

# Polytopic Quasi-LPV 모델 기반 능동자기베어링의 비선형제어기 설계

논 문
59-4-21

## Nonlinear Controller Design of Active Magnetic Bearing Systems Based on Polytopic Quasi-LPV Models

이 동 환\* · 박 진 배\*\* · 정 현 석\*\*\* · 주 영 훈†

(Dong-Hwan Lee · Jin-Bae Park · Hyun-Suk Jeong · Young-Hoon Joo)

**Abstract** - In this paper, a systematic procedure to design a nonlinear controller for nonlinear active magnetic bearing (AMB) systems is presented. To do this, we effectively convert the AMB system into a polytopic quasi-linear parameter varying (LPV) system, which is a representation of nonlinear state-space models and is described by the convex combination of a set of precisely known vertices. Unlike the existing quasi-LPV systems, the nonlinear weighting functions, which construct the polytopic quasi-LPV model of the AMB system by connecting the vertices, include not only state variables but also the input ones. This allows us to treat the input nonlinearity effectively. By means of the derived polytopic quasi-LPV model and linear matrix inequality (LMI) conditions, nonlinear controller that stabilizes the AMB system is obtained. The effectiveness of the proposed controller design methodology is finally demonstrated through numerical simulations.

**Key Words** : Active Magnetic Bearing (AMB), Polytopic Quasi-Linear Parameter Varying (LPV) Systems, Linear Matrix Inequality (LMI), Stabilization. Nonlinear Systems.

### 1. 서 론

능동자기베어링(AMB: Active Magnetic Bearing)은 기존의 기계적인 베어링과 달리 자기력에 의해 회전자를 부상시키며, 따라서 회전자가 어떠한 기계적인 접촉 없이 회전할 수 있도록 한다. AMB는 마모와 마찰을 현저히 줄일 수 있기 때문에 사실상 반영구적인 수명을 갖으며, 이러한 이유로 AMB의 응용분야는 점점 많아지고 있다. 이러한 AMB의 동적 시스템은 본질적으로 불안정한 시스템이기 때문에 이를 운용하기 위해서는 적절한 제어 시스템을 필요로 한다. 그러나 ABM의 동적 방정식은 상태변수 뿐만이 아니라 제어 입력 변수에 대해서도 강한 비선형특성을 지니고 있어서 이것을 제어하는 것은 매우 어려운 문제이다. 이러한 문제를 해결하기 위해서 선형제어기법 [6], [7], PID 제어기법 [8], [9], 슬라이딩 제어기법 [10], 되먹임 선형화제어기법 [11]-[13], 그리고 적응제어기법 [14]등의 많은 제어기법들이 도입되었다. 하지만 대부분의 기존 기법들은 제어를 위해 매우 복잡한 알고리즘을 사용하거나 선형제어기법들을 사용했기 때문에 동작점 근처의 작은 영역에서만 안정도를 보장할 수 있다는 단점이 있다.

간단하고 효과적인 대안으로써 Takagi-Sugeno(T-S) 퍼지모델 기반 제어기법 [1]-[5]이 고려될 수 있다. T-S 퍼지모델 기반 제어기법은 보편적이고 간단하며 다루기 편할 뿐 아니라 선형행렬부등식(LMI: Linear Matrix Inequality)을 이용한 다양한 선형제어방법들을 쉽게 적용할 수 있어 최근 많은 연구가 이루어지고 있다. T-S 퍼지모델은 시스템 행렬의 볼록 합(Convex Combination)으로 표현되며 많은 비선형 상태방정식을 표현할 수 있다.

문헌 [15]-[17]에서는 T-S 퍼지모델을 기반으로 한 AMB 시스템의 제어기법에 대해 선구적인 연구가 이루어졌다. 그들은 비선형 AMB 시스템을 성공적으로 T-S 퍼지모델로 바꾸었으며 LMI를 사용하여 퍼지모델기반 상태되먹임 제어를 설계하였다. 하지만 T-S 퍼지모델을 얻는 과정에서 테일러전개를 사용하였기 때문에 유도된 퍼지모델은 비선형 시스템을 정확히 표현하지 못하는 근사화 모델이 뿐만이 아니라 상태방정식에 상수벡터항이 존재하는 아파인(Affine) 시스템의 형태가 되기 때문에 LMI를 이용해 다루기에 어려운 점이 많다. 이러한 문제를 해결하려면 구간비선형기법(Sector Nonlinearity Concept, [2])을 사용하여 정확한 퍼지모델을 유도하고, 또한 유도된 모델은 상태방정식에 상수벡터항이 존재하지 않는 동차(Homogeneous) T-S 퍼지모델이 되어야 한다. 하지만 AMB 시스템은 제어입력이 2차다항식 형태의 비선형성을 가지고 있기 때문에 T-S 퍼지모델로 구현할 수 있는 범위의 밖에 있다. 즉 비선형 입력을 갖는 시스템을 T-S 퍼지모델로 바꾸기 위해서는 전반부변수에 입력이 포함 되어야 하며 일반적으로 T-S 퍼지모델은 전반부변수에 입력이 포함되는 것을 허용하지 않는다. 이러한 문제를 해결하기 위해서는 입력에 대해서만 테일러전개를 사

