Communications of the Korean Statistical Society Vol. 15, No. 6, 2008, pp. 825–835

차원축소를 통한 다변량 시계열의 변동성 분석 및 응용†

송유진[1], 최문선[2], 황선영[3]

요 약

계량경제학 분야에서 널리 쓰이는 MGARCH(multivariate GARCH)모형은 여러 개의 시계열자료들의 변동성을 함께 모형화한다. 그러나 변수가 많아질수록 추정해야 할 모수의 수가 급격하게 늘어나는 문제점이 있다. 본 연구에서는 인자 모형을 통해 자료의 차원을 축소시킴로써 이러한 문제를 해결하고자 하였다. 국내의 주가수익률 자료에 통계적 인자 모형과 fundamental factor model을 적용하여 각각의 의미 있는 인자들을 얻은 후 이를 MGARCH모형에 적합시켰다. 또한 두 인자 모형을 바탕으로 얻어진 최종 모형들의 MSE, MAD와 VaR(Value at Risk)를 계산하여 예측력을 비교하고자 한다.

주요용어: MGARCH; 인자 모형; MSE; MAD.

1. 서론

금융 시계열자료를 모형화 하는데 있어서 변동성(volatility)에 대해 많은 관심을 기울이고 있다. 변동성의 가장 큰 특성 중 하나인 집중(clustering) 현상은 자산수익률의 움직임이 과거의 정보가 미래의 움직임에 영향을 주는 조건부 이분산(conditional heteroskedasticity)모형을 따르는 것으로 이해할 수 있다. 이런 특성을 모형화하기 위해 Engle (1982)은 ARCH모형을 제안하였으며, 그 이후 Bollerslev (1986)의 GARCH모형을 비롯한 수많은 GARCH류 모형들이 개발되어왔다. 또한 실제 시계열자료의 대부분이 서로가 연관되어 피드백(feedback)효과를 가지고 있음을 바탕으로 시계열변수들 간의 변동성과 상관관계(correlation)를 함께 고려한 MGARCH(multivariate GARCH)모형으로까지의 확장이 이루어졌다. 가장 널리 쓰이는 MGARCH류 모형으로는 Bollerslev 등 (1998)의 DVEC모형, Engle과 Kroner (1995)의 BEKK모형, Bollerslev (1990)의 CCC모형 등이 있다. 이러한 모형들은 다수의 재무 분야 연구와 계량경제학 분야에서 유용하다. 하지만 실제적으로 위의 모형들이 대체로 다수의 모수를 동시적으로 추정하기 때문에 추정상의 부담을 갖게 될 뿐 아니라 변수가 많아질수록 추정해야 할 모수가 급격히 많아진다는 문제점이 있다. 따라서 이러한 문제점을 극복하고자 차원축소를 통해 변수를 줄일 수 있다.

---

† 본 연구는 2008 숙명여자대학교 교내 연구비의 지원 및 BK-21 사업에 의해 수행되었습니다.
1) (140-742) 서울시 용산구 효창원길 52, 숙명여자대학교 통계학과, 대학원생.
2) (140-742) 서울시 용산구 효창원길 52, 숙명여자대학교 통계학과, 대학원생.
3) (140-742) 서울시 용산구 효창원길 52, 숙명여자대학교 통계학과, 교수.
교신저자: shwang@sookmyung.ac.kr

본 논문에서는 차원축소를 위한 인자모형과 MGARCH 모형에 대해서 알아보고 실제 금융시계열 자료를 적용하여 보고자 한다. 2장에서는 차원축소를 위한 인자모형을 알아보고, 3장에서는 MGARCH 모형들을 살펴본다. 4장에서는 국내 7개 기업의 주가를 이용하여 통계적 인자모형과 industry factor model(*cf.* Tsay, 2005, ch.9)을 이용하여 각각 차원을 축소한 후 MGARCH 모형에 적합시킨다. 또한, 그 결과들을 이용하여 MSE, MAD와 VaR을 계산해보고 모형들을 비교하고자 한다.

