

## 언덕형 Hollow Optical Fiber의 전계 해석

피종호

LS전선 광기술그룹

Ⓣ 730-360 경상북도 구미시 진평동 643번지

정우진·김창민<sup>†</sup>

서울시립대학교 전자전기컴퓨터공학부

Ⓣ 130-743 서울시 동대문구 전농동 90번지

(2006년 11월 14일 받음, 2006년 12월 27일 수정본 받음)

Modified Airy 함수를 이용하여 언덕형 굴절률 분포를 갖는 HOF를 해석하였으며, 정교한 결과를 갖는 고유 방정식을 도출하였다. 언덕형 HOF의 경우 기존의 계단형 HOF에 비하여 중공 영역 내 감쇠 전계의 기울기를 임의로 가파르게 조절할 수 있음을 보였다.

주제어 : Hollow optical fiber, Atom guide, Wentzel-Kramers-Brillouin(WKB) method, Modified Airy function

### I. 서 론

원자 광기술은 전자나 중성자를 이용한 입자광학의 한계를 벗어날 수 있는 분야로 최근 많은 연구가 있어왔다. 이 중에서도 원자빔을 이용한 리소그래피의 구현 가능성으로 말미암아 원자 도파로는 많은 관심의 대상이 되어왔다. HOF(Hollow Optical Fiber)를 이용한 원자 도파로는 1993년 처음으로 소개되었고, 원자가 광섬유 내벽에 달라붙지 않고 중공 영역을 전반사 하면서 계속 진행한다는 사실이 알려져 있다.<sup>[1,2]</sup> 레이저의 주파수가 원자의 공명 주파수보다 약간 큰 경우, 원자는 도파관의 꼬리 전계(evanescent field)의 기울기로 말미암아 코어의 안쪽으로 광학적 척력을 느끼게 된다. 척력  $F$ 는 꼬리 전계의 존재로 말미암아 형성되는 광 포텐셜 함수  $U(r)$ 에 gradient를 취함으로써 표현 가능하다. 최근 실험결과와 이러한 광학적 척력을 이용해 HOF의 중공 영역에 갇힌 원자를 guide할 수 있음을 보여준다.<sup>[3,4]</sup>

HOF를 포함한 대부분의 광섬유는 유한요소법(FEM: Finite Element Method)과 같은 수치해석 기법들의 급속한 발전으로 정교한 해석이 가능해졌다. 그러나 수치해석기법들은 미분방정식과 연계된 행렬식 표현에만 의존할 뿐이며, 물리적 개념을 전달하는 데는 한계를 지니고 있다. 반면에 수학적 해석방법은 물리적 의미를 전달할 뿐 아니라, 수학적 형태를 갖는 고유방정식을 제공한다는 장점을 지니고 있다.

Helmholtz 방정식에 기초한 광섬유의 수학적 해석은 코어의 굴절률이 균일한 경우에만 정확한 해를 줄 수 있다. 언덕형 굴절률 분포를 갖는 광섬유의 경우에는 단지 근사적인 방법만이 이용가능하며, 이들 중에서 WKB 방법이 보편적으로

널리 사용되어 왔다.<sup>[5]</sup> 그러나 WKB 방법은 파동함수의 변화율이 충분히 완만하다는 가정 하에 출발하며, 또한 시도하는 회귀점에서 발산하는 문제를 가지고 있다. 그 결과 분산 곡선은 차단 영역 근처에서 큰 오차를 보인다.

이러한 WKB의 단점을 극복하기 위해 수정된 WKB 방법이 제안된 바 있었으나,<sup>[6]</sup> 수식적 난해함으로 말미암아 별로 이용되지 못하였다. Roy는 임의의 모양을 갖는 양자우물에서 tunneling 계수의 일반해를 구하기 위해, 그 시도해로서<sup>[6]</sup>을 바탕으로 한 수정된 Airy 함수를 이용하였다.<sup>[7]</sup> 또한 Chung은 굴절률이 변화하는 영역에 따라 WKB 함수와 수정된 Airy 함수를 조합하여 광도파로 및 광섬유에 대한 정밀한 해석을 시도하였다.<sup>[8,9]</sup>

본 논문에서는 언덕형 굴절률 분포를 갖는 HOF에 대한 일 반적이고도 정밀한 고유방정식을 유도하고자 하였다. 모든 영역에서 거의 정확한 해를 갖도록 코어 내 회귀점 부근에서는 수정된 Airy 함수를, 그리고 중공과 클래딩 영역에서는 WKB 시도해를 사용하였다. 이러한 두 함수의 조합을 통하여 WKB 방법에 고질적인 오차를 상당히 줄이는 위상 교정 항  $\delta$ 를 도출하였다. 제안된 방법에 의한 해석 결과를 유한요소법(FEM : Finite Element Method)에 의한 해석 결과와 비교하였으며, 고유치뿐만 아니라 고유함수에서도 거의 정확히 일치함을 보였다.

### II. HOF 파동방정식의 시도해

광섬유의 파동 형태를 기술하는 횡면 field 함수  $R(r)$ 는 다음과 같이 표현된다.