\* 준 회원 : 연세대학교 전기전자공학과 석사과정

\*\* 시니어회원 : 연세대학교 전기전자공학과 교수

\*\*\* 준 회원 : 군산대학교 전자정보공학부 석사과정

† 교신저자, 시니어회원 : 군산대학교 제어로봇시스템공학과 정교수

E-mail : yhjoo@kunsan.ac.kr

접수일자 : 2010년 1월 4일

최종완료 : 2010년 1월 30일

용하여 선형화 하는 방법이 있다. 하지만 이렇게 할 경우 비선형 시스템을 정확히 표현 할 수 없고 또다시 선형제어 기법을 사용할 때와 같은 단점들이 발생한다.

본 논문에서는 polytopic quasi-LPV(Linear Parameter Varying) 모델 형태로 AMB 시스템을 다시 표현한다 [20]. Polytopic quasi-LPV 시스템은 T-S 퍼지모델과 유사하지만 시스템행렬의 블록 합을 구성할 때 쓰이는 비선형 가중함수에 입력이 포함되는 것을 허용할 수 있으며 또한 T-S 퍼지모델과 마찬가지로 비선형 시스템을 정확히 표현할 수 있다. 우선적으로 우리는 비선형 가중함수에 입력이 포함된 것을 가정하고 polytopic quasi-LPV 모델이나 T-S 퍼지모델에 대한 기존의 제어기법을 사용하여 비선형 제어를 구현할 수 있다. 그 후 제어입력을 얻는 과정은 가중함수에도 입력이 포함되어 있기 때문에 일반적인 T-S 퍼지모델이나 polytopic quasi-LPV 모델의 그것과 달리 대수적인 조작을 거쳐서 구해질 수 있다. 본 논문에서 제안하는 기법은 입력이 다항식형태의 비선형성질을 가지고 있는 비선형 시스템을 제어할 때 효과적이며 특히 본 논문에서 다루고자 하는 비선형 AMB 시스템에 매우 효과적이다.

### 2. Polytopic Quasi-LPV 모델 소개

다음의 연속시간 비선형 시스템을 고려하자:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \quad (1)$$

여기서  $x(t) \in R^n$ 는 상태 변수 벡터이고  $u(t) \in R^m$ 는 제어 입력이다. 연속시간 비선형 시스템 (1)은 다음의 식 (2)와 같은 연속시간 polytopic quasi-LPV 모델로 표현 가능하다:

$$\dot{x}(t) = A(\theta(t))x(t) + B(\theta(t))u(t) \quad (2)$$

여기서

$$A(\theta(t)) := \sum_{i=1}^N \theta_i(t) A_i, \quad B(\theta(t)) := \sum_{i=1}^N \theta_i(t) B_i$$

이며  $\theta(t) := [\theta_1(t) \theta_2(t) \dots \theta_N(t)] \in R^N$ 는 다음에 정의된 unit simplex  $A$ 에 속한다:

$$A := \left\{ \lambda \in R^N : \sum_{i=1}^N \lambda_i = 1, 1 \geq \lambda_i \geq 0 \right\}.$$

본 논문에서  $\theta_i(t), i=1, 2, \dots, N$ 는 상태 변수 벡터  $x(t)$ 와 제어입력  $u(t)$ 를 포함하는 비선형 함수로 가정 한다. 본 논문의 목적은 (1)을 안정화 하기위한 다음과 같은 상태 피드백 제어를 설계하는 것이다:

$$u(t) = F(\theta(t)) := \sum_{i=1}^N \theta_i(t) F_i. \quad (3)$$

시스템 (2)와 (3)의 폐루프 시스템은 다음과 같이 표현 된다:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(\theta(t))x(t) + B(\theta(t))F(\theta(t))x(t) \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \theta_i(t)\theta_j(t)(A_i + B_i F_j)x(t) \end{aligned} \quad (4)$$

### 3. AMB 시스템과 Polytopic Quasi-LPV 모델

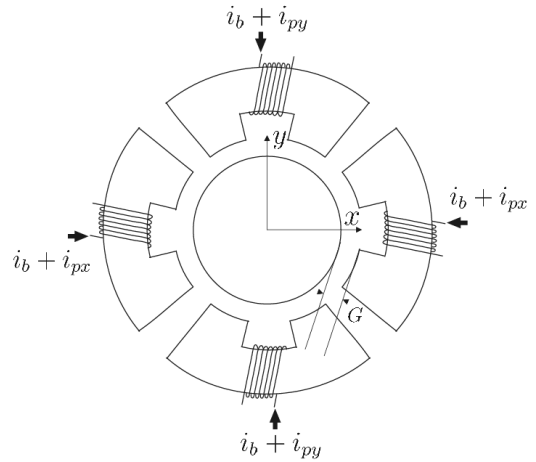


그림 1 AMB의 단면  
Fig. 1 Cross section view of AMB.