2. Factor Models

2.1. Factor models

Conner (1995)과 Campbell 등 (1997)은 다음의 세 가지 유형의 인자모형을 제시하였다. 첫 번째 유형으로는 자산수익률의 일반적인 현상을 설명해주는 GDP 성장률, 이자율, 물가상승률, 실업자 수와 같은 거시적 변수를 이용한 거시적 인자모형(macroeconomic factor model)이 있다. 여기서 인자들은 관측되어질 수 있고, 모형은 선형회귀방법으로 추정될 수 있다. 두 번째 유형으로는 fundamental factor model이 있다. 공통인자(common factor)를 구성하기 위해 회사규모, 자산, 시장가치와 산업분류가 같은 회사나 자산의 특이한 속성들을 이용한다. 세 번째 유형으로는 통계적 인자모형(statistical factor models)이다. 여기서, 수익률 시리즈(series)로부터 관측되어지지 않거나 잠재된 변수들을 추정하고자 한다. 기본적인 인자 모형을 살펴보면, 시간 t에 대한 k-차원의 수익률을 $\mathbf{r}_t = (r_1, \ldots, r_k)^T$라 할 때 $\mathbf{r}_t$는 평균벡터가 $\boldsymbol{\mu}$이고 공분산 행렬이 $\boldsymbol{\Sigma}_r$인 정상성을 가정한다. 이때 $\mathbf{r}_t$는 모든 변수에 공통적으로 영향을 미치는 잠재적인 공통인자 $\mathbf{f}_t = (f_{1t}, \ldots, f_{mt})^T$들과 개별 변수에만 영향을 미치는 특정인자(specific factor) $\boldsymbol{\epsilon}_t = (\epsilon_{1t}, \ldots, \epsilon_{kt})^T$들의 선형결합으로 표시될 수 있다. 여기서 m은 k보다 작다. 변수와 공통인자 사이의 관계를 나타내는 선형인자모형 구조는 다음과 같이 표시된다.

$$\mathbf{r}_t - \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\beta}\mathbf{f}_t + \boldsymbol{\epsilon}_t, \tag{2.1}$$

여기서 $\boldsymbol{\beta} = [\beta_{ij}]_{k\times m}$은 인자적재행렬(matrix of factor loadings)이라고 부르고, 각각의 원소인 인자적재 β_{ij}는 변수(수익률) r_i에 대한 j번째 공통인자 f_j의 중요성을 나타내는 가중치이다. 한편, 확률벡터 $\mathbf{f}_t$는 모든 변수에 공통적으로 영향을 미치는 공통인자들을 원소로 하는 공통인자벡터이고, 원소 f_{jt}는 j번째 공통인자를 의미한다. 공통인자는 관측할 수 없는 확률변수이다. 그리고 확률벡터 $\boldsymbol{\epsilon}_t$는 공통인자들에 의하여 설명될 수 없는 고유변동을 나타내는 특정인자벡터이고, 원소 ϵ_{it}는 i번째 특정인자를 의미한다.

2.2. Fundamental factor model: BARRA factor model

BARRA factor model은 BARRA회사의 창시자인 Bar Rosenberg에 의해 제시되었으며 (Grinold과 Kahn, 2000) 이 방법은 거시적 인자모형과 대조적으로 인자벡타 $\boldsymbol{\beta}_i$로 관측된 자산의 특정 원칙(specific fundamentals)을 다루고, 회귀방법을 통해 각 시간 t에서 인자 $\mathbf{f}_t$를 추정한다. $\boldsymbol{\beta}_i$은 시간 불변성을 가지지만 $\mathbf{f}_t$는 시간에 따라 변한다. 이 모형은 k개

의 관측치와 m개의 알려지지 않은 인자를 가진 다중선형회귀이며, m개의 공통인자가 k개의 자산보다 작아야 회귀모형이 추정 가능해 진다. 따라서 시점 t일 때 인자는 가중최소제곱법(weighted least squares method: WLS)에 의해 추정될 수 있다. 추정치는 다음과 같다.

$$\hat{\mathbf{f}}_t = (\boldsymbol{\beta}^T \mathbf{D}^{-1} \boldsymbol{\beta})^{-1} (\boldsymbol{\beta}^T \mathbf{D}^{-1} \tilde{\mathbf{r}}_t), \tag{2.2}$$

여기서 $\tilde{\mathbf{r}}_t$은 평균수정된 과잉수익률(mean-corrected excess returns)이며, $\mathbf{D}$은 $\boldsymbol{\epsilon}_t$의 공분산 행렬이다. $\mathbf{D}$가 알려지지 않았으므로 이를 추정하기 위해 첫 번째 단계에서는 보통최소제곱법(ordinary least squares method: OLS)을 사용하여 시점 t일 때 $\mathbf{f}_t$의 예비 추정치를 구하고 두 번째 단계에서는 정확한 인자의 추정치를 구하기 위해 일반화최소제곱법(generalized least squares method: GLS)을 사용하는 두 단계의 과정에 의해 추정치를 구할 수 있다. BARRA factor model을 이용한 비교적 간단한 모형으로 industry factor model이 있다. 이 모형은 같은 업종에 있는 회사를 같은 인자로 가정한다.

