이 논문에 대한 토론을 2005년 3월 31일까지 본 학회에 보내주시면 2005년 6월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

지금까지 비보존력을 받는 보-기둥부재의 정적 및 동적 안정성해석에 관하여 상당한 연구가 진행되어 왔다. Lee와 Yang<sup>1),2)</sup>, Irie등<sup>3)</sup>, Takahashi<sup>4)</sup>, Takahashi와 Yoshio-ka<sup>5)</sup>은 transfer matrix method를 이용하여 전단변형이 고려된 보의 안정성해석을 수행하였으며, 유한차분법<sup>6)~10)</sup> 그리고 다른 종류의 discretization방법을 사용한 De rosa과 Franciosi<sup>11)</sup>를 예로 들 수 있다. 한편, 사용의 기한요소해석방법<sup>12)~16)</sup>이 널리 사용되어지고 있다.

국내에서도 전단변형효과를 무시한 비보존력계의 안정성 해석에 관한 연구<sup>17)~18)</sup>가 수행된 바 있다. 그러나 이러한 비보존력을 받는 부재의 다양한 파라미터의 영향에 관한 국외의 활발한 연구에도 불구하고 아직까지도 국내에서는 이와 관련된 연구가 미흡한 실정이다.

이러한 연구배경을 바탕으로 본 연구에서는 비보존력을 받는 보-기둥 부재의 안정성해석에 관한 연구로서 부재의 질량행렬, 탄성강도행렬, circulatory비보존력의 방향변화로 인한 load correction강도행렬, 그리고 Winkler 및 Pasternak지반강도행렬을 고려한 운동방정식을 유도하고 divergence 및 flutter에 의한 안정성 해석을 수행한다. 또한, 내적(internal) 및 외적(external) 감쇠효과를 운동방정식에 포함시킴으로써 감쇠효과를 고려하고, 2차 고유치해법을 적용하여 flutter에 미치는 영향을 조사한다. 이후 외팔보의 자유단에 집중 비보존력이 작용하는 경우와 균일하게 분포하는 비보존력이 작용하는 경우 및 선형적으로 비보존력이 작용하는 경우에 대하여 비보존력의 방향파라미터  $\alpha$ 에 대한 임계하중의 영향, 내적 및 외적 감쇠의 영향, Winkler 및 Pasternak지반에 의한 임계하중의 영향을 각각 조사한다.

## 2. 탄성지하에서 비보존력을 받는 평면뿔대구조의 운동방정식

그림 1과 같이 탄성지반 위에서 선형적으로 분포하는 circulatory force와 재단력들( $F_2^p, M^p, F_2^q, M^q$ )을 받는 평면뿔대요소의 운동에너지, 탄성에너지와 축방향력의 포텐셜을 포함하는 포텐셜에너지, 그리고 비보존력이 행한 일들을 포함하는 비보존력계의 Hamilton원리는 다음과 같다.

$$\int_{t_1}^{t_2} [\delta(T-V) + \delta W_{NC}] dt = 0 \quad (1)$$

여기서,  $T$ 는 부재의 운동에너지,  $V$ 는 탄성에너지와 보존력의 포텐셜을 포함하는 부재의 포텐셜에너지, 그리고

$W_{NC}$ 는 비보존력이 행한일,  $\delta$ 는 에너지의 변분을 나타낸다. 처짐이 일어나기 전의 축방향으로 작용하는 분포하중  $g(x)$ 가 부재 내에서 선형분포를 이룬다고 가정하면,  $g(x) = (1-x/l)P_x^p$ 로 표시할 수 있으며, 이때  $P_x^p$ 와  $P_x^q$ 는 각각  $x=0, l$ 에서  $g$ 의 크기를 나타낸다. 일단 처짐이 발생하면  $g(x)$ 의 작용방향은  $\alpha \cdot v'$ 만큼 회전하게 되므로 미소한 길이  $dx$ 에 작용하는  $g(x)$ 의 수평 및 수직성분은 각각  $g(x)dx$ 와  $\alpha \cdot v'g(x)dx$ 로 표시된다. 여기서,  $\alpha$ 는  $g(x)$ 의 방향을 조절하는 파라미터이고,  $v(x)$ 는 처짐이다. 결과적으로 이를 고려한 시스템의 에너지는 다음과 같이 표시된다.

$$2T = \int_0^l \left\{ m \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 \right\} dx \quad (2a)$$

$$2V = \int_0^l \left\{ EI \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 + k_1 v^2 + k_2 \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 - F(x) \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right\} dx - 2(F_2^p v^p + M^p \hat{\omega}^p + F_2^q v^q + M^q \hat{\omega}^q) \quad (2b)$$

$$\delta W_{NC} = - \int_0^l \left\{ \gamma_1 \frac{\partial v}{\partial t} + \gamma_2 \frac{\partial}{\partial v^4} \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right) + \alpha \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \right\} \delta v dx \quad (2c)$$

여기서  $m, EI, k_1, k_2, F(x), \alpha, \gamma_1, \gamma_2$ , 그리고  $U_e^T$  및  $F_e^T$ 는 각각 단위길이당 질량, 보의 휨강성, Winkler 지반계수, Pasternak지반계수, 요소 내  $x$ 지점의 축력, 작용점의 변위에 따라 작용방향이 바뀌는  $g(x)$ 의 방향 변화를 조절하는 파라미터, 외적 및 내적 감쇠계수, 그리고 재단변위벡터 및 재단력벡터를 표시한다. 이때,  $F(x)$ 의 구체적인 식은 아래와 같이 얻을 수 있다.

$$F(x) = -F_1^p - \int_0^x g(x)dx = -F_1^p + P_x^p x + \frac{(P_x^q - P_x^p) x^2}{2l} \quad (3)$$

이제 식 (2)에 대하여 변분을 취하면 다음과 같이 운동방정식과 경계조건을 얻는다.

$$EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \frac{\partial}{\partial x} \left( F \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \alpha \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + k_1 v - k_2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \gamma_1 \frac{\partial v}{\partial t} + \gamma_2 \frac{\partial^4}{\partial x^4} \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right) = 0 \quad (4)$$

경계조건 :

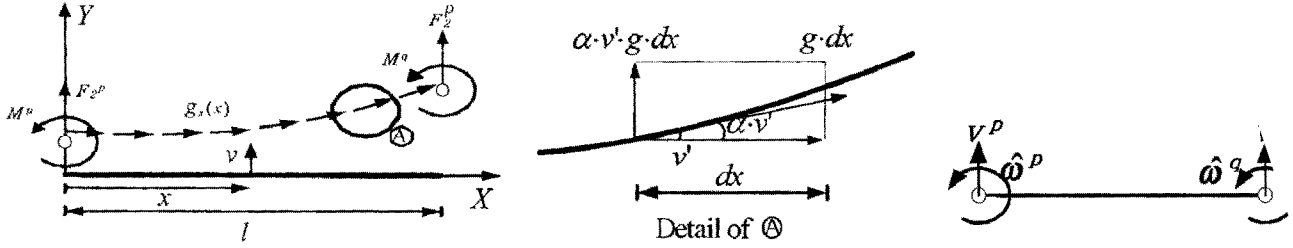


그림 1 선형적으로 분포하는 Circulatory force와 재단력들을 받는 평면빔대요소 및 절점변위 벡터

$$\begin{aligned}
 \delta v^p = 0 \text{ 또는 } EI \frac{\partial^3 v(0)}{\partial x^3} + F(0) \frac{\partial v(0)}{\partial x} - k_2 \frac{\partial v(0)}{\partial x} &= -F_2^p & \frac{d^4 v^*}{dx^{*4}} + k_1^* v^* - k_2^* \frac{d^2 v^*}{dx^{*2}} + F^* \frac{d^2 v^*}{dx^{*2}} - (g^* - \alpha g^*) \frac{dv^*}{dx^*} \\
 \delta \omega^p = 0 \text{ 또는 } EI \frac{\partial^2 v(0)}{\partial x^2} &= -M^p & + \Lambda^2 v^* + \Lambda \gamma_1^* v^* + \Lambda \gamma_2^* \frac{d^4 v^*}{dx^{*4}} &= 0 & (9) \\
 \delta v^q = 0 \text{ 또는 } EI \frac{\partial^3 v(l)}{\partial x^3} + F(l) \frac{\partial v(l)}{\partial x} - k_2 \frac{\partial v(l)}{\partial x} &= F_2^q \\
 \delta \omega^q = 0 \text{ 또는 } EI \frac{\partial^2 v(l)}{\partial x^2} &= M^q & (5)
 \end{aligned}$$