본 절에서는 AMB 시스템과 그것의 polytopic quasi-LPV 모델에 관하여 다룬다. 여기서 다루고자 하는 AMB 시스템은 대칭구조를 갖고 2축으로 제어되는 수직축 AMB 시스템이며 [15]-[17] 그 구조는 그림 1에 나타내었다. 이 그림에서  $x$ 축 방향과  $y$ 축 방향은 독립적으로 제어가 가능하기 때문에 우리는 일반성을 잃지 않고 단지  $x$ 축 방향의 동적 방정식에 초점을 맞출 것이다. 회전자에 가해지는 자기력은 [17]과 [18]에서와 같이 근사적으로 다음과 같이 표현될 수 있다:

$$F_x(t) = k \frac{(i_b + i_p(t))^2}{(G - \beta x_1(t))^2} - k \frac{(i_b - i_p(t))^2}{(G + \beta x_1(t))^2} \quad (5)$$

여기서  $i_p(t)$ 는 제어전류(Control Current),  $i_b$ 는 편향전류(Bias Current),  $x(t)$ 는 회전자의 변위(Rotor Displacement),  $k$ 는 힘상수(Force Constant),  $G$ 는 베어링 중심위치에서의 공극(Nominal Air Gap), 그리고  $\beta$ 는 공극에 따른 민감도(Sensitivity of Air Gap to Shaft Displacement)를 나타낸다. 각 파라미터들의 값은 표 1에 나타나 있다.

표 1 AMB의 물리적 파라미터들의 값

Table 1 Physical parameters of AMB

Symbols	Values
$k$	$5.3379 \times 10^{-6} \mathcal{N}(m^2/A^2)$
$\beta$	0.974
$i_b$	0.3A
$G$	$5.08 \times 10^{-4} m$

식 (5)는 회전자의 변위와 속도로 다시 표현 될 수 있다.  $x_1(t) = x(t)$ ,  $x_2(t) = \dot{x}(t)$ , 그리고  $u(t) = i_p(t)$ 로 표기 하도록 하자. 그러면 AMB의 동적 방정식은 다음의 상태 방정식으로 표현될 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{4ki_b^2 G\beta}{m} \left( \frac{1}{(G-\beta x_1(t))^2 (G+\beta x_1(t))^2} \right) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k}{m} \left( 2i_b \left( \frac{1}{(G-\beta x_1(t))^2} + \frac{1}{(G+\beta x_1(t))^2} \right) + u(t) \left( \frac{1}{(G-\beta x_1(t))^2} - \frac{1}{(G+\beta x_1(t))^2} \right) \right) \end{bmatrix} u(t) \quad (7)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = \frac{k}{m} \left( \frac{(i_b + u(t))^2}{(G - \beta x_1(t))^2} - \frac{(i_b - u(t))^2}{(G + \beta x_1(t))^2} \right) \end{cases} \quad (6)$$

다시 한번, 간단한 대수적인 조작을 통해서 식 (6)은 다음페이지 상단의 식 (7)과 같이 표현 될 수 있다. 이 비선형 상태 방정식을 (2)와 같은 polytopic quasi-LPV 모델로 바꾸기 위해 (7)에 나타난 비선형 항들을 다음과 같이 치환 한다.

$$\begin{aligned} \sigma_1(t) &:= \frac{1}{(G - \beta x_1(t))^2 (G + \beta x_1(t))^2}, \\ \sigma_2(t) &:= 2i_b \left( \frac{1}{(G - \beta x_1(t))^2} + \frac{1}{(G + \beta x_1(t))^2} \right) \\ &\quad + u(t) \left( \frac{1}{(G - \beta x_1(t))^2} - \frac{1}{(G + \beta x_1(t))^2} \right). \end{aligned}$$

그러면 다음과 같은 상태 방정식을 얻는다.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{4ki_b^2 G\beta}{m} \sigma_1(t) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k}{m} \sigma_2(t) \end{bmatrix} u(t).$$