$$\tilde{r}_{it} = \beta_{i1} f_{1t} + \cdots + \beta_{ik} f_{kt} + \epsilon_{it}, \tag{2.3}$$

$$\beta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{자산 } i\text{가 } j\text{산업에 속할 경우}, \\ 0, & \text{그 외}, \end{cases}$$

여기서 β_{ij}는 지표변수들이기 때문에 $\mathbf{f}_t$의 보통최소제곱법의 추정치는 매우 간단하다. 사실상 $\mathbf{f}_t$는 시점 t에서의 각 분야(sector)의 수익률 평균으로 구성된 벡터이며 따라서, i번째 자산의 특정인자는 단지 그 산업의 평균으로부터 과잉수익률의 편차를 나타낸다.

2.3. 통계적 인자 모형(Statistical Factor Models)

다변량 통계 분석에서 중요한 문제점 중 하나가 차원을 축소하는 것이다. 실제적으로 시계열자료의 차원이나 모델의 차수가 증가하게 되면 모형에서 모수의 개수는 급격하게 증가하게 된다. 이러한 문제를 극복하기 위한 여러 가지 방법들 가운데 통계적 인자 모형은 인자분석(factor analysis)에 기초를 두고 있다. 인자분석이란 서로 상관되어 있는 변수들 사이의 복잡한 구조를 잠재적인 공통인자를 이용하여 설명하는 다변량 기법이다 (성웅현, 2002).

3. MGARCH 모형

MGARCH 모형의 장점은 여러 수익률들의 변동성을 함께 묶어서 모형화함으로써 변동성들간의 동적인 관계를 살펴볼 수 있다는 데 있으며, 또한 많은 재정적 적용들을 가능하게 한다. 이 모형은 포트폴리오를 선택하거나 자산 배분(asset allocation)시 중요한 역할을 한다. MGARCH 모형에 대한 개념 및 수식은 Tsay (2005), Bauwens 등 (2006)와 Zivot와 Wang (2006)을 중심으로 정리하였다.

k-차원의 벡터수익률 $\{\mathbf{r}_t\}$에 대해 다음과 같은 모형을 고려해보자.

$$\mathbf{r}_t = \boldsymbol{\mu}_t + \mathbf{a}_t. \tag{3.1}$$

위의 식에서 $\boldsymbol{\mu}_t = E(\mathbf{r}_t\,|\,\mathbf{F}_{t-1})$는 $t-1$시점까지의 모든 정보 $\mathbf{F}_{t-1}$이 주어졌을 때 벡터수익률 $\mathbf{r}_t$의 조건부 기대값이다. 또한, $\mathbf{a}_t = (a_{1t}, \ldots, a_{kt})^T$는 t시점에서의 충격(shock) 또는 이노베이션(innovation)이다.

$$\mathbf{a}_t = \mathbf{H}_t^{\frac{1}{2}}\mathbf{e}_t, \tag{3.2}$$

여기서 $\mathbf{H}_t$는 $\mathbf{a}_t$의 조건부 분산-공분산행렬인 $\mathbf{H}_t = \mathrm{Cov}(\mathbf{a}_t\,|\,\mathbf{F}_{t-1})$이고, $\mathbf{H}_t^{1/2}$는 $k \times k$인 양정치행렬(positive definite matrix)이다. 또한, $\mathbf{e}_t$는 $k \times 1$벡터로 다음의 조건을 만족한다.

$$E(\mathbf{e}_t) = \mathbf{0}, \qquad \mathrm{Var}(\mathbf{e}_t) = \mathbf{I}_k. \tag{3.3}$$

일반적으로 $\boldsymbol{\mu}_t$에 대해서는 VARMA(vector ARMA)모형을 가정하며 수익률에 대한 변동성 모형이란 시간에 따른 $\{\mathbf{H}_t\}$에 대한 모형을 의미한다.