식 (9)에서  $\Lambda$ 는 무차원화 된 진동수이며, 원진동수  $\omega$ 와 다음의 관계를 갖는다.

$$\Lambda^2 = \frac{m \omega^2}{EI/l^4} \quad (10)$$

이때 식 (4)를 무차원화 된 변수로 나타내기 위하여  $V = v/l$ ,  $x^* = x/l$ ,  $t^* = t \sqrt{EI/m} / l^2$ 을 도입하고,  $EI/l^3$ 로 양변을 나누어주면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^4 V}{\partial x^{*4}} + \frac{k_1}{EI/l^4} V - \frac{k_2}{EI/l^2} \frac{\partial^2 V}{\partial x^{*2}} + \frac{F}{EI/l^2} \frac{\partial^2 V}{\partial x^{*2}} \\
 + \left( -\frac{g}{EI/l^3} + \alpha \frac{g}{EI/l^3} \right) \frac{\partial V}{\partial x^*} + \frac{\partial^2 V}{\partial t^{*2}} \\
 + \frac{\gamma_1 l^2}{\sqrt{EI m}} \frac{\partial V}{\partial t^*} + \frac{\gamma_2}{l^2 \sqrt{EI m}} \frac{\partial^4}{\partial x^{*4}} \left( \frac{\partial V}{\partial t^*} \right) = 0 \quad (6)
 \end{aligned}$$

그리고 식 (6)의 계수들을 무차원화 시키기 위하여

$$\begin{aligned}
 k_1^* &= \frac{k_1}{EI/l^4}; k_2^* = \frac{k_2}{EI/l^2}; F^* = \frac{F}{EI/l^2}; g^* = \frac{g}{EI/l^3} \\
 \gamma_1^* &= \frac{\gamma_1 l^2}{\sqrt{EI m}}; \gamma_2^* = \frac{\gamma_2}{l^2 \sqrt{EI m}} \quad (7a-f)
 \end{aligned}$$

을 도입하면 식 (6)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^4 V}{\partial x^{*4}} + k_1^* V - k_2^* \frac{\partial^2 V}{\partial x^{*2}} + F^* \frac{\partial^2 V}{\partial x^{*2}} - (g^* - \alpha g^*) \frac{\partial V}{\partial x^*} \\
 + \frac{\partial^2 V}{\partial t^{*2}} + \gamma_1^* \frac{\partial V}{\partial t^*} + \gamma_2^* \frac{\partial^4}{\partial x^{*4}} \left( \frac{\partial V}{\partial t^*} \right) = 0 \quad (8)
 \end{aligned}$$

$V = v^*(x^*) e^{\Lambda t^*}$ 로 가정하면 식 (8)은 다음과 같 수 있다.

### 3. 비보존력계의 동적 유한요소해석 정식화

이제 평면빔대요소의 부재매트릭스들을 산정하기 위하여 횡방향 변위에 대해서는 3차 Hermitian다항식을 사용하면 부재단면의 수직변위는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$v(x) = h_1 v^p + h_2 \omega^p + h_3 v^q + h_4 \omega^q \quad (11)$$

여기서,  $h_i, i = 1, 2, 3, 4$ 는 3차 Hermitian다항식을 나타낸다. 식 (11)을 식 (2)에 대입하여 적분을 행하고 Hamilton원리를 적용하면 다음과 같이 행렬식으로 표현되는 운동방정식을 얻는다.

$$M_c \ddot{U}_c + C_c \dot{U}_c + [K_c + K_g + K_s - \alpha K^{nc}] U_c = F_c \quad (12)$$

여기서,  $U_c$ =변위벡터;  $M_c$ =질량행렬;  $C_c$ =감쇠행렬;  $K_c$ =탄성강도 행렬;  $K_g$ =포물선분포를 이루는 축방향력에 대한 기하적인 강도행렬;  $K_s$ =탄성지반 영향행렬;  $K^{nc}$ =비보존력의 방향 변화로 인한 load correction강도행렬(LCSM)이다. 한편, 감쇠행렬  $C_c$ 는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$C_e = \gamma_1 \begin{bmatrix} \frac{13}{35}l & \frac{11}{210}l^2 & \frac{3}{70}l & -\frac{13}{420}l \\ & \frac{1}{105}l^3 & \frac{13}{420}l & -\frac{3}{420}l^3 \\ & & \frac{13}{35} & -\frac{11}{210}l^2 \\ & & & \frac{1}{105}l^3 \end{bmatrix} + \gamma_2 \begin{bmatrix} \frac{12}{l^3} & \frac{6}{l^2} & -\frac{12}{l^3} & \frac{6}{l^2} \\ \frac{4}{l} & -\frac{6}{l^2} & \frac{2}{l} & \\ & -\frac{12}{l^3} & -\frac{6}{l^2} & \\ & & & \frac{4}{l} \end{bmatrix} \quad (13)$$

식 (13)에서  $\gamma_1 = m \cdot \beta_1$ ,  $\gamma_2 = EI \cdot \beta_2$ 로 놓으면 감쇠 행렬은 다음과 같이 질량행렬과 탄성강도행렬의 일차결합으로 나타낼 수 있다. 그러므로 식 (14)로부터 보-기둥구조의 내적 및 외적 감쇠계수는 정확히 Rayleigh감쇠행렬에 대응한다는 것을 알 수 있다.

$$C_e = \beta_1 M_e + \beta_2 K_e \quad (14)$$

이후, 각 행렬들을 전체좌표계로 좌표변환시키고 이들을 직접강도법에 의해서 더하면 다음과 같이 전체좌표계에 대한 행렬형태의 운동방정식을 얻는다.

$$M\ddot{U} + C\dot{U} + [K_E + K_G + K_S - \alpha K^{NC}] U = R \quad (15)$$

여기서,  $M$ ,  $C$ ,  $K_E$ ,  $K_G$ , 그리고  $K^{NC}$  = 각각 전체좌표계에 대한 질량, 감쇠, 탄성강도, 기하적인 강도행렬, LCSM:  $R$  = 절점하중벡터;  $U$ ,  $\dot{U}$ ,  $\ddot{U}$  = 절점변위, 절점속도, 그리고 절점가속도 벡터이다.  $K^{NC}$ 에는 절점에 작용하는 circulatory force에 대한 LCSM을 포함하고 있으며 이에 대한 계산결과는 문헌<sup>18)</sup>에 나타나 있다.

#### 4. 비보존력계의 동적 안정성해석

4장에서는 비보존력계의 임계하중을 산정하는 방법을 고찰한다. 4.1절에서는 divergence system과 감쇠효과가 없는 경우의 flutter system, 4.2절에서는 감쇠효과를 고려하는 경우에 대한 flutter system을 생각한다. 그리고 4.3절에서는 직접적분법을 이용한 동적안정성해석법을 고찰한다. 비보존력의 영향으로 강도행렬이 비대칭행렬이 되므로 본 논문에서는 이러한 비대칭행렬의 고유치를 산정하는 것이 가능한 IMSL의 subroutine을 사용하였다.