<sup>†</sup> E-mail: cmkim@uos.ac.kr

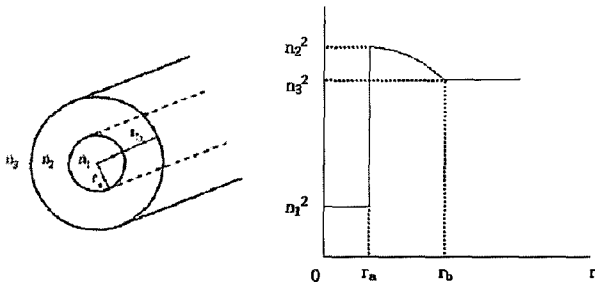


그림 1. 언덕형 HOF의 굴절률 분포.  
 $n_1$ =Hollow,  $n_2$ =Core,  $n_3$ =Cladding 영역

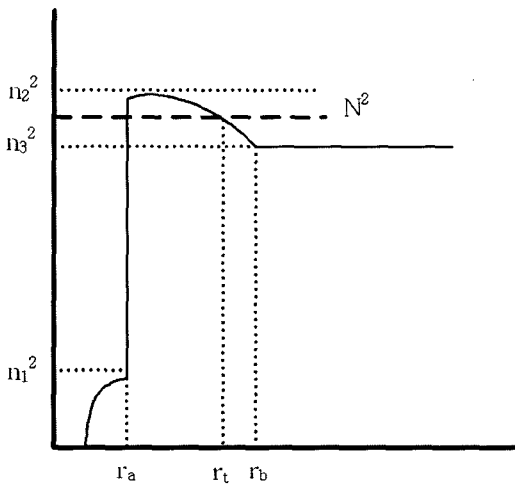


그림 2.  $l=1$ ,  $r_a = 3.5\mu\text{m}$ ,  $r_b = 10\mu\text{m}$ 일 때의 전형적인 그림.

$$\frac{d^2}{dr^2}R(r) + \frac{1}{r} \frac{d}{dr}R(r) + \left( k_0^2 n^2(r) - \beta^2 - \frac{l^2}{r^2} \right) R(r) = 0 \quad (1)$$

여기서  $k_0$  는 파수,  $\beta$ 는 전파상수를 의미한다.

$$l = \begin{cases} \nu - 1 & \text{HE mode } (\nu \geq 1) \\ 1 & \text{TE/TM mode } (\nu = 0) \\ \nu + 1 & \text{EH mode } (\nu \geq 1) \end{cases} \quad (2)$$

이고,  $\nu$ 는  $\phi$  방향 양자수이고,  $l$ 은 LP<sub>l</sub>의 모드수이다. 그림 1을 보면 굴절률 분포는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$n^2(r) = \begin{cases} n_1^2 & r \leq r_a \\ n_2^2 + (n_2^2 - n_3^2)f(r), & 0 \leq f(r) \leq 1 & r_a \leq r \leq r_b \\ n_3^2 & r \geq r_b \end{cases} \quad (3)$$

$f(r)$ 은 임의의 언덕형 분포함수이다. 편의상 식 (1)의 곱항 계수를  $\Gamma(r)$ 로 놓는다.

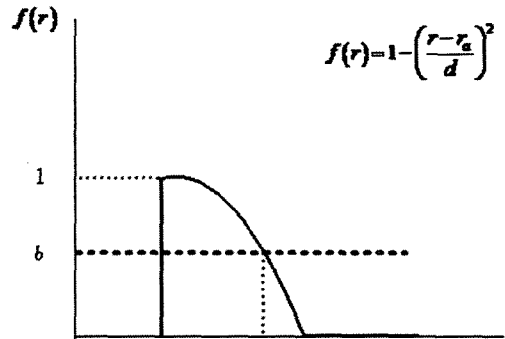


그림 3.  $r_a \leq r$ 인 영역에서의  $f(r)$

$$\Gamma^2(r) = k_0^2 n^2(r) - \beta^2 - \frac{l^2}{r^2} = k_0^2 \left[ n^2(r) - N^2 \right] - \frac{l^2}{r^2} \quad (4)$$

$N = \beta/k_0$ 이고, 모드 굴절률이라고 부른다. 그림 2에 식(4)가 그려져 있다.

변수  $r$ 을 다음 식으로 치환하면,

$$r = \exp(x) \quad (5)$$

식 (1)은 아래 식과 같이 변형된다.

$$\frac{d^2}{dx^2}R(x) + \Gamma_x^2(x)R(x) = 0 \quad (6)$$

여기서,

$$\Gamma_x^2(x) = r^2 \Gamma^2(r) = k_0^2 \exp(2x) \left[ n^2(x) - N^2 \right] - l^2 \quad (7)$$

식 (6)의 해는 다음과 같이 각 영역에 따라 WKB 함수와 Modified Airy 함수 시도해의 조합으로써 표현될 수 있다.<sup>[8,9]</sup>

$$R(x) = \begin{cases} \frac{c_1}{2\sqrt{\pi P_1(x)}} \exp\left(-\int_x^{x_0} P_1(x) dx\right) & x \leq x_0 \quad (8a) \\ \frac{c_2}{\sqrt{\pi Q_1(x)}} \sin\left(\int_{x_0}^x Q_1(x) dx + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{c_3}{\sqrt{\pi Q_1(x)}} \cos\left(\int_{x_0}^x Q_1(x) dx + \frac{\pi}{4}\right) & x_0 \leq x \quad (8b) \\ \frac{c_4}{\sqrt{-\xi_1'(x)}} Ai(-\xi_1(x)) + \frac{c_5}{\sqrt{-\xi_1'(x)}} Bi(-\xi_1(x)) & x \leq x_1 \quad (8c) \\ \frac{c_4}{\sqrt{\eta_1'(x)}} Ai(-\eta_1(x)) + \frac{c_5}{\sqrt{\eta_1'(x)}} Bi(-\eta_1(x)) & x_1 \leq x \leq x_2 \quad (8d) \\ \frac{c_6}{2\sqrt{\pi P_2(x)}} \exp\left(-\int_x^{x_2} P_2(x) dx\right) & x \geq x_2 \quad (8e) \end{cases}$$