3.1. EWMA(Exponentially Weighted Moving-Average) 모형

이 모형은 실제 금융자료들의 대부분이 단위근(unit root)을 가지고 있다는 점을 바탕으로 J. P. Morgan사가 개발한 RiskMetrics (1996)이다. $\mathbf{F}_{t-1} = \{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{t-1}\}$가 주어졌을 때, 시간변화를 고려해서 최근의 충격이 더 많은 관련성을 가진다는 것을 강조한다면 지수가중이동평균법(exponentially weighted moving-average)을 이용하여 다음과 같이 공분산행렬을 추정할 수 있다.

$$\mathbf{H}_t = \frac{1-\lambda}{1-\lambda^{t-1}}\sum_{j=1}^{t-1}\lambda^{j-1}\mathbf{a}_{t-j}\mathbf{a}_{t-j}^T, \tag{3.4}$$

여기서 $0 < \lambda < 1$이고, 가중치 $(1-\lambda)\lambda^{j-1}/(1-\lambda^{t-1})$의 합은 1이다. $t \to \infty$함에 따라 $\lambda^{t-1} \approx 0$이므로 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\mathbf{H}_t = (1-\lambda)\mathbf{a}_{t-j}\mathbf{a}_{t-j}^T + \lambda\mathbf{H}_{t-1}, \tag{3.5}$$

여기서 $\mathbf{a}_t = \mathbf{r}_t - \boldsymbol{\mu}_t$이 평균이 $\mathbf{0}$이고, 분산이 $\mathbf{H}_t$인 다변량 정규분포를 따른다고 가정할 경우 감소요인(decay factor)인 λ에 대한 추정이 가능하다.

3.2. DVEC(Diagonal VEC) 모형

EWMA 모형에서 $a_1 = 1-\lambda$, $b_1 = \lambda$라고 할 때, $a_1 + b_1 = 1$이 성립하면서 GARCH모형이 약정상성을 가지지 않게 된다. Bollerslev 등 (1988)은 EWMA모형을 일반화하여 정상성을 만족하면서도 시간 변화에 유연한 변동성 모형을 제시하였다.

$$\mathbf{H}_t = \mathbf{A}_0 + \sum_{i=1}^{m}\mathbf{A}_i \odot \left(\mathbf{a}_{t-i}\mathbf{a}_{t-i}^T\right) + \sum_{j=1}^{s}\mathbf{B}_j \odot \mathbf{H}_{t-j}, \tag{3.6}$$

여기서 $\odot$는 element-by-element multiplication인 하다마드곱(Hadamard product)을 의미하고, $\mathbf{A}_i$와 $\mathbf{B}_j$는 $k \times k$인 대각행렬이다. 위의 모형을 DVEC(m, s) 또는 diagonal VEC(m, s)이라고 부른다.

3.3. BEKK 모형

DVEC 모형에서 $\mathbf{H}_t$의 각 원소들이 양정치(positive definite) 공분산 행렬을 생성하지 못할 수 있다. 또한 모수 행렬들에서 비대각(off-diagonal)원소는 고려하지 않기 때문에 서로 다른 변동성간의 관계를 밝혀낼 수 없다는 제한적인 문제를 갖고 있다. 이를 보안하기 위해서 Engle과 Kroner (1995)가 BEKK 모형을 제시했다.

$$\mathbf{H}_t = \mathbf{A}\mathbf{A}^T + \sum_{i=1}^{m} \mathbf{A}_i(\mathbf{a}_{t-i}\mathbf{a}_{t-i}^T)\mathbf{A}_i^T + \sum_{j=1}^{s} \mathbf{B}_j\mathbf{H}_{t-j}\mathbf{B}_j^T, \tag{3.7}$$

여기서 $\mathbf{A}$는 하삼각행렬(lower triangular matrix)이고, $\mathbf{A}_i$와 $\mathbf{B}_j$는 $k \times k$행렬이다. 추정해야 하는 모수의 수는 $k^2(m+s) + k(k+1)/2$개 존재한다. 따라서 m과 s의 수가 증가함에 있어서 추정해야 하는 모수의 수는 급격히 증가하게 되는 문제점이 발생한다.

3.4. CCC(Constant Conditional Correlation)

모형 추정해야할 모수를 작게 유지하게 위해 Bollerslev (1990)는 조건부 상관계수가 일정하고 따라서 공분산 계수가 $\rho_{21,t} = \rho_{21}$로 시점에 상관없이 일정하다고 가정한 모형을 제시하였다. 이 제약조건에 의해서 모수의 개수가 줄어들고 모형이 단순화되었다. 제시된 CCC모형은 다음과 같다.

$$\mathbf{H}_t = \mathbf{D}_t\mathbf{R}\mathbf{D}_t = \left(\rho_{ij}\sqrt{h_{iit}h_{jjt}}\right),$$
$$\mathbf{D}_t = \mathrm{diag}\left(h_{11t}^{\frac{1}{2}} \cdots h_{kkt}^{\frac{1}{2}}\right), \qquad \mathbf{R} = (\rho_{ij}),$$

여기서 h_{iit}는 단변량 GARCH(univariate GARCH)에 의해 모형화되고, $\mathbf{R}$은 $\rho_{ii} = 1$인 대칭(symmetric) 양정치행렬이다.