#### 4.1 Divergence System과 Flutter System의 임계하중 산정법

정적인 불안정 평형상태가 존재하는 경우에 절점 속도 및 가속도 벡터가 영이므로 관성력과 감쇠효과를 무시하면 식(15)는 다음과 같이 표시된다.

$$[K_E + K_S] U = F[K_G - K^{NC}] U \quad (16)$$

여기서  $F$ 는 하중과라미터를 나타낸다. 식 (16)에서 고유치  $F$ 를 구함으로써 divergence system의 임계하중  $F_d$ 을 결정한다. flutter system을 해석하기 위해서는 질량행렬을 고려해야 하며, 감쇠계수를 무시할 수 있는 경우에 식 (15)는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$M\ddot{U} + [K_E + K_S - F(K_G - K^{NC})] U = 0 \quad (17)$$

$U = e^{i\omega t} H$ 로 놓으면 위 식은 아래와 같이 된다.

$$[K_E + K_S - F(K_G - K^{NC})] H = \omega^2 M H \quad (18)$$

여기서,  $\omega$ 는 구조물의 고유진동수를 나타낸다.

Flutter system의 경우에 flutter load  $F_f$ 는 식 (18)의 이중 고유치곡선( $F-\omega^2$  관계곡선)을 분석하여 구할 수 있다. 즉, 가장 작은 두 개의 고유진동수에 대응하는 고유치곡선들이  $F$ 값이 증가함에 따라 가까워져서 서로 만나게 되고,  $F$ 값이 더 증가하면 고유진동수가 실수에서 복소수로 변화하는 경계의  $F$ 값으로 결정한다.

고유치곡선의 특성에 따라 통상 세 가지 유형으로 나눌 수 있다. 본 연구에서는 divergence에 의해서만 좌굴이 발생하는 경우는 divergence system(DS), flutter에 의해서 만이 좌굴불안정성(instability)이 발생하는 경우는 flutter system(FS), 그리고 처음에는 divergence 그리고 나서 더 높은 하중에서 flutter로 인하여 좌굴불안정성이 야기되는 경우는 divergence-flutter system(DFS)으로 표시하기로 한다.

#### 4.2 감쇠효과를 고려한 flutter system의 임계하중 산정법

Flutter system에서 감쇠효과를 고려하는 경우에 식 (15)는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$M\ddot{U} + C\dot{U} + [K_E + K_S - F(K_G - K^{NC})] U = 0 \quad (19)$$

절점속도 벡터 ( $V = \dot{U}$ )를 독립변수로 취하면 다음과 같이 변수는 2배로 늘어나지만 1차의 연립미분방정식(quadratic eigen problem)을 얻는다.

$$M\dot{U} = MV$$

$$M\dot{V} = -CV - [K_E + K_S - F(K_G - K^{NC})]U \quad (20)$$

$U = e^{\bar{\omega}t} Q, V = e^{\bar{\omega}t} S$ 로 놓으면 위 식은 다음과 같이 된다.

$$\bar{\omega}AD = BD \quad (21)$$

여기서  $A = \begin{bmatrix} MO \\ OM \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} O & M \\ -K_E - K_S + F(K_G - K^{NC}) & -C \end{bmatrix}$

$$D = \{Q, S\}, \omega = i\bar{\omega}$$

식 (21)에서  $B$ 행렬이 일반적으로 비대칭행렬이므로 고유치  $\bar{\omega}$ 는 복소수로 계산된다. 감쇠효과를 고려하는 경우에 임계하중은 식 (21)의 고유치에서 실수부가 음수에서 양수로 바뀌는 지점으로 계산된다.

### 4.3 직접적분법을 이용한 비보존력계의 동적 안정성 해석

비보존력계의 동적 안정성을 조사하기 위하여 미소한 충격하중을 외력벡터  $F$ 로 재하하고 비보존력 파라미터를 변화시키면서 선형 동적유한요소해석을 통하여 얻어지는 직접적인 동적응답을 조사함으로써 동적 불안정성을 판단할 수 있다. 이때, 식 (15)는  $n$ 개의 절점변위벡터 성분들의 연립 미분방정식을 나타낸다. 이 방정식의 해를 해석적인 방법으로 구하는 것은 극히 어려우므로 통상 수치적인 방법을 적용한다. 이러한 경우에 사용할 수 있는 여러 수치해석 방법이 제시되었지만, 본 연구에서는 임의 시간간격에 대하여 수치적으로 안정성을 보이는 Newmark 방법을 적용한다. 일반적으로 flutter load보다 큰 비보존력을 작용시켜서 동적응답을 구하면,  $Ce^{bt} \cos(at + \phi)$ 형태로 진폭이 폭발적으로 증가하면서 진동하는 특성을 보인다. 이때 작용 비보존력의 크기에 대응하는 복소수 원진동수 ( $\omega = a \pm bi$ )를 산정하면, 동적응답에 의한 변위진폭에

해당하는 점근선은 원진동수의 양의 실수값에 지배되어  $Ce^{bt}$ 로 표시할 수 있다.

### 5. 수치해석예제

3장 및 4장에서 제시한 행렬 운동방정식 및 수치적분방법을 이용하여 비보존력을 받는 보-기둥부재의 divergence load와 flutter load 및 각 파라미터에 대응하는 Newmark 수치적분 결과들을 정리하였다. 외팔보의 자유단에 집중 비보존력이 작용하는 경우(Beck's column; 그림 2(a))와 균일하게 분포하는 비보존력이 작용하는 경우(Leipholz's column; 그림 2(b)) 및 선형적으로 비보존력이 작용하는 경우(Hauger's column; 그림 2(c))에 대해서 5.1절에서는 circulatory force의 방향파라미터  $\alpha$ 에 대한 임계하중의 영향, 5.2절에서는 내적 및 외적 감쇠효과에 대한 임계하중의 영향, 5.3절에서는 Winkle foundation 및 Pasternak foundation에 의한 임계하중의 영향을 각각 조사하였다.

본 절에서 취급하는 모든 예제들의 초기조건은 정지상태로 외팔기둥에 작용하는 비보존력은 시간이 경과함에 따라 그 크기를 변화시키지 않도록 하였고, 횡방향의 미소한 하중은 축방향력의 1/1000의 크기로 자유단에 0.001초 동안 재하시켰다가 이후에 곧바로 이 힘을 제거함으로써 외팔기둥이 순수한 follower force만을 받도록 고려하였다. 또한 Newmark법을 적용할 때 시간간격은 0.001초로 선택하였다. 해석에 사용된 재원은 다음과 같다.

$$A = 20cm^2, l = 100cm, I = 1.666667cm^4$$

$$E = 2.1 \times 10^7 N/cm^2, m = 0.0157kg/cm$$

### 5.1 Follower force의 방향파라미터 $\alpha$ 에 대한 임계하중의 영향

그림 3은 외팔보의 자유단에 단면회전각이  $\theta$ 일 때  $\alpha\theta$  만큼 회전하는 집중 비보존력이 작용하는 경우를 나타낸다. 여기서  $\alpha$ 가 영인 경우는 작용하중의 방향변화가 없기 때문에 보존력에 해당하고, 1.0이면 단면이 회전함에

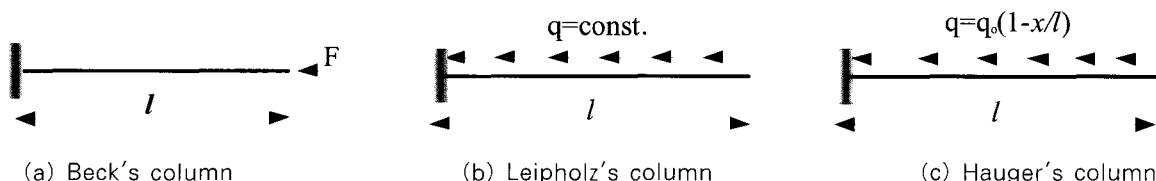


그림 2 외팔보에 작용하는 follower force

따라 접선 방향으로 회전각  $\theta$  에 해당하는 양만큼 회전하는 비보존력에 대응한다. 그림 4는 Beck's column, Leipholz's column 그리고 Hauger's column의 경우에 tangency coefficient  $\alpha$ 가 0에서 1.0까지 변화함에 따라  $F_{d_1}^*$ ,  $F_{d_2}^*$ ,  $F_{f_1}^*$ ,  $F_{f_2}^*$  (1차 및 2차 divergence load 와 flutter load)의 값들의 변화특성을 나타낸 안정곡선 (stability curve)이다. 특히 Beck's column의 경우, 그림에서  $\alpha$ 값이 0.0에서 0.32113까지는 DS,  $\alpha$ 값이 0.32113에서 0.5까지는 DFS, 그리고  $\alpha$ 값이 0.5보다 클 때에는 FS에 해당하며,  $\alpha$ 값이 0.5에서  $F_{f_2}^*$  값의 불연속이 나타난다. 그 이유를 살펴보기 위하여, 특정한  $\alpha$ 값에 대하여 고유치곡선( $F^* - \Lambda^2$  곡선)을 나타낸 그림 5를 생각한다. 여기서, 그림 5(a)는 DS에 해당하는 경우에 대해서  $\alpha=0.0$ 인 경우의 고유치곡선, 그림 5(b)는 DFS에 해당하는 구간인  $\alpha=0.4$ 인 경우의 고유치곡선, 그림 5(c)는 DFS와 FS의 경계에 해당하는  $\alpha=0.5$ 인 경우의 고유치곡선, 그리고 그림 5(d)는 FS에 해당하는 구간인  $\alpha=1.0$