만약 위에서 정의한 비선형항들이 적당한 꼭지점의 볼록합으로 표현 될 수 있다면 우리는 비선형 시스템 (6)을 정확하게 표현할 수 있는 polytopic quasi-LPV 모델 (2)를 얻을 수 있다. 이를 위해  $\sigma_1(t)$ 와  $\sigma_2(t)$ 의 최대값과 최소값을  $(x_1(t), u(t)) \in V \times W$ ,  $V := [-2.54 \times 10^{-6}, 2.54 \times 10^{-6}]$ ,  $W := [-0.3, 0.3]$ 의 범위에서 구하면 다음과 같다:

$$\begin{aligned} \max_{x_1(t) \in V} \sigma_1(t) &= 1.50163973390217 \times 10^{13} =: \bar{\sigma}_1 \\ \min_{x_1(t) \in V} \sigma_1(t) &= 1.501568506268019 \times 10^{13} =: \underline{\sigma}_1 \\ \max_{(x_1(t), u(t)) \in V \times W} \sigma_2(t) &= 4.672986784007260 \times 10^6 =: \bar{\sigma}_2 \\ \min_{(x_1(t), u(t)) \in V \times W} \sigma_2(t) &= 4.627693545020116 \times 10^6 =: \underline{\sigma}_2 \end{aligned}$$

위에서 계산된 최대값과 최소값을 이용하여 비선형 항  $\sigma_1(t)$ 와  $\sigma_2(t)$ 를 다음과 같이 표현한다고 하자.

$$\begin{aligned} \sigma_1(t) &= \bar{\sigma}_1 \mu_{11}(\sigma_1(t)) + \underline{\sigma}_1 \mu_{12}(\sigma_1(t)), \\ \sigma_2(t) &= \bar{\sigma}_2 \mu_{21}(\sigma_2(t)) + \underline{\sigma}_2 \mu_{22}(\sigma_2(t)), \end{aligned}$$

여기서  $\mu_{11}(\sigma_1(t))$ ,  $\mu_{12}(\sigma_1(t))$ ,  $\mu_{21}(\sigma_2(t))$ , 그리고  $\mu_{22}(\sigma_2(t))$ 는 다음의 성질을 만족한다.

$$\begin{aligned} \mu_{11}(\sigma_1(t)) + \mu_{12}(\sigma_1(t)) &= 1, \\ \mu_{21}(\sigma_2(t)) + \mu_{22}(\sigma_2(t)) &= 1. \end{aligned}$$

간단한 계산을 통해 위의 함수들은

$$\begin{aligned} \mu_{11}(\sigma_1(t)) &= \frac{\sigma_1(t) - \bar{\sigma}_1}{\underline{\sigma}_1 - \bar{\sigma}_1}, \quad \mu_{12}(\sigma_1(t)) = \frac{-\sigma_1(t) + \bar{\sigma}_1}{\underline{\sigma}_1 - \bar{\sigma}_1}, \\ \mu_{21}(\sigma_2(t)) &= \frac{\sigma_2(t) - \bar{\sigma}_2}{\underline{\sigma}_2 - \bar{\sigma}_2}, \quad \mu_{22}(\sigma_2(t)) = \frac{-\sigma_2(t) + \bar{\sigma}_2}{\underline{\sigma}_2 - \bar{\sigma}_2} \end{aligned}$$

와 같이 계산 되며 이를 통해 상태 방정식은

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{4ki_b^2 G\beta}{m} \sigma_1(t) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k}{m} \sigma_2(t) \end{bmatrix} u(t) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{4ki_b^2 G\beta}{m} \bar{\sigma}_1 \mu_{11}(\sigma_1(t)) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{4ki_b^2 G\beta}{m} \bar{\sigma}_1 \mu_{12}(\sigma_1(t)) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k}{m} \bar{\sigma}_2 \mu_{21}(\sigma_2(t)) \end{bmatrix} u(t) \\ &\quad + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k}{m} \bar{\sigma}_2 \mu_{22}(\sigma_2(t)) \end{bmatrix} u(t) \\ &= \mu_{11}(\sigma_1(t)) \mu_{21}(\sigma_2(t)) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{4ki_b^2 G\beta}{\bar{\sigma}_1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \\ &\quad + \mu_{11}(\sigma_1(t)) \mu_{22}(\sigma_2(t)) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{4ki_b^2 G\beta}{\bar{\sigma}_1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \\ &\quad + \mu_{12}(\sigma_1(t)) \mu_{21}(\sigma_2(t)) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{4ki_b^2 G\beta}{\underline{\sigma}_1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \\ &\quad + \mu_{12}(\sigma_1(t)) \mu_{22}(\sigma_2(t)) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{4ki_b^2 G\beta}{\underline{\sigma}_1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \\ &\quad + \mu_{11}(\sigma_1(t)) \mu_{21}(\sigma_2(t)) \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k}{\bar{\sigma}_2} \end{bmatrix} u(t) \\ &\quad + \mu_{12}(\sigma_1(t)) \mu_{21}(\sigma_2(t)) \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k}{\bar{\sigma}_2} \end{bmatrix} u(t) \\ &\quad + \mu_{11}(\sigma_1(t)) \mu_{22}(\sigma_2(t)) \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k}{\underline{\sigma}_2} \end{bmatrix} u(t) \\ &\quad + \mu_{12}(\sigma_1(t)) \mu_{22}(\sigma_2(t)) \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k}{\underline{\sigma}_2} \end{bmatrix} u(t) \end{aligned}$$