4. 사례분석

이 장에서는 7개의 다변량 시계열 자료를 이용하여 MGARCH 모형을 적합 시키고자 한다. 시계열 자료로는 국민은행, 신한은행, 삼성전자, LG전자, 현대건설, 대우건설과 GS건설의 주가를 이용하였다. $k = 7$인 MGARCH 모형을 적합 시 모수 추정에 문제점이 발생하며 따라서 통계적 인자모형을 통해 차원축소를 한 후 의미 있는 인자를 찾고 인자점수를 이용하여 인자수 $k = 3$인 자료를 구축하였다. 포트맨토 검정을 통해 각 인자들 간에 교차상관성이 존재함을 확인하였으며, MGARCH 모형을 적합시켜 보았다. 자료들은 굿모닝신한증권에서 제공하는 2004년 4월 1일부터 2008년 3월 31일까지의 일별자료(993개의 관측치)이며, 분석에는 S-Plus의 FinMetrics와 SAS/ETS를 사용하였다. 또한, 앞에서 소개한 인자모형 중 industry factor model을 통해 통계적 인자모형과 다른 인자를 찾아내서 MSE, MAD와 VaR측정을 통해 비교해 보았다.

4.1. 인자모형 구축

분석에 이용된 수익률은 앞에서 언급한 7개의 주가지수들을 로그차분한 후 100을 곱하여 얻어진 수익률(단위: %)이다. 7개의 시도표를 통하여 수익률들의 변동성이 매우 큼을 볼 수 있었으며 차원축소를 하기 위하여 통계적 인자모형에서 주성분 방법을 이용하였다. 먼저, 인자모형에서 인자의 수를 정하기 위해 주성분분석에 의한 고유값을 추정하여 이용하였다. 결과는 표 4.1에 제시하였으며, 3개의 인자가 전체자료의 76%를 설명해주므로 가장 적당하다고 볼 수 있다. 또한, 분석 자료가 건설관련산업, 전자관련산업과 은행관련산업의 세 그룹으로 나누어지기 때문에 공통인자의 수를 3개로 결정하는 것이 타당하다고 생각된다. 적재행렬을 추정하는 방법으로는 최대우도법을 이용하고, 회전방법에는 베리멕스 회전을 이용하여 인자적재행렬을 추정하였다. 추정된 세 개의 인자는 다음과 같다.

$$\hat{f}_1 = 0.2360x_1 + 0.2221x_2 + 0.1581x_3 + 0.1855x_4 + 0.8023x_5 + 0.6294x_6 + 0.5518x_7,$$
$$\hat{f}_2 = 0.7380x_1 + 0.6976x_2 + 0.3708x_3 + 0.2085x_4 + 0.0997x_5 + 0.1939x_6 + 0.1956x_7,$$
$$\hat{f}_3 = 0.3235x_1 + 0.3106x_2 + 0.6576x_3 + 0.5853x_4 + 0.1234x_5 + 0.1271x_6 + 0.2025x_7,$$

여기서 x_1은 국민은행, x_2는 신한은행, x_3는 삼성전자, x_4는 LG전자, x_5는 현대건설, x_6는 대우건설, x_7는 GS건설을 나타낸다. 각 인자에서 적재비율이 높은 회사들을 살펴보았을 때 첫 번째 인자는 건설관련주들의 수익률을 함께 움직일 수 있는 경제 환경을 나타내고, 두 번째 인자는 은행관련주들의 수익률을, 세 번째 인자는 전자관련주들의 수익률로 해석할 수 있다.

4.2. 그랜저인과성 검정(Granger Causality Test)

4.1장에서 분석한 3개의 공통인자를 가진 인자모형을 살펴보자. 3개의 수익률간의 변동성을 함께 모형화시키는 것이 필요한지를 판단하기 위해 각각 AR모형에 적합시킨 후, 그 잔차들에 대해서 교차상관계수를 이용하여 그랜저인과성 검정을 하였다. 각 시차의 경우 유의한 교차상관성이 존재하는 것을 확인할 수 있었다. 이는 세 수익률의 변동성이 서로 피드백 관계를 가지면서 영향을 주고 있음을 의미한다. 따라서 건설관련주, 전자관련주와 은행관련주들의 수익률의 변동성들에 대해서 MGARCH 모형을 적용시키는 것이 타당함을 알 수 있다.