인 경우의 고유치곡선을 나타낸 것이다. 그림에서 알 수 있듯이  $\alpha=0.4$ 일 경우  $F_{f_1}^*=16.4$ ,  $F_{f_2}^*=28.78$ ,  $F_{f_3}^*=111.87$ 을 형성하며,  $\Lambda^2$ 가 만나는 지점에서 그 값이 생성됨을 알 수 있다. 하지만 그림 5(c)를 보면 알 수 있듯이 전 단계 ( $\alpha=0.4$ )에서  $F_{f_2}^*$ 를 형성한  $\Lambda_1^2$ ,  $\Lambda_2^2$ 의 곡선이 사라지며, 결국 전 단계에서  $F_{f_3}^*$ 를 형성한 값이  $F_{f_2}^*$ 로 바뀌는 것을 알 수 있다.

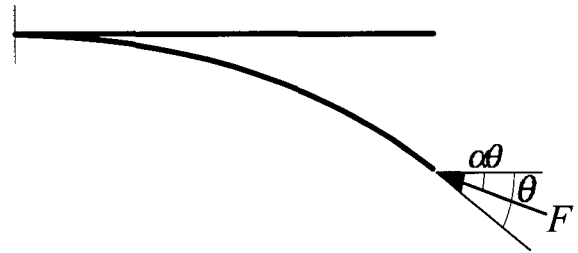


그림 3 외팔보의 끝단에 작용하는 follower force

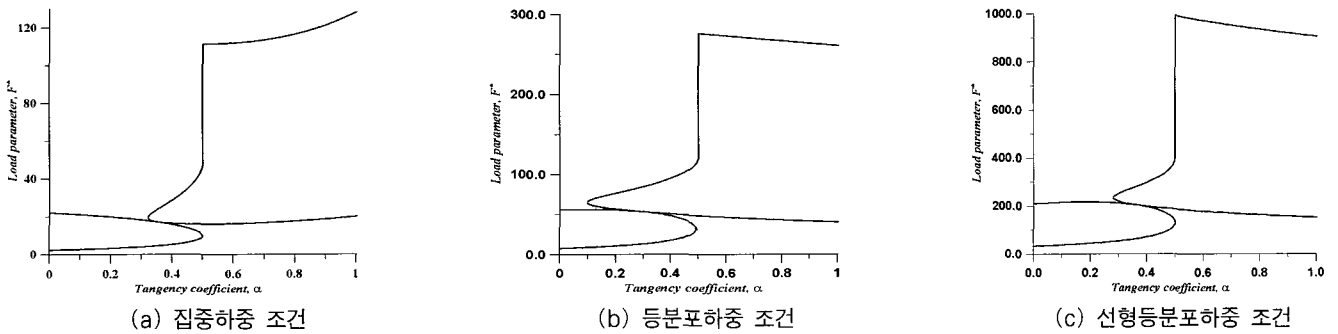


그림 4 하중조건에 따른 보-기둥의 stability curve

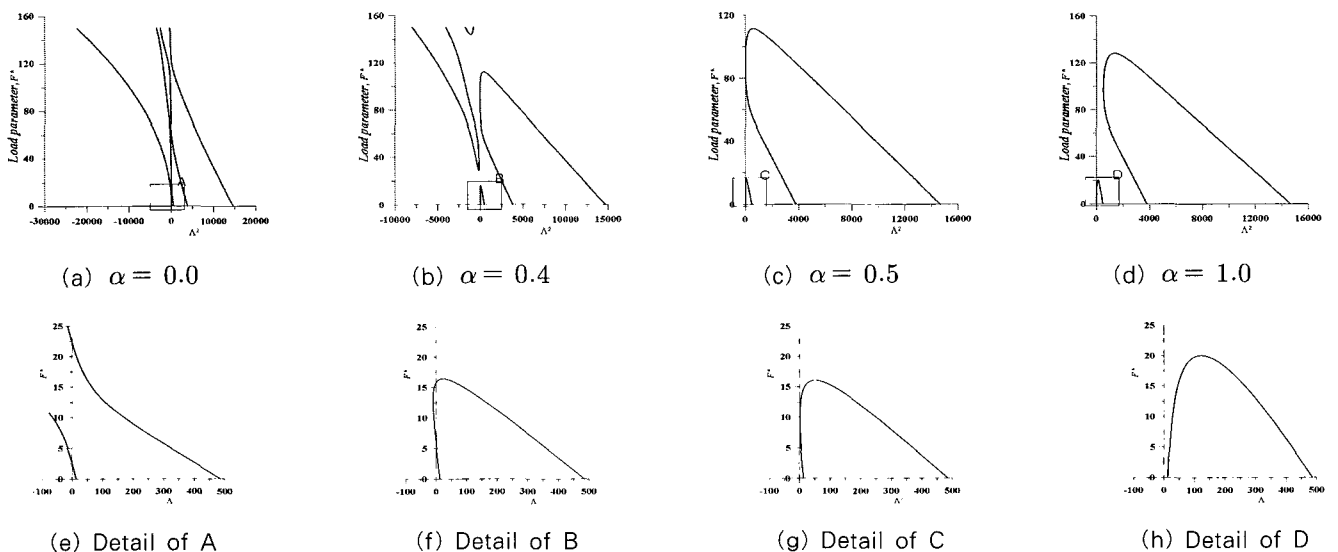
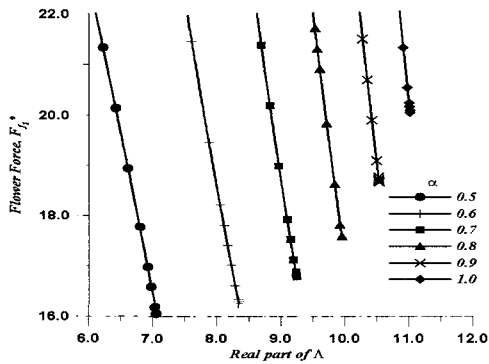


그림 5  $\alpha$ 의 변화에 따른 Beck's column의 고유치곡선

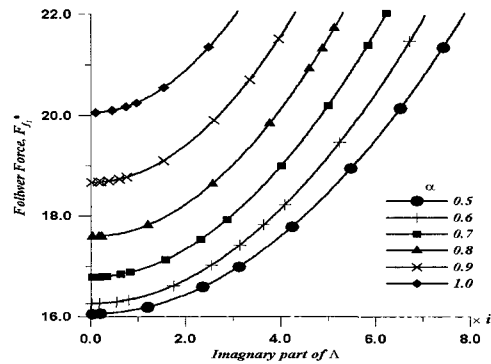
또한, FS 구간에서 tangency coefficient의 변화에 따라  $F_{f1}^*$ 의 1.01배에 대응하는  $\omega$  및  $\Lambda$ 값을 표 1에 나타내었다. 그림 6은 이에 대해서  $\alpha$ 가 0.5부터 1.0까지 0.1씩 증가함에 따라 복소수형태를 가지는  $\omega$ 의 무차원화 된 변수  $\Lambda$ 의 형태로 실수부와 허수부를 각각 나타낸 것이다. 여기서 실수부인 그림 6(a)는 구조물의 진동수를 나타내는 것으로써 하중이 증가함에 따라서 진동수가 줄어드는 것을 알 수 있으며, 그림 6(b)의 경우에는 구조물의 진폭을 나타내며 하중의 증가에 따라 그 값이 급격하게 증가한다는 것을 알 수 있다.