$$u(t) = \frac{f_1(x(t))}{f_2(x(t))} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} f_1(x(t)) &:= F_1x(t)(\sigma_1(t) - \bar{\sigma}_1)(2i_b\sigma_1(t)((G + \beta x_1(t))^2 + (G - \beta x_1(t))^2) - \bar{\sigma}_2) \\ &\quad - F_2x(t)(\sigma_1(t) - \bar{\sigma}_1)(2i_b\sigma_1(t)((G + \beta x_1(t))^2 + (G - \beta x_1(t))^2) - \underline{\sigma}_2) \\ &\quad + F_3x(t)(-\sigma_1(t) + \underline{\sigma}_1)(2i_b\sigma_1(t)((G + \beta x_1(t))^2 + (G - \beta x_1(t))^2) - \bar{\sigma}_2) \\ &\quad - F_4x(t)(-\sigma_1(t) + \underline{\sigma}_1)(2i_b\sigma_1(t)((G + \beta x_1(t))^2 + (G - \beta x_1(t))^2) - \underline{\sigma}_2) \\ f_2(x(t)) &:= (\bar{\sigma}_1 - \underline{\sigma}_1)(\underline{\sigma}_2 - \bar{\sigma}_2) - \sigma_1(t)((G + \beta x_1(t))^2 - (G - \beta x_1(t))^2) \\ &\quad \times \{F_1x(t)(\sigma_1(t) - \bar{\sigma}_1) - F_2x(t)(\sigma_1(t) - \bar{\sigma}_1) + F_3x(t)(-\sigma_1(t) + \underline{\sigma}_1) - F_4x(t)(-\sigma_1(t) + \underline{\sigma}_1)\} \end{aligned}$$

와 같은 변환이 가능하다. 따라서 시스템 행렬과 비선형 가중함수

$$\begin{aligned} A_1 = A_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{4ki_b^2G\beta}{\sigma_1 - m} & 0 \end{bmatrix}, & A_3 = A_4 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{4ki_b^2G\beta}{\sigma_1 - m} & 0 \end{bmatrix}, \\ B_1 = B_3 &= \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k}{\sigma_2 - m} \end{bmatrix}, & B_2 = B_4 &= \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{k}{\sigma_2 - m} \end{bmatrix}, \\ \theta_1(t) &= \mu_{11}(\sigma_1(t))\mu_{21}(\sigma_2(t)), & \theta_2(t) &= \mu_{11}(\sigma_1(t))\mu_{22}(\sigma_2(t)), \\ \theta_3(t) &= \mu_{12}(\sigma_1(t))\mu_{21}(\sigma_2(t)), & \theta_4(t) &= \mu_{12}(\sigma_1(t))\mu_{22}(\sigma_2(t)) \end{aligned} \tag{8}$$

와 함께 polytopic quasi-LPV 모델 (2)를 얻는다.

**참고 1** : 위에서 얻어진 polytopic quasi-LPV 모델 (8)은 비선형 AMB 시스템 (6)을 콤팩트 집합  $(x_1(t), u(t)) \in V \times W$  상에서 정확히 표현한다.

#### 4. 제어기 설계

본 절의 목적은 앞선 3절에서 유도한 AMB 시스템의 polytopic quasi-LPV 모델을 안정화하는 제어기 (3)을 설계하는 것이다. polytopic quasi-LPV 모델의 제어기 설계는 사실상 LMI를 사용한 T-S 퍼지모델의 제어기 설계의 방법을 적용할 수 있다.