4.3. 단변량 GARCH와 MGARCH의 적합

표 4.2는 각각 공통요인들의 수익률에 대해 AR(2)-GARCH(1,1)모형을 적합한 결과와 3장에서 소개되었던 MGARCH 모형을 적합시킨 결과를 정리한 표이다. MGARCH 모형 적합시 $\boldsymbol{\mu}_t$는 vector AR(2) 모형으로 적합시켰다. 본 논문에서는 변동성에 대한 모형화에 초점을 두고 있으므로 $\boldsymbol{\mu}_t$에 대한 적합결과는 생략하였다. 적합된 모형식에서 h_{1t}, h_{2t}와 h_{3t}는 각각 건설회사관련주, 은행관련주와 전자관련주의 수익률에 대한 변동성을 나타내고, 포트맨토 검정결과 세 개의 시계열자료에 대해 각각의 모형들을 적용시키는 것에 무리가 없음을 알 수 있었다.

표 4.1: PCA를 통한 인자개수에 대한 설명력

Importance of Components							
인자 수	1	2	3	4	5	6	7
설명비율	0.4788	0.1647	0.1169	0.0868	0.0804	0.0389	0.0335
누적설명비율	0.4788	0.6435	0.7604	0.8472	0.9276	0.9665	1.0000

표 4.2: 인자모형: 단변량 GARCH와 MGARCH 모형 적합결과

모형	적합된 모형
GARCH(1,1)	$h_{1t} = 0.0758 + 0.1070a_{1,t-1}^2 + 0.7896h_{1,t-1}$ $h_{2t} = 0.0107 + 0.0548a_{2,t-1}^2 + 0.9297h_{2,t-1}$ $h_{3t} = 0.0035 + 0.0483a_{3,t-1}^2 + 0.9450h_{3,t-1}$
EWMA	$\lambda = 0.9679$
DVEC(1,1)	$\hat{\mathbf{A}}_0 = \begin{bmatrix} 0.2903 & & \\ 0.1269 & 0.1319 & \\ -0.0599 & -0.0802 & -0.0011 \end{bmatrix}$ $\hat{\mathbf{A}}_1 = \begin{bmatrix} 0.3177 & 0.0587 & -0.1001 \\ 0.1020 & 0.2385 & -0.0655 \\ 0.0416 & 0.0027 & 0.1994 \end{bmatrix}$ $\hat{\mathbf{B}}_1 = \begin{bmatrix} 0.8756 & -0.0723 & 0.0957 \\ -0.0531 & 0.9312 & 0.0477 \\ -0.0199 & 0.0162 & 0.9670 \end{bmatrix}$
BEKK(1,1)	$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0.2903 & & \\ 0.1269 & 0.1319 & \\ -0.0599 & -0.0802 & -0.0011 \end{bmatrix}$ $\hat{\mathbf{A}}_1 = \begin{bmatrix} 0.3177 & 0.0587 & -0.1001 \\ 0.1020 & 0.2385 & -0.0655 \\ 0.0416 & 0.0027 & 0.1994 \end{bmatrix}$ $\hat{\mathbf{B}}_1 = \begin{bmatrix} 0.8756 & -0.0723 & 0.0957 \\ -0.0531 & 0.9312 & 0.0477 \\ -0.0199 & 0.0162 & 0.9670 \end{bmatrix}$
(diagonal) CCC(1,1)	$h_{11,t} = 0.0791 + 0.1079a_{1,t-1}^2 + 0.7853h_{11,t-1},$ $h_{22,t} = 0.0170 + 0.0545a_{2,t-1}^2 + 0.9190h_{22,t-1},$ $h_{33,t} = 0.0041 + 0.0439a_{3,t-1}^2 + 0.9476h_{33,t-1},$ $\hat{\rho}_{12} = 0.0812, \quad \hat{\rho}_{13} = 0.0891, \quad \hat{\rho}_{23} = 0.3029$

4.4. 비교 기준 모형: Industry factor model

모형 비교를 위해 2장에서 제시한 인자모형 중에 industry factor model을 이용하여 단변량 GARCH 모형과 MGARCH모형을 적합 후 MSE, MAD와 VaR측정을 통해 비교해 보고자 한다. 먼저 industry factor model을 이용하여 3개의 인자를 추정하기로 하자. 7개의 주어진 자료가 같은 업종에 있는 회사를 같은 인자로 가정 시 세 개의 인자가 생성될 수 있음을 알 수 있으며 모형의 비교를 쉽게 하기 위해서 통계적 인자모형의 추정결과와 같이 인자 1을 건설관련주의 수익률, 인자 2를 은행관련주의 수익률로 그리고 인자 3을 전자관련주의 수익률로 가정하겠다. 인자들의 적재행렬은 표 4.3과 같다. 추정된 인자적재행렬을 보았을 때 industry factor model을 이용하여 차원을 축소 시 각 인자들은 마치 각 산업 내 주가들의 단순평균 값임을 알 수 있다. 추정된 industry factor들을 이용하여 앞에서 설명된 절차에 따라 그랜저인과성 검정을 거쳐서 단변량 GARCH와 MGARCH 모형을 적합시켰으며 포트맨토 검정 결과 적합된 모형들이 모두 유의함을 알 수 있었다.