여기서 Ai, Bi 는 Airy 함수이며,  $\eta$ ,  $\xi$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$\eta_x(x) = \left( \frac{3}{2} \int_{x_1}^x P_x(x) dx \right)^{2/3}, \quad P_x(x) = \sqrt{-\Gamma_x^2(x)} \quad (9a)$$

$$\xi_x(x) = \left( \frac{3}{2} \int_x^{x_2} Q_x(x) dx \right)^{2/3}, \quad Q_x(x) = \sqrt{\Gamma_x^2(x)} \quad (9b)$$

식 (9)에서  $\eta_x$ 와  $\xi_x$ 의 값은 항상 양수이다. 그리고 Airy함수와 Modified Airy함수가 회귀점으로부터 멀어질 때는 다음과 같은 근사형태를 갖는다.

$$\frac{1}{\sqrt{-\xi_x'(x)}} Ai(-\xi_x(x)) \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\pi Q_x(x)}} \sin\left(\int_x^{x_2} Q_x(x) dx + \frac{\pi}{4}\right) \quad (10a)$$

$$\frac{1}{\sqrt{-\xi_x'(x)}} Bi(-\xi_x(x)) \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\pi Q_x(x)}} \cos\left(\int_x^{x_2} Q_x(x) dx + \frac{\pi}{4}\right) \quad (10b)$$

### III. HOF 고유방정식의 유도

#### 코어 내 회귀점에서의 경계조건

$x = x_1$ 에서 전계와 그 기울기의 연속조건을 적용한다. 식 (8)의 Airy 함수는 식 (10)의 근사식으로 대체되어 경계조건을 적용시켰다.

##### i) field의 연속

$$\begin{aligned} c_2 \sin\left(\int_{x_1}^x Q_x(x) dx + \frac{\pi}{4}\right) + c_3 \cos\left(\int_{x_1}^x Q_x(x) dx + \frac{\pi}{4}\right) \\ = c_4 \sin\left(\int_x^{x_2} Q_x(x) dx + \frac{\pi}{4}\right) + c_5 \cos\left(\int_x^{x_2} Q_x(x) dx + \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned} \quad (11)$$

##### ii) field 미분의 연속

$$\begin{aligned} c_2 \cos\left(\int_{x_1}^x Q_x(x) dx + \frac{\pi}{4}\right) - c_3 \sin\left(\int_{x_1}^x Q_x(x) dx + \frac{\pi}{4}\right) \\ = -c_4 \cos\left(\int_x^{x_2} Q_x(x) dx + \frac{\pi}{4}\right) + c_5 \sin\left(\int_x^{x_2} Q_x(x) dx + \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned} \quad (12)$$

식 (12)를 식 (11)로 나누고 정리하면, 다음의 고유방정식이 얻어진다.

$$\int_{x_1}^{x_2} Q_x(x) dx = (\mu - 1)\pi + \left(\frac{\pi}{4} + \delta_1\right) + \left(\frac{\pi}{4} + \delta_2\right), \quad \mu = 1, 2, \dots, L \quad (13)$$

여기서,

$$\delta_1 = \tan^{-1}\left(-\frac{c_3}{c_2}\right), \quad \delta_2 = \tan^{-1}\left(-\frac{c_5}{c_4}\right) \quad (14)$$

$\delta_1, \delta_2$ 의 표현식은 각각  $x = x_a, x = x_b$ 에서의 경계조건으로부터 얻어진다.

#### $x_0$ 에서의 경계조건

##### i) field의 연속

$$\begin{aligned} \frac{c_1}{2\sqrt{\pi P_x(x)}} \exp\left(-\int_x^{x_0} P_x(x) dx\right) \Big|_{x=x_0^-} \\ = \frac{c_2}{\sqrt{\pi Q_x(x)}} \sin\left(\int_{x_0}^x Q_x(x) dx + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{c_3}{\sqrt{\pi Q_x(x)}} \cos\left(\int_{x_0}^x Q_x(x) dx + \frac{\pi}{4}\right) \Big|_{x=x_0^+} \end{aligned} \quad (15)$$

##### ii) field 미분의 연속

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[ \frac{c_1}{2\sqrt{\pi P_x(x)}} \exp\left(-\int_x^{x_0} P_x(x) dx\right) \right] \Big|_{x=x_0^-} \\ = \frac{d}{dx} \left[ \frac{c_2}{\sqrt{\pi Q_x(x)}} \sin\left(\int_{x_0}^x Q_x(x) dx + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{c_3}{\sqrt{\pi Q_x(x)}} \cos\left(\int_{x_0}^x Q_x(x) dx + \frac{\pi}{4}\right) \right] \Big|_{x=x_0^+} \end{aligned} \quad (16)$$

식 (15)와 식 (16)으로부터 구해진  $\delta_1$ 은 다음과 같다.

$$\delta_1 = \tan^{-1}\left(-\frac{c_3}{c_2}\right) = -\frac{\pi}{4} + \tan^{-1}\left\{ \frac{P_x(x_0^-) - \frac{1}{2} \left[ \frac{P_x'(x_0^-)}{P_x(x_0^-)} - \frac{Q_x'(x_0^+)}{Q_x(x_0^+)} \right]}{Q_x(x_0^+)} \right\} \quad (17)$$

