
컴퓨터 대수와 베이지언 추론망을 이용한 이공계 수학용 적응적 e-러닝 시스템 개발

Development of an Adaptive e-Learning System for Engineering Mathematics using
Computer Algebra and Bayesian Inference Network

박홍준*, 전영국**

순천대학교 대학원 컴퓨터과학과*, 순천대학교 컴퓨터교육과**

Hong-Joon Park(hjpark@sunchon.ac.kr)*, YoungCook Jun(ycjun@sunchon.ac.kr)**

요약

본 논문에서는 컴퓨터 대수 시스템을 기반으로 하는 웹 저작 환경과 베이지언 추론망을 적용한 학습자 진단 환경이 포함된 이공계 수학용 적응적 이러닝 시스템 개발에 대하여 소개하였다. 본 시스템을 활용하면 교수자는 컴퓨터 대수 시스템을 수식처리 엔진으로 하며 웹을 인터페이스로 하는 이공계 수학용 웹 콘텐츠를 쉽게 생성할 수 있다. 구체적으로 선형대수, 미분방정식 및 이산수학의 영역에서 콘텐츠 개발의 예를 소개하였다. 또한 학습자의 지식 영역별 수준을 조건부 확률을 이용한 통계적 추론에 의해 진단하여 그 결과에 따라 피드백을 생성하는 적응적 이러닝 웹 콘텐츠를 만들 수 있다. 본 시스템을 사용하여 개발한 이공계 수학용 웹 콘텐츠를 평가하기 위하여 그 결과물을 대학 강의에 적용하였고, 설문지 조사를 통하여 콘텐츠 사용에 대한 학습자의 반응을 평가하였다.

■ 중심어 : | 온라인 저작 | 이러닝 시스템 | 컴퓨터 대수 시스템 | 베이지언 추론망 |

Abstract

In this paper, we introduce an adaptive e-Learning system for engineering mathematics which is based on computer algebra system (Mathematica) and on-line authoring environment. The system provides an assessment tool for individual diagnosis using Bayesian inference network. Using this system, an instructor can easily develop mathematical web contents via web interface. Examples of such content development are illustrated in the area of linear algebra, differential equation and discrete mathematics. The diagnostic module traces a student's knowledge level based on statistical inference using the conditional probability and Bayesian updating algorithm via Netica. As part of formative evaluation, we brought this system into real university settings and analyzed students' feedback using survey.

■ keyword : | On-Line Authoring | e-Learning System | Computer Algebra System | Bayesian Inference Network |

* 본 논문은 2006년도 정부재원(교육인적자원부 학술연구조성사업비)으로 한국학술진흥재단의 지원을 받아 연구되었습니다 (KRF-2006-311-D00199).

접수번호 : #080104-001

접수일자 : 2008년 01월 04일

심사완료일 : 2008년 04월 29일

교신저자 : 전영국, e-mail : ycjun@sunchon.ac.kr

I. 서론

최근 대학 입시 전형이 다양해지면서 실제 이공계 대학 진학생 중에 미적분 등 이공계 수학을 위해 필요한 기본적인 선수학습이 결여된 학생의 비율이 커지고 있다[1]. 이는 고등수학 학습을 통하여 응용과 연구 개발에 필요한 지식을 학습하여야 할 대학교육에서 커다란 걸림돌로 지적되고 있다. 그러므로 대학들은 이들 문제를 해결하기 위해 기초 과목 특히 수학과목에 대한 진단 평가를 실시하여 부족한 경우 신입생들에게 강제적으로 기초 과목을 선수하도록 지도하고 있는 실정이다. 이때 가장 유용하게 사용될 수 있는 수업 방식이 바로 이러닝 시스템에 의한 원격 학습인데, 수많은 이러닝 솔루션과 콘텐츠가 넘쳐나는 현실 속에서 수학용 이러닝 솔루션과 서비스는 그 형태를 찾아보기가 어렵다.

이러한 수학용 이러닝 솔루션의 부재 현상의 가장 큰 원인은 수학용 웹 콘텐츠를 만들기 위한 기술적인 문제들이 다수 존재하기 때문이다. 첫째, 수학용 웹 콘텐츠 제작의 기술적 어려움 중 하나는 수식과 수학기호의 표현이다. MathML, OpenMath 등의 표준화 작업에도 불구하고 여전히 수학 교사나 학습자들에게는 수식을 웹 상에서 표현하는 것은 여러 단계를 거쳐야 하는 어려운 과정으로 인식된다. 둘째, 일반 웹 콘텐츠와 달리 수학용 웹 콘텐츠가 동적으로 작동 가능하기 위해서는 수식 처리에 관한 계산엔진이 필요하다는 것이다. 셋째, 선수 관계가 명확하고 문제에 대한 지식의 연계성이 큰 수학 문제에 대한 평가 방법이 미흡하다는 것이다.