표 4.3: 비교모형(industry factor model)의 인자적재행렬

	Standardized Scoring Coefficients		
	인자 1	인자 2	인자 3
국민은행	0.0000	0.5000	0.0000
신한은행	0.0000	0.5000	0.0000
삼성전자	0.0000	0.0000	0.5000
LG전자	0.0000	0.0000	0.5000
현대건설	0.3583	0.0000	0.0000
대우건설	0.3489	0.0000	0.0000
GS건설	0.2928	0.0000	0.0000

표 4.4: MSE와 MAD 측정결과

1주 예측						
모형		GARCH(1,1)	EWMA	DVEC	BEKK	CCC
인자모형	MSE	7.0232	7.0383	7.0175	6.9869	7.0289
	MAD	1.9092	1.9097	1.9082	1.8984	1.9063
비교모형	MSE	7.3380	7.4510	7.3879	7.3618	7.3923
	MAD	1.9348	1.9431	1.9394	1.9378	1.9400

2주 예측						
모형		GARCH(1,1)	EWMA	DVEC	BEKK	CCC
인자모형	MSE	4.9230	4.9579	4.9612	4.9356	4.9525
	MAD	1.6963	1.7019	1.7059	1.6976	1.7001
비교모형	MSE	5.4279	5.4839	5.4619	5.4403	5.4520
	MAD	1.7736	1.7825	1.7820	1.7783	1.7785

4주 예측						
모형		GARCH(1,1)	EWMA	DVEC	BEKK	CCC
인자모형	MSE	3.8390	3.8366	3.8350	3.8200	3.8301
	MAD	1.5231	1.5148	1.5193	1.5129	1.5159
비교모형	MSE	4.3738	4.4180	4.4069	4.3838	4.3925
	MAD	1.6164	1.6197	1.6183	1.6185	1.6153

4.5. MSE와 MAD측정

통계적 인자모형과 industry factor model에 의해 추정된 각 인자들에 대한 단변량 GARCH와 MGARCH 모형 적합 후 그 예측력을 비교하기 위해 MSE와 MAD를 측정하였다. 1주(5일), 2주(10일), 4주(20일)를 예측하였으며 예측한 값과 실제 원자료를 이용하여 MSE와 MAD를 측정하였다. 표 4.4는 MSE와 MAD를 측정한 결과이며 여기서 인자모형은 통계적 인자 모형을 뜻하며, 비교모형은 industry factor model이다. MSE와 MAD의 결과를 보면 인자모형의 경우 1주의 예측력은 BEKK모형의 경우가 가장 좋은 편이고, 2주의 경우 단변량 GARCH의 경우가 좋은 예측값을 가지지만 4주의 예측값은 다

표 4.5: VaR 측정결과

모형	GARCH(1,1)	EWMA	DVEC	BEKK	CCC
인자모형 VaR(%)	3.0277	3.0954	2.5986	2.7957	2.9757
비교모형 VaR(%)	9.0136	9.5328	8.0993	8.3239	8.6718

시 BEKK모형이 가장 좋은 예측력을 가지는 것으로 판단할 수 있다. 비교모형의 경우 모든 MSE와 MAD값이 단변량 GARCH의 경우가 MGARCH의 경우보다 작은 것을 알 수 있다. 따라서 인자모형은 BEKK모형이 비교모형에 비해서 가장 예측력이 좋다고 할 수 있고, industry factor model의 경우 단변량 GARCH의 경우가 좋은 예측력을 가진다고 볼 수 있다. 또한, 전체적으로 인자모형이 비교모형보다 예측력이 더 좋다고 볼 수 있다.