#### $x_b$ 에서의 경계조건

##### i) field의 연속

$$\frac{c_4}{\sqrt{\eta_x'(x)}} Ai(\eta_x(x)) + \frac{c_5}{\sqrt{\eta_x'(x)}} Bi(\eta_x(x)) \Big|_{x=x_b^-} = \frac{c_6}{2\sqrt{\pi P_x(x)}} \exp\left(-\int_{x_b}^x P_x(x) dx\right) \Big|_{x=x_b^+} \quad (18)$$

##### ii) field 미분의 연속

$$\frac{d}{dx} \left[ \frac{c_4}{\sqrt{\eta_x'(x)}} Ai(\eta_x(x)) + \frac{c_5}{\sqrt{\eta_x'(x)}} Bi(\eta_x(x)) \right] \Big|_{x=x_b^-} = \frac{d}{dx} \left[ \frac{c_6}{2\sqrt{\pi P_x(x)}} \exp\left(-\int_{x_b}^x P_x(x) dx\right) \right] \Big|_{x=x_b^+} \quad (19)$$

식 (18)과 식 (19)로부터 구해진  $\delta_2$ 는 다음과 같다.

$$\delta_2 = \tan^{-1}\left(-\frac{c_2}{c_4}\right) = \tan^{-1}\left\{\frac{\eta'_x(x_b^-)Ai'(\eta_x(x_b^-)) + \left\{P_x(x_b^-) + \frac{1}{2}\left[\frac{P'_x(x_b^-)}{P_x(x_b^-)} - \frac{\eta''_x(x_b^-)}{\eta'_x(x_b^-)}\right]\right\}Ai(\eta_x(x_b^-))}{\eta'_x(x_b^-)Bi'(\eta_x(x_b^-)) + \left\{P_x(x_b^-) + \frac{1}{2}\left[\frac{P'_x(x_b^-)}{P_x(x_b^-)} - \frac{\eta''_x(x_b^-)}{\eta'_x(x_b^-)}\right]\right\}Bi(\eta_x(x_b^-))}\right\} \quad (20)$$

식 (13)에 식 (17)과 (20)을 대입하여 정리하면, 다음과 같은 고유방정식을 얻을 수 있다.

$$\int_x^r Q_x(x)dx = (\mu-1)\pi + \left(\frac{\pi}{4} + \delta_1\right) + \left(\frac{\pi}{4} + \delta_2\right) = \left(\mu - \frac{3}{4}\right)\pi + \tan^{-1}\left\{\frac{P_{xa}}{Q_x(x_a^+)}\right\} + \tan^{-1}\left\{\frac{\eta'_x(x_b^-)Ai'(\eta_x(x_b^-)) + P_{ab}Ai(\eta_x(x_b^-))}{\eta'_x(x_b^-)Bi'(\eta_x(x_b^-)) + P_{ab}Bi(\eta_x(x_b^-))}\right\} \quad (21)$$

여기서,

$$P_{xa} = P_x(x_a^-) - \frac{1}{2}\left\{\frac{P'_x(x_a^-)}{P_x(x_a^-)} - \frac{Q'_x(x_a^-)}{Q_x(x_a^-)}\right\} \quad (22a)$$

$$P_{xb} = P_x(x_b^+) + \frac{1}{2}\left\{\frac{P'_x(x_b^+)}{P_x(x_b^+)} - \frac{\eta''_x(x_b^-)}{\eta'_x(x_b^-)}\right\} \quad (22b)$$

$\delta_1, \delta_2$ 는 일반적인 WKB 방법의 오차를 보정하는 부가적인 요소이므로 위상천이 보정항으로 간주될 수 있다.

#### IV. r에 관한 고유방정식

식 (21)의 고유방정식은 변수  $x$ 에 관한 고유 방정식이므로 이를 원래 변수인  $r$ 의 변수로 바꿀 필요가 있다. 식 (6)과 (9)는  $r$ 에 관하여 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\Gamma_x^2(x) = r^2 \left( k_0^2 n^2(r) - \beta^2 - \frac{l^2}{r^2} \right) = r^2 \Gamma^2(r) \quad (23)$$

$$\eta_x(x) = \left( \frac{3}{2} \int_x^r P_x(x) dx \right)^{2/3} = \left( \frac{3}{2} \int_r^r P(r) dr \right)^{2/3} = \eta(r) \quad (24a)$$

$$\xi_x(x) = \left( \frac{3}{2} \int_x^r Q_x(x) dx \right)^{2/3} = \left( \frac{3}{2} \int_r^r Q(r) dr \right)^{2/3} = \xi(r) \quad (24b)$$

여기서,

$$P_x(x) = \sqrt{-\Gamma_x^2(x)} = r\sqrt{-\Gamma^2(r)} = rP(r) \quad (25a)$$

$$Q_x(x) = \sqrt{\Gamma_x^2(x)} = r\sqrt{\Gamma^2(r)} = rQ(r) \quad (25b)$$

$\eta_x(x), \xi_x(x)$ 의 1차 미분, 2차 미분을 구한 후 이들의 결과를 이용하면, 고유방정식 (21)은 다음과 같이  $r$ 에 대한 표현식으로 바뀌어 진다.