표 1 Tangency coefficient의 영향에 의한 구조물의 임계하중 및 진동수의 관계

$\alpha$	$F_{f1}^*$	$1.01F_{f1}^*$	$\Lambda(F_{f1}^*)$	$\Lambda(1.01F_{f1}^*)$
0.5	16.054	16.214	$7.056 \pm 0.00201i$	$7.0310 \pm 1.2878i$
0.6	16.260	16.423	$8.335 \pm 0.00268i$	$8.3096 \pm 1.1683i$
0.7	16.789	16.957	$9.2383 \pm 0.00176i$	$9.2162 \pm 1.0977i$
0.8	17.591	17.767	$9.9471 \pm 0.00236i$	$9.9278 \pm 1.0469i$
0.9	18.670	18.857	$10.5302 \pm 0.00180i$	$10.513 \pm 1.0066i$
1.0	20.053	20.253	$11.0163 \pm 0.00198i$	$11.000 \pm 0.97482i$

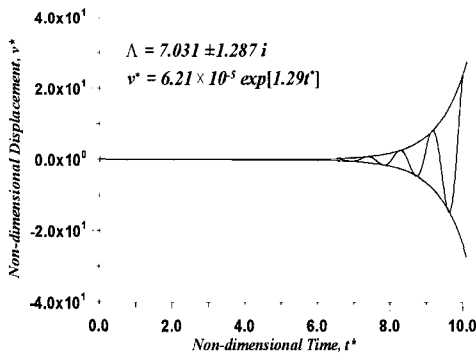


(a) 진동수의 변화

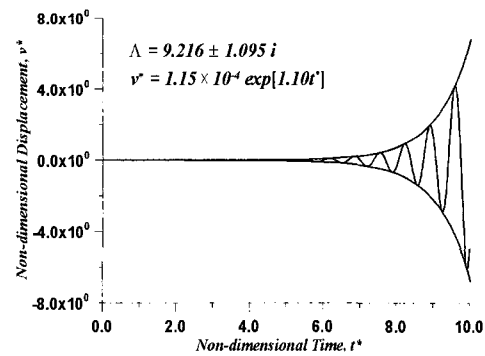


(b) 진폭의 변화

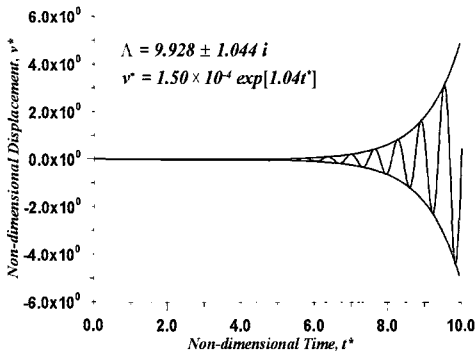
그림 6  $\alpha$ 의 변화에 따른  $\Lambda$ 의 영향



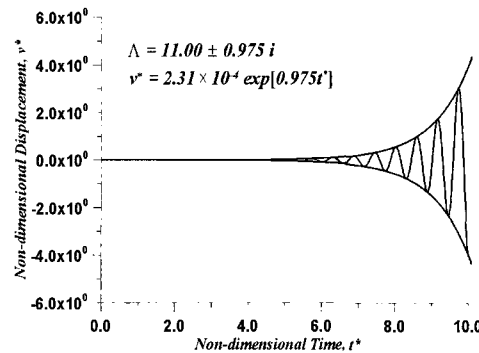
(a)  $\alpha = 0.5, F_{cr}^* = 1.01F_{cr}^* = 16.2137$



(b)  $\alpha = 0.7, F_{cr}^* = 1.01F_{cr}^* = 16.9562$



(c)  $\alpha = 0.8, F_{cr}^* = 1.01F_{cr}^* = 17.7660$



(d)  $\alpha = 1.0, F_{cr}^* = 1.01F_{cr}^* = 20.2529$

그림 7  $\alpha$ 의 영향에 대해 시간에 따른 외팔보 끝단의 수직변위

그림 7은  $\alpha$ 가 1.0일 때 무차원화된 flutter load의 값을 1%증가시켰을 때, 자유단의 수직처짐을 나타낸 것이다. 그림으로부터 알 수 있듯이, 시간이 지날수록 외팔보 끝단의 변위가 폭발적으로 증가하였으며, 이때  $\alpha$ 값이 커질수록 진동수는 증가하는 경향이 있으며, 진폭의 크기는 줄어들었다.

### 5.2 Damping에 대한 flutter load의 영향

Flutter시스템의 경우 미소한 크기의 내적 감쇠효과에 의해서 임계하중값이 현저히 감소한다는 것은 이미 잘 알려진 사실이다. 본 절에서는 앞서 제시한 3가지 경우에 대해서 내적( $\gamma_2^*$ ) 및 외적( $\gamma_1^*$ ) 감쇠계수의 영향을 포함하여 tangency coefficient  $\alpha$ 가 1.0인 경우에 대해서 flutter load를 산정하였다.

표 2~4는 Beck's column의 경우에 집중 비보존력을 받는 외팔보의 외적, 내적 감쇠계수의 영향에 대한 flutter load( $F_{fl}^*$ )를 나타낸 것이다. 특히 내적 감쇠계수의 영향에 대해서는 Rao(1989)의 값과 비교하였으며, 그 값의 차가 무시할 수 있을 정도로 작은 것을 볼 수 있다.

표 2  $\gamma_1^*$  과  $\gamma_2^*$  의 영향(Beck's column)

$\gamma_2^*$ \ $\gamma_1^*$	0.0	0.1	1.0	10.0	100.0
0.0	20.053(20.049)	20.05	20.11	24.27	37.22
0.0001	10.94(10.941)	19.91	20.11	24.29	37.22
0.0010	10.94(10.942)	17.56	19.98	24.38	37.21
0.0100	10.97(10.969)	12.93	17.80	25.20	37.21
0.1000	13.64(13.643)	14.08	17.33	32.10	37.38
0.2000	21.51(21.525)	21.98	25.86	41.31	37.85

( ) : Rao<sub>10</sub>

표 3  $\gamma_1^*$  과  $\gamma_2^*$  의 영향(Leipholz's Column)

$\gamma_2^*$ \ $\gamma_1^*$	0.0	0.1	1.0	10.0	100.0
0.0	40.06	42.95	40.16	48.49	75.05
0.0001	21.82	39.76	40.16	48.51	75.05
0.0010	21.82	35.03	39.89	48.70	75.04
0.0100	21.88	25.79	35.52	50.32	74.98
0.1000	27.19	28.05	34.54	63.81	74.82
0.2000	42.85	43.78	51.49	81.86	74.87

표 4  $\gamma_1^*$  과  $\gamma_2^*$  의 영향(Hauger's Column)

$\gamma_2^*$ \ $\gamma_1^*$	0.0	0.1	1.0	10.0	100.0
0.0	150.64	150.65	151.03	184.30	338.01
0.0001	78.96	149.41	151.03	182.39	337.78
0.0010	78.96	129.97	149.90	183.05	335.87
0.0100	79.15	93.87	131.70	188.32	323.06
0.0500	83.77	88.05	113.87	205.93	301.25
0.1000	98.04	101.18	124.83	231.45	291.61
0.2000	153.48	156.80	184.30	294.30	285.96