4.6. VaR(Value at Risk) 측정

통계적 인자모형과 industry factor model에 의한 단변량 GARCH와 MGARCH 모형을 비교하기 위해 VaR을 예측하였다. 주어진 자료가 일별자료임을 고려해서 각 자산의 목표보유기간은 1일로 하고 95%신뢰수준에서 VaR를 측정하였다. 포트폴리오가 세 개의 수익률로 구성되어있으므로 앞에서 제시한 식에 의해 측정하였으며, 결과는 표 4.5에 제시되었다. VaR의 측정결과 industry factor model을 이용한 단변량 GARCH와 MGARCH의 경우가 인자모형을 이용한 경우보다 변동성이 더 큼을 알 수 있다. 또한, 같은 인자모형을 이용 시 DVEC(1,1)의 모형이 가장 변동성이 적음을 알 수 있다.

결론적으로, 다변량 시계열자료의 변동성을 모형화하는 경우, 변수들 간의 변동성을 동시에 고려하는 MGARCH 모형을 사용할 수 있다. 하지만 변수가 많아지면 모수의 급격한 증가에 따른 문제점이 발생하게 된다. 따라서 많은 변수를 가진 다변량 시계열자료에 대해 사전적으로 차원축소를 통해 새로운 변수(즉, 인자)를 생성 후 결과 된 소수의 인자에 MGARCH 모형에 적합 시킨다면 좀 더 간결한 분석을 할 수 있는 장점이 있다.

참고문헌

성웅현 (2002). <응용 다변량분석>, 탐진.

Bauwens, L., Laurent, S. and Rombouts, J. V. K. (2006). Multivariate GARCH models: A survey, *Journal of Applied Econometrics,* **21**, 79–109.

Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity, *Journal of Econometrics*, **31**, 307–327.

Bollerslev, T. (1990). Modeling the conditional in short-run nominal exchange rates: A multivariate generalized ARCH model, *Review of Economics and Statistics*, **72**, 498–505.

Bollerslev, T., Engle, R. F. and Wooldridge, J. M. (1998). A capital-asset pricing model with time-varying covariances, *Journal of Political Economy*, **96**, 116–131.

Campbell, J. Y., Lo, A. W. and MacKinlay, A. C. (1997). *The Econometrics of Financial Markets*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey.

Connor, G. (1995). The three types of factor models: A comparison of their explanatory power, *Financial Analysts Journal*, **51**, 42–46.
Engle, R. F. (1982). Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom Inflation, *Econometrica*, **50**, 987–1007.
Engle, R. F. and Kroner, K. F. (1995). Multivariate simultaneous generalized ARCH, *Econometric Theory*, **11**, 122–150.
Grinold, R. C. and Kahn, R. N. (2000). *Active Portfolio Management: A Quantitative Approach for Producing Superior Returns and Controlling Risk*, 2nd edition., McGraw-Hill, New York.
RiskMetrics (1996). *RiskMetrics*, Technical Document, 4th ed., J. P. Morgan, New York.
Tsay, R. S. (2005). *Analysis of Financial Time Series*, John Wiley & Sons, New York.
Zivot, E. and Wang, J. (2006). *Modeling Financial Time Series with S-PLUS*, 2nd ed., Springer, New York.

[2008년 8월 접수, 2008년 8월 채택]

Volatility Analysis for Multivariate Time Series via Dimension Reduction†

Eugine Song[1), Moonsun Choi[2), S.Y. Hwang[3)

Abstract

Multivariate GARCH(MGARCH) has been useful in financial studies and econometrics for modeling volatilities and correlations between components of multivariate time series. An obvious drawback lies in that the number of parameters increases rapidly with the number of variables involved. This thesis tries to resolve the problem by using dimension reduction technique. We briefly review both factor models for dimension reduction and the MGARCH models including EWMA(Exponentially weighted moving-average model), DVEC(Diagonal VEC model), BEKK and CCC(Constant conditional correlation model). We create meaningful portfolios obtained after reducing dimension through statistical factor models and fundamental factor models and in turn these portfolios are applied to MGARCH. In addition, we compare portfolios by assessing MSE, MAD(Mean absolute deviation) and VaR(Value at Risk). Various financial time series are analyzed for illustration.

Keywords: MGARCH; factor model; MSE; MAD.

† This research was supported by the Sookmyung Women's University Research Grants 2008 and BK-21.

1) Graduate student, Department of Statistics, Sookmyung Women's University, 52 Hyochangwon-gil, Yongsan-gu, Seoul 140-742, Korea.

2) Graduate student, Department of Statistics, Sookmyung Women's University, 52 Hyochangwon-gil, Yongsan-gu, Seoul 140-742, Korea.

3) Professor, Department of Statistics, Sookmyung Women's University, 52 Hyochangwon-gil, Yongsan-gu, Seoul 140-742, Korea. Correspondence: shwang@sookmyung.ac.kr