$$\int_a^r Q(r)dr = (\mu-1)\pi + \left(\frac{\pi}{4} + \delta_1\right) + \left(\frac{\pi}{4} + \delta_2\right) \quad (\mu=1, 2, \dots, L) = \left(\mu - \frac{3}{4}\right)\pi + \tan^{-1}\left(\frac{\rho_1}{Q(r_a^+)}\right) + \tan^{-1}\left\{\frac{\eta'(r_b^-)Ai'(\eta(r_b^-)) + \rho_2 Ai(\eta(r_b^-))}{\eta'(r_b^-)Bi'(\eta(r_b^-)) + \rho_2 Bi(\eta(r_b^-))}\right\} \quad (26)$$

여기서,

$$\rho_1 = P(r_a^-) - \frac{1}{2}\left\{\frac{P'(r_a^-)}{P(r_a^-)} - \frac{Q'(r_a^+)}{Q(r_a^+)}\right\} \quad (27a)$$

$$\rho_2 = P(r_b^+) + \frac{1}{2}\left\{\frac{P'(r_b^+)}{P(r_b^+)} - \frac{\eta''(r_b^-)}{\eta'(r_b^-)}\right\} \quad (27b)$$

식 (26)의 고유방정식을 평가하기 위해서는  $\delta_2$ 의 표현식을 좀더 계산 가능한 식으로 바꿀 필요가 있다 (부록 A).

$$\delta_2 = \tan^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}\left[-\frac{\rho\varphi(\varphi_b^-) + \frac{2}{3}\right]I_{1/3}(\varphi(r_b^-)) + \left[\frac{\varphi(r_b^-) + \frac{4}{3}\rho\right]I_{2/3}(\varphi(r_b^-)) - \varphi(r_b^-)I_{1/3}(\varphi(r_b^-)) + \rho\varphi(r_b^-)I_{2/3}(\varphi(r_b^-))}{\frac{\rho\varphi(\varphi_b^-) + \frac{2}{3}}{\sqrt{3}}I_{1/3}(\varphi(r_b^-)) + \left[\frac{\varphi(r_b^-) + \frac{4}{3}\rho\right]I_{2/3}(\varphi(r_b^-)) + \varphi(r_b^-)I_{1/3}(\varphi(r_b^-)) + \rho\varphi(r_b^-)I_{2/3}(\varphi(r_b^-))}\right\} \quad (28)$$

여기서,

$$\rho = \frac{1}{P(r_b^-)}\left\{P(r_b^+) + \frac{1}{2}\left(\frac{P'(r_b^+)}{P(r_b^+)} - \frac{P'(r_b^-)}{P(r_b^-)}\right)\right\} + \frac{1}{6\varphi(r_b^-)} \quad (29)$$

$$\varphi(r_b^-) = \int_r^{r_b^-} P(r)dr \quad (30)$$

#### V. 언덕형 굴절률 분포를 갖는 HOF의 모의 전산

언덕형 굴절률 분포를 갖는 HOF의 분산곡선 및 도파모드 식 (26)의 고유방정식은  $l=0$ 에 대해서 정규화 변수  $v, b$  로써 간단히 표현 가능하다(부록 B).

$$v(1-b) = (4\mu-3) + \frac{4}{\pi} \tan^{-1}\sqrt{\frac{a+b}{1-b}} + \frac{4}{\pi} \delta_2 \quad (\mu=1, 2, \dots, L) \quad (31)$$

여기서, 정규화 변수  $v, b$ 와 비대칭 인자  $a$ 는 다음으로 정의된다.

$$v = k_0 d \sqrt{n_2^2 - n_3^2} \quad : \text{정규화 주파수} \quad (32a)$$

$$b = \frac{(N^2 - n_3^2)}{(n_2^2 - n_3^2)} \quad : \text{정규화 전파상수} \quad (32b)$$

$$a = \frac{n_3^2 - n_1^2}{n_2^2 - n_3^2}, \quad d = r_b - r_a \quad (32c)$$

모의전산은 굴절률 분포가 포물선 함수를 갖는 언덕형

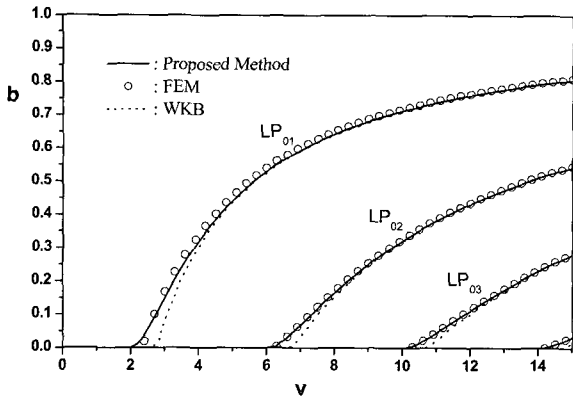


그림 4. 언덕형 HOF의 v-b 곡선

$n_1=1.0, n_3=1.45, \Delta=0.01, r_a=3.5\mu\text{m}, r_b=10.9\mu\text{m}, d=r_b-r_a$

HOF를 대상으로 하였으며, 이는 그림 1에 그려져 있다. HOF의 굴절률 분포에서 포물선 함수의 그림은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$n^2(r) = \begin{cases} n_1^2 & r \leq r_a \\ n_3^2 + (n_2^2 - n_3^2) \left[ 1 - \left( \frac{r-r_a}{d} \right)^2 \right] & r_a \leq r \leq r_b \\ n_3^2 & r \geq r_b \end{cases} \quad (33)$$

그림 4에는 HOF구조에 대하여 계산된 v-b 곡선이 그려져 있다. 유도된 고유 방정식의 정확성을 평가하기 위해 본 논문에서 제안된 방법 외에도 유한 요소법(FEM)과 기존 WKB에 의한 결과도 제시하였다. 제안된 방법에 의한 결과는 전반적으로 FEM의 결과와 일치하는 경향을 보이고 있다. 그러나 WKB에 의한 v-b 곡선의 cut-off 주파수는 FEM의 결과에 비해 다소 올라가는 경향을 보이고 있으며, 이는 도파로 해석에서 WKB가 보이는 일반적인 경향과 일치한다.