무차원화 된 외적 감쇠계수의 값이 0.0이고, 무차원화 된 내적 감쇠계수의 값이 0.0001로 미소하게 변할 때, flutter load는 20.053에서 10.94로 급격히 변하는 것을 알 수 있었으며, 내적 감쇠계수의 값이 커짐에 따라 flutter load의 값도 증가하는 특성을 나타낸다. 또한 외적 감쇠계수의 영향이 증가함에 따라 flutter load의 값도 증가하는 것을 알 수 있는데, 이때 그 값이  $\gamma_1^*$ 를 1000까지 증가해 보면 flutter load가 37.8에 접근한다

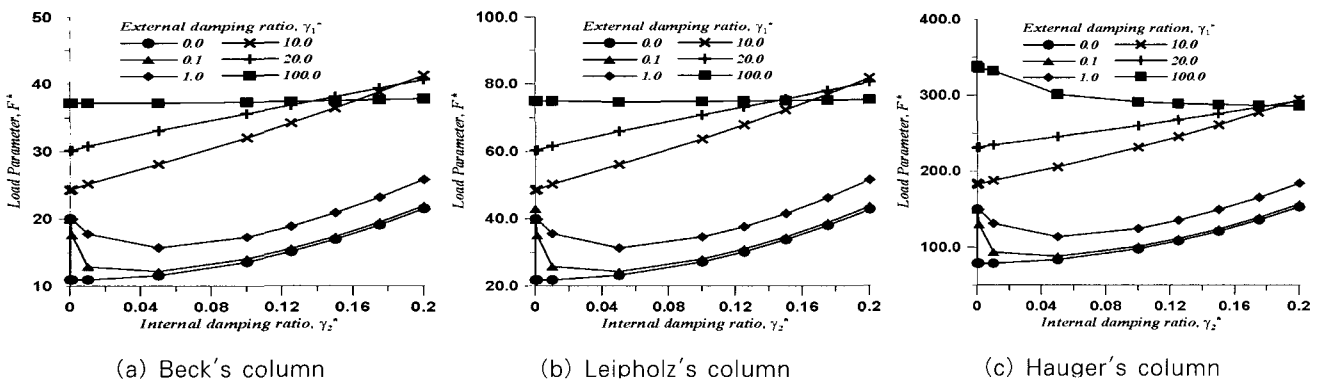
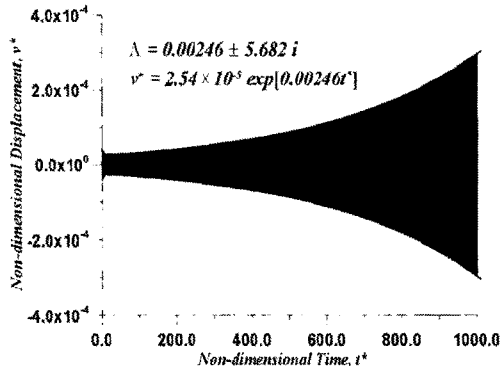
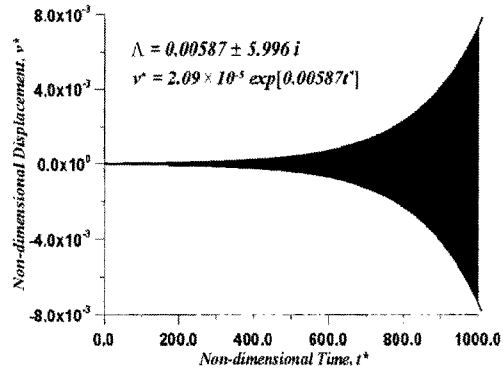


그림 8 flutter load의 외적·내적 감쇠 계수에 대한 영향

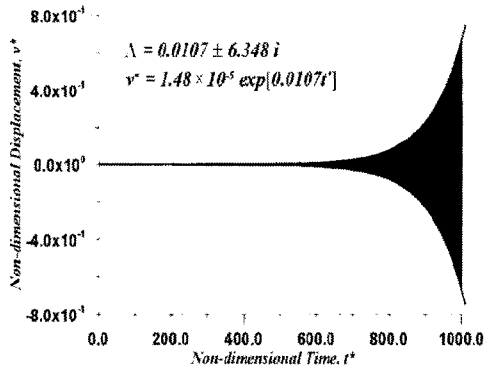




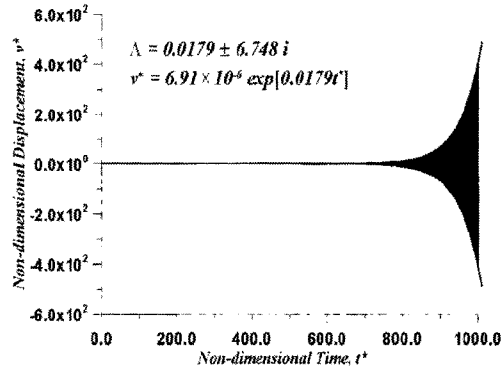
(a)  $F^* = 1.1F_{fl}^* = 12.033$



(b)  $F^* = 1.2F_{fl}^* = 13.127$



(c)  $F^* = 1.3F_{fl}^* = 14.221$



(d)  $F^* = 1.4F_{fl}^* = 15.315$

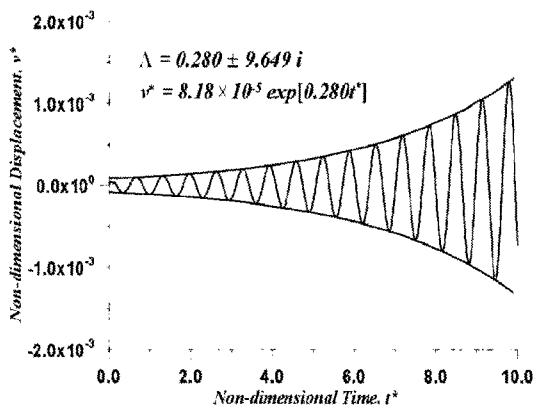
그림 9 내적 감쇠효과의 영향에 대해 시간에 따른 외팔보 끝단의 수직변위, Beck's cloumn

는 것을 알 수 있다. 이는 결국 외적감쇠계수에 의한 flutter load의 극한치에 상당하는 값이다. 그림 8의 (a, b, c)는 각각 Beck's column, Leipholz's column 및 Hauger's column에 대한 외적, 내적 감쇠효과의 영향을 그래프로 나타낸 것이다.

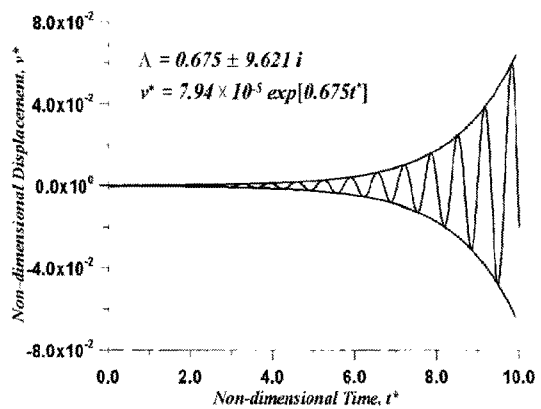
미소한 내적 감쇠효과의 영향이 고려된 구조물에 대해서 flutter load는 크게 감소한다는 것을 확인하기 위해서

Beck's column에 대해서 그림 9에  $\gamma_2^* = 0.001$  일 때  $F_{fl}^* = 10.949$ 의 값을 110%, 120%, 130%, 140% 증가시켜 시간에 따른 외팔보 끝단의 변위를 나타내었다.

이로부터 알 수 있듯이, 내적 감쇠효과는 flutter load를 감소시키는 것은 확실하나, 실제적으로 무차원화 된 시간이 100까지 증가할 경우는 끝단의 변위는  $1.5 \times 10^{-4}$ 에 그쳤으며, 임계하중의 140%정도 증가시켰을 때 비로소



(a)  $F^* = 1.02F_{fl}^* = 24.755$



(b)  $F^* = 1.05F_{fl}^* = 25.484$

그림 10 외적 감쇠효과의 영향으로 인해 외팔보 끝단의 시간에 따른 수직변위, Beck's column

끝단의 수직 처짐  $v^*$ 가  $2.3 \times 10^{10}$ 정도의 상당한 크기를 가진다는 것을 알 수 있다. 따라서 일반적으로 내적 감쇠계수의 영향이 고려되지 않은 경우, 구조물은 미소시간이 변한 후에 변위의 폭발적인 증가 경향을 보이는 strongly unstable상태에 있으나, 내적 감쇠효과의 영향에 의해 flutter load의 값은 크게 감소하나 실제적으로 구조물은 상당한 시간이 지난 후에 변위의 증가가 두드러지는 weakly unstable상태에 있음을 알 수 있다.