**정리 1** [4]: 선형 행렬 부등식 (9), (10), 그리고 (11)을 만족하는 양한정 대칭행렬  $Z$ , 행렬  $M_i$ ,  $Y_{ji} = Y_{ij}^T$ 이 존재하면 연속시간 페루프 polytopic quasi-LPV 모델 (4)는 제어기 (3)을 통해서 점근적으로 안정하다. 이때 제어기 이득은  $F_i = M_i Z^{-1}$ 로 주어진다.

$$\Omega_{ii} < X_{ii}, \tag{9}$$

$$\Omega_{ij} + \Omega_{ji} \leq Y_{ij} + Y_{ij}^T, \quad i < j \leq N, \tag{10}$$

$$\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \cdots & Y_{1N} \\ Y_{21} & Y_{22} & \cdots & Y_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{M1} & Y_{M2} & \cdots & Y_{NN} \end{bmatrix} < 0, \tag{11}$$

여기서  $i, j \in \{1, 2, \dots, N\}$ 이고

$$\Omega_{ij} := A_i Z + B_i M_j + (A_i Z + B_i M_j)^T.$$

정리 1로부터 양한정 대칭행렬  $Z$ , 행렬  $M_i$ 는 Matlab LMI Control Toolbox [19]를 이용하여 다음과 같이 구해진다:

$$\begin{aligned} Z &= \begin{bmatrix} 4.1492 & -5.3149 \\ -5.3149 & 13.6224 \end{bmatrix}, \\ M_1 &= [-2398.6435 \quad 3071.5650], \\ M_2 &= [-2375.3951 \quad 3041.7926], \\ M_3 &= [-2398.7567 \quad 3071.7099], \\ M_4 &= [-2375.5084 \quad 3041.9377]. \end{aligned}$$

이로부터 페루프 시스템 (4)의 점근 안정성을 보장하는 제어 이득 행렬은 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned} F_1 &= [-578.2628 \quad -0.1358], \\ F_2 &= [-572.6584 \quad -0.1348], \\ F_3 &= [-578.2901 \quad -0.1358], \\ F_4 &= [-572.6857 \quad -0.1348]. \end{aligned}$$

따라서 제어기는 (3)의 형태로 나타낼 수 있다. 하지만 한 가지 중요한 사실은 (3)의 양변에 모두 입력  $u(t)$ 가 포함되어 있다는 것이다. 따라서 실제적으로 구현을 할 경우  $u(t)$ 를 구하는 문제는 좀 더 고려될 필요성이 있다. 제어기를 구현하기 위해 아날로그 회로를 사용할 경우 양변의  $u(t)$ 의 신호단에 해당하는 선을 단락함으로써 구현이 가능하다. 만약 디지털 방식으로  $u(t)$ 를 구한다면 샘플링 시간  $T$ 가 매우 작아서  $u(t) \cong u(t - T)$  라는 가정 하에  $u(t)$  대신  $u(t - T)$ 를 사용하더라도 어느정도 만족할 만한 결과를 얻을 수 있다. 하지만 그렇게 할 경우 수학적으로 안정도를 완전히 보장할 수 없다. 본 연구에서는 간단한 대수적 조작을 통해서 정확한  $u(t)$ 를 구할 수 있음을 보인다. 식 (4)에서 간단한 대수적 조작을 통해서 스칼라 변수  $u(t)$ 에 대한 닫힌 형태의 식 (13) (페이지 상단)을 얻을 수 있다.

그림 2-4는 모의실험 결과를 나타낸다. 그림 1, 2로부터 우리는 시스템의 상태가 시간이 지남에 따라 0으로 점근 수렴함을 볼 수 있다. 그림 3은 제어 입력을 보여주며 제어 입력이  $u(t) \in [-0.3, 0.3]$ 의 범위에서 성공적으로 제어하고 있음을 볼 수 있다.

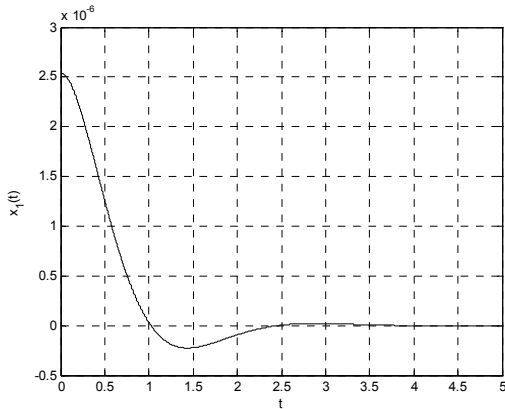


그림 2 시스템 상태 응답  $x_1(t)$ .  
 Fig. 2 System state response  $x_1(t)$ .

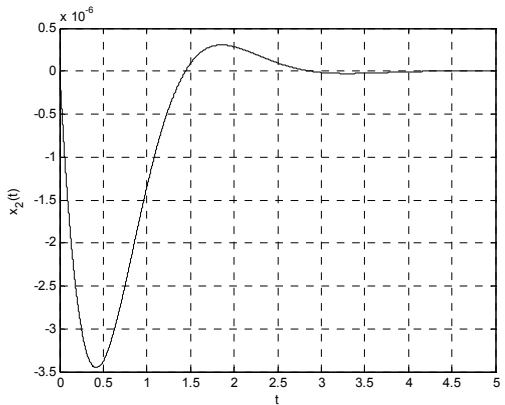


그림 3 시스템 상태 응답  $x_2(t)$ .  
 Fig. 3 System state response  $x_2(t)$ .