그림 4에서 각 LP<sub>0m</sub> 모드에 대한 v-b 곡선은 간결한 형태의 고유방정식인 식 (31)을 이용하여 그렸다. v-b 곡선은 어떠한 파장 영역에 대해서도 적용될 수 있다.

그림 5에는 LP02 모드의 cut-off 근처인 v=6.2137에서 LP01 모드의 횡면 전계 분포 함수가 그려져 있다. 제안된 방법에 의한 field의 모양은 각 회귀점에서 연속이며, 전반적으로 FEM의 결과와 일치하고 있다. 반면에 WKB에 의한 field 분포는 회귀점에서 발산하고 있음을 알 수 있다.

**굴절률 분포에 따른 횡면전계 R(r)의 비교, 검토**

그림 6에는 계단형과 언덕형 굴절률 분포를 갖는 HOF의 전계 함수를 비교하였다. 각 전계는 파워가 1로 정규화되어 있다.

그림 6에서 보듯이 언덕형의 경우 계단형에 비하여 전계

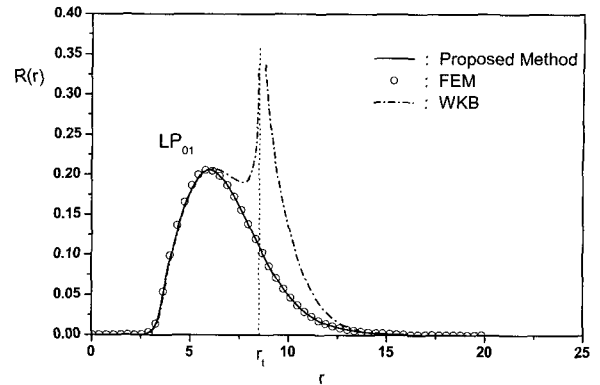


그림 5. 언덕형 HOF의 횡면 전계 분포 R(r), v=6.2137.

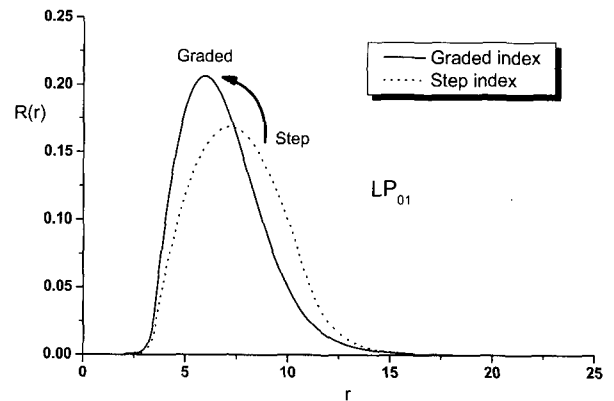


그림 6. 계단형과 언덕형 HOF의 횡면 전계 분포 R(r), v=6.2137 HOF의 굴절률 및 치수 파라미터는 그림 3과 동일.

함수의 기울기가 안쪽으로 더 가파름을 알 수 있다. 도파 전계는 굴절률이 상대적으로 높은 곳으로 몰린다는 것을 감안하면, 언덕형 HOF에서 전계가 계단형에 비하여 안쪽으로 쏠리는 현상을 이해가 될 수 있다. 또한 이 결과를 이용하여 언덕형 HOF를 통해 원자 도파를 제어할 수 있는 가능성을 제시하고 있다.

**VI. 결 론**

언덕형 굴절률 분포를 갖는 HOF를 해석하기 위하여 정밀한 수학적 해석 방법을 제안하였다. 시도해로써 코어 영역에서는 수정된 Airy 함수를, 중공 영역과 클래딩 영역에서는 WKB 함수를 제시하였다. 이러한 시도해에 기초하여 다소 복잡하기는 하나 매우 정교한 형태의 고유방정식을 유도하였으며, WKB 방법에 내재된 함수의 불연속, cut-off에서의 오차 문제를 해결할 수 있었다.

해석 결과, 언덕형 굴절률 분포를 갖는 HOF의 경우 modal field의 기울기를 조절함으로써, 원자 도파를 제어할 수 있는 가능성을 확인하였다.

감사의 글

본 연구는 2005년도 서울시립대학교 연구교수 연구비 지원에 의하여 수행되었습니다.

부록 A : Bessel 함수들로 표현된  $\delta_2$

$\eta'(r)$  과  $\eta''(r)$  은  $P(r)$  에 관해서 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\eta'(r) = P(r) \left( \frac{3}{2} \int_{r_i}^r P(r) dr \right)^{-1/3} = \frac{P(r)}{\sqrt{\eta(r)}} \tag{A1}$$

$$\eta''(r) = \frac{P'(r)}{\sqrt{\eta(r)}} - \frac{1}{2} \frac{P^2(r)}{\eta^2(r)} \tag{A2}$$

한편,  $y = \eta(r_b^-)$  로 놓으면

$$z = \frac{2}{3} y^{3/2} = \frac{2}{3} \left( \eta(r_b^-) \right)^{3/2} = \int_{r_i}^{r_b^-} P(r) dr = \varphi(r_b^-) \tag{A3}$$