그림 10은  $\gamma_1^* = 10.0$ 일 때  $F_{f1}^*$ 의 값을 102%, 105%로 미소하게 증가시켰을 때의 외팔보 끝단의 무차원화 된 수직 처짐의 진동 경향을 그림으로 나타낸 것이다. 내적 감쇠효과의 영향과는 달리 외적 감쇠효과의 영향은 구조물이 flutter load에 도달했을 때 급격한 진폭의 증가로 인한 파괴 경향을 나타내고 있다.

### 5.3 Winkler, Pasternak계 하중의 영향

본 연구에서 적용한 유한요소법의 수치해석적 결과를 검증하기 위하여 Winkler foundation 및 Pasternak foundation하에서 축하중을 받는 단순지지된 보의 고유진동수를 기존의 문헌과 비교하여 표 5에 제시하였다. 해석에 사용된 요소의 개수는 20개이며, 그 결과 매우 근접한 값 내에서 일치하고 있음을 알 수 있다. 따라서 본 연구에 사용된 유한요소 수치해석 기법은 매우 효율적인 방법임에

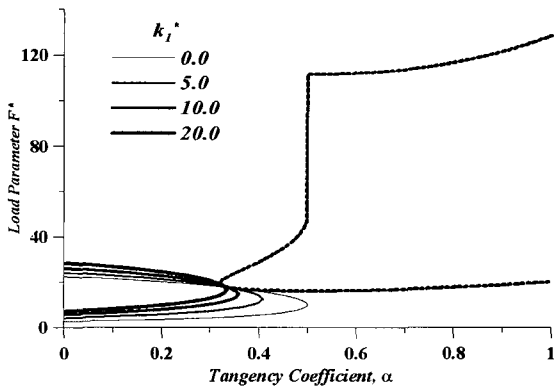
틀림없다고 사료된다.

Winkler foundation의 영향이 divergence load에만 영향을 미친다는 것은 이미 알려진 사실이다. 그림 11(a)는 이러한 Winkler foundation의 영향을 tangency coefficient를 0.0에서 1.0까지 증가시킴에 따라 임계하중의 경향을  $k_1^*$ 의 값이 0.0, 5.0, 10.0, 20.0에 대한 안정곡선(stability curve)을 나타낸 것이다. 그림에서 알 수 있듯이,  $k_1^* = 0.0$ 일 경우에는 DS는  $\alpha$ 가 0.0~0.321, DFS는 0.321~0.5, FS는 0.5~1.0사이의 구간에 발생함을 알 수 있으며, 특히  $k_1^* = 5.0$ 일 경우에는 DS는 0.0~0.321, DFS는 0.321~0.408에서 발생하며, FS는  $k_1^* = 0.0$ 일 경우와 마찬가지로 0.5~1.0사이에 발생 하였다. 즉, Winkler foundation의 경우  $k_1^*$ 가 증가할 때 flutter load는 변화하지 않으며(그림 11(a)참조), DFS구간에만 영향을 미친다는 것을 알 수 있다. 이때,  $k_1^*$ 의 값이 각각 0.0, 5.0, 10.0, 20.0일 때, DFS구간에서 FS구간으로 변할 때, 무차원화된 divergence load의 값은 각각 9.87, 12.45, 14.58, 16.50이다.

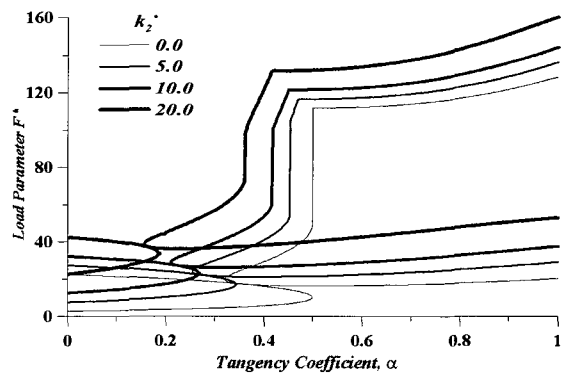
Pasternak foundation의 영향에 의해서는 그림 11(b)와 같이 안정곡선이 형성되었다. 이는 Pasternak foundation의 특징인 구조물에 인장효과를 증가시키는 경향으로부터 기인하며, 따라서 Pasternak탄성지지 하에서는 구조물 전체의 임계하중이 증가함으로써, 구조물의 강성이

표 5 기존 문헌과의 무차원화 된 고유진동수  $\Lambda$ 의 비교

조건	비교 문헌	$F^* = 0.6, k_1^* = 58.445, k_2^* = 0.0, \alpha = 0.0$		
		mode 1	mode 2	mode 3
Hinge - Slide	본 연구	9.870	37.192	86.157
	이병구 등19)	9.87	37.19	86.15
	Yokoyama20)	9.87	37.20	86.27

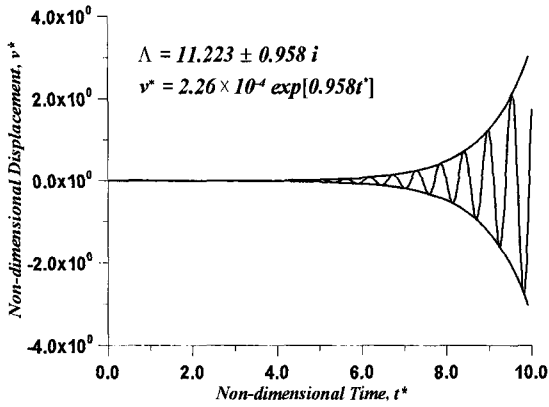


(a) Winkler foundation

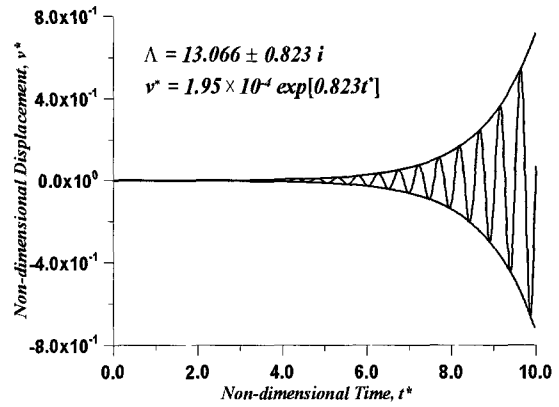


(b) Pasternak foundation

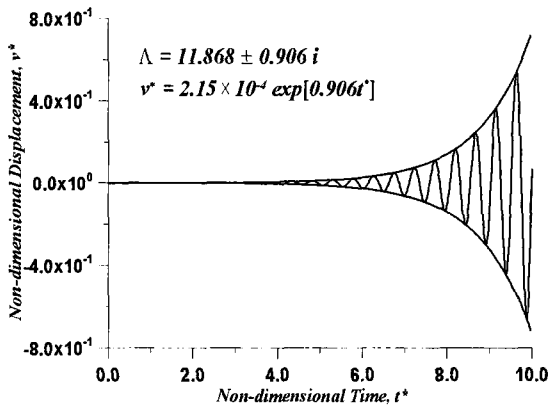
그림 11 지반 스프링의 영향에 의한 Beck's column의 안정곡선



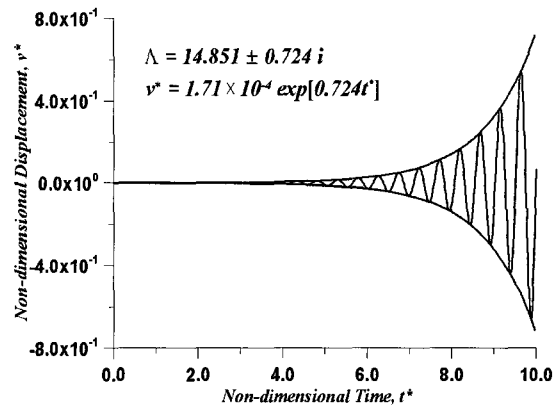
(a)  $k_1^* = 5.0, F^* = 1.01F_{f_1}^* = 20.254$



(b)  $k_1^* = 20.0, F^* = 1.01F_{f_1}^* = 20.254$



(c)  $k_1^* = 50.0, F^* = 1.01F_{f_1}^* = 20.254$



(d)  $k_1^* = 100.0, F^* = 1.01F_{f_1}^* = 20.254$

그림 12 Winkler foundation의 영향으로 인한 시간에 따른 외팔보 끝단의 수직변위

증가하는 경향이 있음을 알 수 있다.