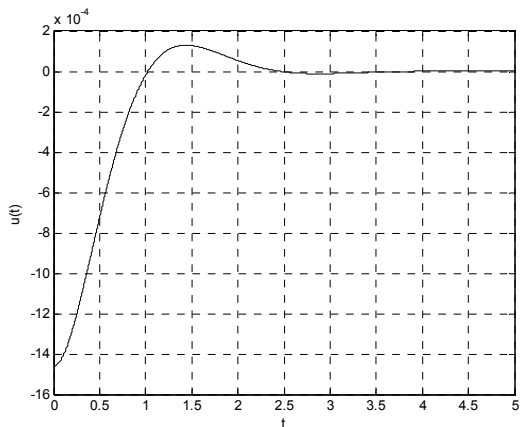


그림 4 제어 입력  $u(t)$ .  
 Fig. 4 Control input  $u(t)$ .

### 3. 결 론

본 논문에서는 비선형 입력을 갖는 비선형 AMB 시스템의 polytopic quasi-LPV 모델링과 이것을 기반으로 한 제어기 설계를 체계적인 방법으로 소개하였다. 우리는 해석적인

방법으로 비선형 AMB 시스템을 정확히 표현할 수 있는 polytopic quasi-LPV 모델을 유도하였으며 입력을 가중함수에 포함하는 방식을 통하여 비선형 특성을 갖는 입력을 효과적으로 다루었다. AMB 시스템을 안정화 하는 제어기 설계의 충분조건을 LMI 형태로 제시하였다. 제안된 제어기 설계 기법의 효용성을 검증하기 위하여 모의실험을 제시하였으며, 모의실험결과 제어 성능의 실효성을 확인할 수 있었다. 본 논문에서 제안된 방법은 비선형 입력을 갖는 시스템을 제어할 때 효과적이다. 본 논문이 다룬 AMB 시스템은 입력  $u(t)$ 가 2차 다항식 형태로 나타난다. 따라서 이 경우  $u(t)$ 의 값을 닫힌 형태의 유리함수로 나타내기에 매우 용이하다. 만약  $u(t)$ 가 3차 이상의 다항식으로 나타나는 경우  $u(t)$ 의 값을 구하기 위해서는 2차 이상의 방정식을 풀어야 하기 때문에 효용성이 떨어진다. 따라서 본 논문이 제안한 방법은 AMB와 같이  $u(t)$ 가 2차 다항식이하로 포함될 경우 효율적이다. 하지만 만약  $u(t)$ 가 3차 이상이거나 또는 다항식이 아닌 비선형 함수 꼴로 나타나더라도 테일러전개를 통해 2차 이하의 다항식으로 나타낸 후 본 논문의 방법을 적용한다면 여전히 유효한 방법이라고 말할 수 있다. 이렇게 할 경우 근사화 방법을 썼기 때문에 안정도를 완전히 보장하지 못하지만  $u(t)$ 에 대해 선형화한 경우 보다는 더 정확한 방법이라고 할 수 있다.

### 감사의 글

본 연구는 2008년 교육과학기술부의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 연구임(KRF-2009-220-D00034).

This work has been supported by Yonsei University Institute of TMS Information Technology, a Brain Korea 21 program, Korea.

### 참 고 문 헌

- [1] T. Takagi and M. Sugeno, "Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control," IEEE Trans. Syst., Man, Cybern. B, Cybern., vol. 15, no. 1, pp. 116-132, 1985.
- [2] K. Tanaka and H. O. Wang, Fuzzy Control Systems Design and Analysis, Ed. John Wiley and Sons, New York, USA, 2001.
- [3] E. Kim and H. Lee, "New approaches to relaxed quadratic stability condition of fuzzy control systems," IEEE Trans. Fuzzy Syst., vol. 8, no. 5, pp. 523-534, 2000.
- [4] X. Liu and Q. Zhang, "Approaches to quadratic stability conditions and  $H_\infty$  control designs for T-S fuzzy systems," IEEE Trans. Fuzzy Syst., vol. 11, no. 6, pp. 830-839, 2003.
- [5] K. Tanaka and T. Kosaki, "Design of a Stable Fuzzy Controller for an Articulated Vehicle," IEEE Trans. Syst., Man, Cybern. B, Cybern., vol. 27, no. 3,

pp. 552-558, 1997.

[6] R. R. Humphris, R. D. Kelm, D. W. Lewis, and P. E. Allaire, "Effect of control algorithms on magnetic journal bearing properties," J. Eng. Gas Turbines Power, vol. 108, no. 4, pp. 624-632, 1986.