이므로 식 (25)의 분자, 분모항은 다음과 같이 Bessel 함수로 쓸 수 있다.

$$\eta'(r_b^-) Ai(\eta(r_b^-)) = \frac{P(r_b^-)}{\sqrt{\eta(r_b^-)}} \frac{\eta(r_b^-)}{3\varphi(r_b^-)} \left\{ -\frac{2}{3} I_{1/3}(\varphi(r_b^-)) + \varphi(r_b^-) I_{2/3}(\varphi(r_b^-)) - \varphi(r_b^-) I_{4/3}(\varphi(r_b^-)) \right\} \\ = \frac{\sqrt{\eta(r_b^-)}}{3\varphi(r_b^-)} P(r_b^-) \left\{ -\frac{2}{3} I_{1/3}(\varphi(r_b^-)) + \varphi(r_b^-) I_{2/3}(\varphi(r_b^-)) - \varphi(r_b^-) I_{4/3}(\varphi(r_b^-)) \right\} \tag{A4}$$

$$\rho_2 Ai(\eta(r_b^-)) = \frac{\sqrt{\eta(r_b^-)}}{3\varphi(r_b^-)} \rho_2 \left\{ -\varphi(r_b^-) I_{1/3}(\varphi(r_b^-)) + \frac{4}{3} I_{2/3}(\varphi(r_b^-)) + \varphi(r_b^-) I_{5/3}(\varphi(r_b^-)) \right\} \tag{A5}$$

$$\eta'(r_b^-) Bi(\eta(r_b^-)) = \frac{\sqrt{\eta(r_b^-)}}{\sqrt{3}\varphi(r_b^-)} P(r_b^-) \left\{ \frac{2}{3} I_{1/3}(\varphi(r_b^-)) + \varphi(r_b^-) I_{2/3}(\varphi(r_b^-)) + \varphi(r_b^-) I_{4/3}(\varphi(r_b^-)) \right\} \tag{A6}$$

$$\rho_2 Bi(\eta(r_b^-)) = \frac{\sqrt{\eta(r_b^-)}}{\sqrt{3}\varphi(r_b^-)} \rho_2 \left\{ \varphi(r_b^-) I_{1/3}(\varphi(r_b^-)) + \frac{4}{3} I_{2/3}(\varphi(r_b^-)) + \varphi(r_b^-) I_{5/3}(\varphi(r_b^-)) \right\} \tag{A7}$$

따라서  $\delta_2$  는 다음과 같다.

$$\delta_2 = \tan^{-1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\left[ \frac{\rho_2 \varphi(r_b^-) + \frac{2}{3} P(r_b^-)}{\rho_2 \varphi(r_b^-) + \frac{2}{3} P(r_b^-)} \right] I_{1/3}(\varphi(r_b^-)) + \left[ \frac{P(r_b^-) \varphi(r_b^-) + \frac{4}{3} \rho_2}{P(r_b^-) \varphi(r_b^-) + \frac{4}{3} \rho_2} \right] I_{2/3}(\varphi(r_b^-)) - \frac{P(r_b^-) \varphi(r_b^-) I_{4/3}(\varphi(r_b^-)) + \rho_2 \varphi(r_b^-) I_{5/3}(\varphi(r_b^-))}{\left[ \frac{\rho_2 \varphi(r_b^-) + \frac{2}{3} P(r_b^-)}{\rho_2 \varphi(r_b^-) + \frac{2}{3} P(r_b^-)} \right] I_{1/3}(\varphi(r_b^-)) + \left[ \frac{P(r_b^-) \varphi(r_b^-) + \frac{4}{3} \rho_2}{P(r_b^-) \varphi(r_b^-) + \frac{4}{3} \rho_2} \right] I_{2/3}(\varphi(r_b^-)) + P(r_b^-) \varphi(r_b^-) I_{4/3}(\varphi(r_b^-)) + \rho_2 \varphi(r_b^-) I_{5/3}(\varphi(r_b^-))} \right\} \tag{A8}$$

부록 B : 정규화 변수가 도입된 고유방정식 ( $l=0$ )

i)  $r_a \leq r$  인 영역에 대하여 식(3), 식(4)를 다시 쓰면

$$n^2(r) = n_3^2 + (n_2^2 - n_3^2) f(r) \tag{B1}$$

$$N^2 = n_3^2 + (n_2^2 - n_3^2) b \tag{B2}$$

이 들로부터

$$k_0^2 [n^2(r) - N^2] = \left( \frac{v}{d} \right)^2 [f(r) - b] \tag{B3}$$

여기서

$$f(r) = 1 - \left( \frac{r - r_a}{d} \right)^2, \quad d = r_b - r_a \tag{B4}$$

한편  $Q(r)$ ,  $P(r)$  은 정의에 의하여

$$Q(r) = \frac{v}{d} \sqrt{f(r) - b} = \frac{v}{d^2} \sqrt{(r - r_a)^2 - (r - r_a)^2} \quad r < r_i \tag{B5}$$

$$P(r) = \frac{v}{d} \sqrt{b - f(r)} = \frac{v}{d^2} \sqrt{(r - r_a)^2 - (r_i - r_a)^2} \quad r_i < r \tag{B6}$$

여기서

$$r_i = r_a + d\sqrt{1 - b} \tag{B7}$$

$Q(r)$  의 적분 결과는 다음과 같다.