Winkler foundation의 영향에 의해서 divergence load의 경우는 그 값이 증가하는 경향이 있으나, flutter load의 경우는 변동이 없음을 확인하기 위해서 그림 12는 Beck's Column의 경우에 대해 무차원화 된 시간에 따른 외팔보 끝단의 수직변위를 나타낸 것으로써,  $k_1^*$ 를 5.0, 20.0, 50.0, 100.0의 경우에 대해서 각각 plot해 보았다. 그림으로부터, Winkler foundation의 영향은 시간의 경과에 따라 circulatory frequency의 증가를 보였고, 진폭의 크기는 Winkler foundation의 영향이 클수록 감소하는 경향을 나타냈다.

## 6. 결 론

탄성지하의 비보존력계에 있어서 2절점 평면뿔대요소의 안정성을 검토하기 위해서 Hermitian 다항식을 형상 함수로 선택하고 Hamilton의 원리로부터 행렬 운동방정

식을 유도하였으며, Newmark 방법을 사용하여 수치적으로 직접 적분함으로써 임계하중 이후에 각 구조물의 거동을 선형적으로 추적하였다. 그 결과 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

- 1) 보요소에서 내적 및 외적 감쇠계수는 정확히 Rayleigh 감쇠행렬에 대응한다는 것을 알 수 있다.
- 2) Winkler foundation의 영향이 증가함에 따라 divergence load의 크기는 증가하나 flutter load에는 영향을 미치지 않았다. 또한 Winkler foundation의 영향이 커짐에 따라 DS 및 DFS구간은 줄어들고 FS구간의 크기는 변화가 없었다. Pasternak foundation은 구조물의 전체적인 강성을 증가시키고, 따라서 임계하중의 크기도 증가시켰다.
- 3) 임계하중보다 큰 비보존력을 받는 Beck's column의 경우 tangency coefficient가 증가함에 따라 구조물의 진폭의 크기는 줄어들었으며, 진동수는 그 반대로 증가하는 경향을 보였다. Winkler foundation의 영향은

구조물의 진동수를 증가시켰고, 진폭의 크기는 감소하였으며, Pasternak foundation의 경우 Winkler foundation의 영향과 반대되는 경향을 보였다.

- 4) 미소한 크기의 내적 감쇠계수의 영향으로 Beck's column의 flutter load가 크게 감소하였으나, Newmark 수치해석 결과 실제적으로 구조물은 상당한 시간이 지난 후에야 진폭의 증가가 두드러지는 weakly unstable의 상태를 알 수 있었으며, 따라서 실제 flutter load보다 상당한 크기의 하중을 가했을 때에야 구조물의 폭발적인 증가 현상을 확인할 수 있었다. 또한 외적 감쇠효과의 크기가 증가함에 따라 진동수와 진폭의 크기가 동시에 감소하는 경향을 보였다.

### 감사의 글

본 연구는 교량설계핵심기술연구단을 통하여 지원된 건설교통부 건설핵심기술연구개발사업 및 한국과학재단의 특정기초연구(R01-2002-000-00265-0)사업에 의하여 수행되었으며 이에 깊은 감사를 드립니다.

### 참 고 문 헌

- Lee, S. Y., Yang, C. C., "Non-conservative instability of a Timoshenko beam resting on Winkler elastic foundation", *Journal of Sound and Vibration*, Vol.162, 1993, pp.177~184
- Lee, S. Y., Yang, C. C., "Non-conservative instability of non-uniform beams resting on an elastic foundation", *Journal of Sound and Vibration*, Vol.169, 1994, pp.433~444
- Irie, T., Yamada, G., Takahashi, I., "Vibration and stability of a non-uniform Timoshenko beam subjected to a follower force", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 70, 1980, pp.503~512
- Takahashi, I., "Vibration and stability of a non-uniform cracked Timoshenko beam subjected to follower force:", *Computers and Structures*, Vol. 71, 1999, pp.1585~591
- Takahashi, I., Yoshioka, T., "Vibration and stability of a non-uniform double-beam subjected to follower forces", *Computers and Structures*, Vol. 59, 1996, pp.1033~1038
- Leipholtz, H., Stability of Elastic Systems, *Sijthoff and Noordhoff. The Netherlands*, 1980
- Guran, A., Rimrott, F. P. J., "On the dynamic stability of an elastic rod under a slave tip loading", *In Vibration Analysis-Techniques and Applications*, ASME, Vol.18, 1989, pp.225~228
- Rao, B. N., Rao, G. V., "Applicability of static or dynamic criterion on the stability of a cantilever column under a tip concentrated subtangential follower force", *Journal of Sound and Vibration*, Vol.118, 1987, pp.197~200
- Rao, B. N., Rao, G. V., "Stability of an cantilever column under a tip-concentrated subtangential follower force with the value of sub-tangential parameter close to or equal to 1/2", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 121, 1988, pp.181~188
- Rao, B. N., Rao, G. V., "Stability of an cantilever column under a tip-concentrated subtangential follower force with damping", *Journal of Sound and Vibration*, Vol.138, 1990, pp. 341~344
- De Rosa, M. A., Franciosi, C., "The influence of an intermediate support on the stability behaviour of cantilever beams subjected to follower forces", *Journal of Sound and Vibration*, Vol.137, 1990, pp.107~115
- Langthjem, M. A., Sugiyama, Y., "Optimum design of cantilevered columns under the combined action of conservative and nonconservative loads Part I: The undamped case", *Computers and Structures*, Vol.74, 2000, pp.385~398
- Sugiyama, Y., Katayama, K., Kiriya, K., "Experimental verification of dynamic stability of vertical cantilevered columns subjected to a sub-tangential force", *Journal of Sound and Vibration*, Vol.236, 2000, pp.193~207
- Kim, J. H., Choo, Y. S., "Dynamic stability of a free-free Timoshenko beam subjected to a pulsating follower force", *Journal of Sound and Vibration*, Vol.216, 1998, pp.623~636
- Ringertz, U. T., "Optimization of eigenvalues in nonconservative systems, Proceedings of the First World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization", (*Olhoff, N. and Rozvany, G. I. N., editors*), 1995, pp.741~748
- Chen, L. W., Ku, D. M., "Stability analysis of a Timoshenko beam subjected to distributed follower forces using finite elements", *Computers and Structures*, Vol. 41, 1991, pp.813~819
- 김문영, 장승필, "보존력 및 비보존력을 받는 평면빔대 구조물의 안정성에 관한 연구", 대한 토목학회 논문집, 제2권, 1호, 1990, pp.111~122

18. 김문영, 장승필, "감쇠효과를 보려한 비보존력계의 안정성해석", 대한 토목학회 논문집, 제10권, 3호, 1990, pp.57~65
19. 이병구, 최규문, 이태은, 김무영, "미분구적법(DQM)을 이용한 탄성지반 위에 놓인 변단면 압축부재의 자유진동 해석", 한국전산구조공학회 논문집, 제15권, 4호, 2002, pp.629~638
20. Yokoyama, T., "Vibration Analysis of Timoshenko Beam-Columns on Two-Parameter Elastic Foundations", *Computers and Structures*, Vol.61, 1996, pp.995~1007