[7] R. Stanway and J. O'Reilly, "State variable feedback control of rotor-bearing suspension system," in Proc. 3rd International Conference on Vibrations in Rotation Machinery, vol. C274/84, pp. 515-524, 1984.

[8] J. Boehm, R. Gerber, J. R. Hartley, and S. Whitley, "Development of active bearing for high speed rotors," IEEE Trans. Magnetics, vol. 26, no. 5, pp. 2544-2546, 1990.

[9] H. Bleuler, D. Vischer, G. Schweitzer, A. Traxler, and D. Zlatnik, "New concept for cost-effective magnetic bearing control," Automatica, vol. 30, no. 5, pp. 871-876, 1994.

[10] A. E. Rundell, S. V. Darkunov, and R. A. DeCarlo, "A sliding mode observer and controller for stabilization of rotational motion of a vertical shaft magnetic bearing," IEEE Trans. Contr. Syst. Technol., vol. 4, no. 5, pp. 598-608, 1996.

[11] R. D. Smith and W. F. Weldon, "Nonlinear control of a rigid rotor magnetic bearing system: Modelling and simulation with full state feedback," IEEE Trans. Magnetics, vol. 31, no. 2, pp. 973-980, 1995.

[12] J. Y. Hung, "Nonlinear control of a electromagnetic systems," in Proc. 17th Annu. Conf. IEEE Ind. Electron. Soc., pp. 268-273, 1991.

[13] C. T. Hsu and S. L. Chen, "Nonlinear control of a 3-pole active magnetic bearing system," Automatica, vol. 39, no. 2, pp. 291-298, 2003.

[14] K. Y. Lum, V. T. Coppola, and D. S. Bernstein, "Adaptive auto-centering control for an active magnetic bearing supporting a rotor with unknown mass imbalance," IEEE Trans. Contr. Syst. Technol., vol. 4, no. 5, pp. 587-597, 1996.

[15] S. K. Hong and R. Langari, "Fuzzy modelling and control of a nonlinear magnetic bearing system," J. Intell. Fuzzy Syst., vol. 7, no. 4, pp. 335-346, 1999.

[16] S. K. Hong and R. Langari, "Robust fuzzy control of magnetic bearing system subject to harmonic disturbances," IEEE Trans. Contr. Syst. Technol., vol. 8, pp. 366-371, 2000.

[17] S. K. Hong and R. Langari, "An LMI-based  $H_\infty$  fuzzy control system design with TS framework," Inform. Sci., vol. 123, pp. 163-179, 2000.

[18] E. H. Maslen, P. Hermann, M. Scott, and R. R. Hunohris, "Practical limits to the performance of magnetic bearings: Peak force, slew rate and displacement sensitivity," ASME J. Tribology, vol. 111, pp. 331-336, 1989.

[19] P. Gahinet, A. Nemirovski, A. J. Laub, and M.

Chilali, LMI Control Toolbox, Natick, MA: MathWorks, 1995.

[20] F. Wang and B. Balakrishnan, "Improved stability analysis and gain-scheduled controller synthesis for parameter-dependent systems," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. 47, pp. 720-734, 2002.

## 저 자 소 개



### 이 동 환 (李 東 桓)

2008년 건국대학교 전기전자과 졸업. 현재 연세대학교 전기전자공학과 석사과정. 관심분야는 지능 제어, 모델링, 비선형 제어 등

Tel : 02-2123-2773

E-mail : hope2010@yonsei.ac.kr



### 박 진 배 (朴 珍 培)

1997년 연세대학교 전기공학과 졸업. 1985-1990년 Kansas State University 전기 및 컴퓨터 공학과 졸업(박사). 1990-1991년 Kansas State University 전기 및 컴퓨터 공학과 조교수. 현재 연세대학교 전기전자공학과 교수.

Tel : 02-2123-2773

E-mail : jbpark@yonsei.ac.kr



### 정 현 석 (丁 炫 碩)

1984년 12월생. 2009년 군산대 전기전자 제어학과 졸업. 2009년~현재, 동 대학원 전기전자제어학과 석사과정. 관심분야는 지능형 로봇, 인간-로봇 상호작용, 비전 등.

Tel : 063-469-4706

E-mail : kacaco@kunsan.ac.kr



### 주 영 훈 (周 永 焄)

1958년 6월생. 1982년, 1984년, 1995년 연세대학교 전기공학과 졸업 (공학사, 공학석사, 공학박사). 1986-1995년 삼성전자(주) 생산기술센터 팀장, 1995년~현재 군산대학교 전자정보공학부 정교수. 1998~1999년 미국 휴스턴대학 박사후박사, 2009년 한국지능시스템학회 회장, 현재, 대한전기학회 정보제어부문회 편집위원장,

Tel : 063-469-4706

E-mail : yhjoo@kunsan.ac.kr