$$\int_{r_a}^{r_i} Q(r) dr = \frac{\pi}{4} v(1 - b) \tag{B8}$$

한편  $P'(r_b^+) = 0$  를 고려하여  $\rho$  의 표현식을 다시 쓰면

$$\rho = \frac{1}{P(r_b^-)} \left\{ P(r_b^+) - \frac{1}{2} \frac{P'(r_b^-)}{P(r_b^-)} \right\} + \frac{1}{6\varphi(r_b^-)} \tag{B9}$$

식 (B6), 식 (32)로부터

$$\frac{1}{P(r_b^-)} \left[ P(r_b^+) - \frac{1}{2} \frac{P'(r_b^-)}{P(r_b^-)} \right] = 1 - \frac{1}{2vb\sqrt{b}} \tag{B10}$$

$$\varphi(r_b^-) = \int_{r_i}^{r_b} P(r) dr = \frac{1}{2}v\sqrt{b} + \frac{1}{2}v(1-b) \log \frac{\sqrt{1-b}}{1+\sqrt{b}} \quad (B11)$$

ii)  $r=r_a$  에서는  $n(r)$  이 불연속이 되며,  $n(r_a^-)=n_1$ ,  $n(r_a^+)=n_2$  그리고  $n'(r_a^-)=n'(r_a^+)=0$  가 된다. 따라서

$$\frac{\rho_1}{Q(r_a^+)} = \frac{P(r_a^-)}{Q(r_a^+)} = \frac{\sqrt{N^2 - n_1^2}}{\sqrt{n_2^2 - N^2}} = \sqrt{\frac{a+b}{1-b}} \quad (B12)$$

iii) 식 (26)의 고유방정식을 다시 쓰면

$$\int_a^r Q(r) dr = (\mu - 1)\pi + \tan^{-1} \left[ \frac{\rho_1}{Q(r_a^+)} \right] + \left[ \frac{\pi}{4} + \delta_2 \right] \quad (B13)$$

(B1) ~ (B12)의 결과를 이용하여 다시 정리하면 다음과 같다.

$$\frac{\pi}{4}v(1-b) = \left( \mu - \frac{3}{4} \right) \pi + \tan^{-1} \sqrt{\frac{a+b}{1-b}} + \delta_2(\rho, \varphi) \quad (B14)$$

여기서  $\delta_2$ 는 식 (28)의 형태이고  $\rho, \varphi$ 의 함수이다.

### 참고문헌

[1] M. A. Ol'Shanii, Yu. B. Ovchinnikov, and V. S. Letokhov, "Laser Guiding of Atoms in a Hollow Optical Fiber", *Opt. Communications*, vol. 98, pp. 77-79, April 1993.

[2] S. Marksteiner, C. Savage, P. Zoller and S. Rolston, "Coherent atomic waveguides from hollow optical fibers: Quantized atomic motion", *Phys. Rev. A*, vol. 50, pp. 26802690, Sep. 1994.

[3] M. J. Renn, D. Montgomery, O. Vdovin, D. Z. Anderson, C. E. Wieman, and E. A. Cornell. "Laser-Guided Atoms in Hollow-Core Optical Fibers", *Phys. Rev. Lett.*, vol. 75, pp. 32533256, Oct. 1995.

[4] H. Ito, T. Nakata, K. Sakaki, and M. Ohtsu. "Laser Spectroscopy of Atoms Guided by Evanescent Waves in Micron-Sized Hollow Optical Fibers", *Phys. Rev. Lett.*, vol. 76, pp. 45004503, June 1996.

[5] W. Berglund and A. Gopinath, "WKB analysis of bend losses in optical waveguides", *IEEE J. Lightwave Technol.*, vol 18, pp. 1161-1166, August, 2000.

[6] R. E. Langer, "On the asymptotic solutions of ordinary differential equations, with an application to the Bessel functions of large order", *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 33, no. 99, pp. 23-64, 1931.

[7] S. Roy, A. K. Ghatak, I. C. Goyal, and R. L. Gallawa, "Modified Airy function method for the analysis of tunneling problems in optical waveguides and quantum-well structures", *IEEE J. Quantum Electron.*, Vol. 29, pp. 340-345, Feb. 1993.

[8] M. S. Chung and C. M. Kim, "Analysis of Optical Fibers with Graded-Index Profile by a Combination of Modified Airy Functions and WKB Solutions", *IEEE J. Lightwave Technol.*, Vol. 17, No.12, pp. 2534-2541, Dec. 1999.

[9] M. S. Chung and C. M. Kim, "General Eigenvalue Equations for Optical Planar Waveguides with Arbitrarily Graded-Index Profiles", *IEEE J. Lightwave Technol.*, Vol. 18, No.6, pp. 878-885, June. 2000.

## Analysis of Hollow Optical Fiber with Graded-Index Profile

Joong-Ho Pee

Photonics Group LS Cable 643 Jinpyeong-dong, Gumi-si, Gyeongsangbuk-do 730-360

Woo-Jin Jeong and Chang-Min Kim<sup>†</sup>

Dept. of Electrical Eng., Univ. of Seoul 90 Jeonnonng-dong, Dongdaemun-gu, Seoul 130-743 Korea

<sup>†</sup>E-mail: cmkim@uos.ac.kr

(Received November 14, 2006, Revised manuscript December 27, 2006)

Arbitrary graded-index HOF(Hollow Optical Fibers) are analyzed using the modified Airy function, and the corresponding eigenvalue equation that renders precise results is derived. For graded index HOF, the gradient of an evanescent field in hollow region could be adjusted more sharply than the conventional step-index HOF and the feasibility of more effective atom-guiding is confirmed.