본 연구에서는 이러한 기술적인 문제를 모두 해결한 이러닝 시스템을 개발하고 이를 이용한 이공계 수학용 콘텐츠를 만들어 실제 수업에서 활용한 후 학습자들의 반응을 조사하였다.

II. 관련 연구

1. 컴퓨터 대수 시스템 기반 저작 모델

본 연구에서는 이공계 학습용 수학 콘텐츠 개발을 위한 수식 처리 엔진으로 기존의 컴퓨터 대수 시스템(Computer Algebra System)을 사용하였다. 컴퓨터 대

수 시스템이란 일반적으로 컴퓨터를 이용하여 수학에 관련된 문제를 기호로 처리하여 연산을 수행하는 시스템으로, 수치 계산과 대수적 연산을 수행하고 필요한 경우에 연산의 결과를 그래픽으로 처리하는 소프트웨어로 주요 제품으로는 Maple, Mathematica, Matlab 등이 있다.

컴퓨터 대수 시스템을 활용한 콘텐츠 저작 방법은 앞서 논의한 웹에서의 수학 기호 표시와 웹을 통하여 수식 처리 엔진을 이용하는데 있어서의 어려움을 쉽게 해소해 주는 장점이 있어 여러 연구가 이루어졌다. 송기홍[16]은 플래시를 사용한 수식 표현과 이를 동적으로 처리하기 위해 Mathematica를 연동하는 연구를 수행하였다. 영국의 대표적인 수학용 온라인 학습 시스템인 WALLIS[12]의 경우는 수식의 표현과 수식의 처리를 모두 컴퓨터 대수 시스템과 연동하도록 개발하여 수식의 표현과 동적 처리라는 두 가지 문제를 해결하였다. 그러나 이 시스템은 수학의 특성상 학습 내용의 위계가 확연히 구분되는 이러닝 시스템 개발에서 학습자의 진단평가에 관한 기능이 미흡하다는 단점을 가지고 있었다. 이 외에도 Johnson county Community college의 웹매스매티카를 활용한 교육 예제 사이트(<http://math.jccc.net:8180/webMathematica/JSP/swilson/matrix2.jsp>)는 기하분야에서 2차원 행렬 변환에 대한 예제 등 수학과 관련된 콘텐츠 개발의 사례를 보여준다.

본 연구는 웹에서의 수식 표현과 동적 처리를 컴퓨터 대수 시스템과 연동하였을 뿐만 아니라 베이지언 추론망을 활용하여 학습자의 지식 내용의 선후 관계를 표현하고 이를 토대로 평가를 수행 할 수 있다는 점에서 기존의 시스템과 구별된다.

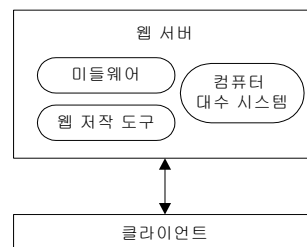


그림 1. 컴퓨터 대수 시스템을 사용한 웹 콘텐츠 저작 시스템의 구조

[그림 1]은 최근 제안된 컴퓨터 대수 시스템과 웹을 연동하는 모델[5]로 본 연구에서는 이 모델에 따라 수학적 콘텐츠 저작 시스템을 구성하였다. 이 모델은 서버에 컴퓨터 대수 시스템이 수식 처리 엔진으로 탑재되어 있고, 웹 서버와 컴퓨터 대수 시스템을 연결해 주는 미들웨어 그리고 컴퓨터 대수 시스템과 미들웨어의 특성에 맞게 개발된 전용 저작도구가 탑재되어 있다. 클라이언트에서는 웹 브라우저만으로 웹 서버의 전용 저작 도구에 접속하여 간단하게 동적 수학적 웹 콘텐츠를 저작할 수 있고 이렇게 만들어진 콘텐츠는 바로 웹 서버에 저장되어 컴퓨터 대수 시스템과 연동되어 동적인 상호작용이 가능한 웹 콘텐츠로 동작 된다.

2. 베이저언 추론망의 교육적 활용

베이저언 추론망은 변수를 표현하는 정점(vertex) 혹은 노드(node)와 변수들 간의 관계를 표현하는 에지(edge) 혹은 링크(link)로 구성된 방향성 비순환 그래프로 베이저언 정리의 응용을 도식화 할 수 있도록 해주는 수학적 도구이다[7]. 베이저언 망을 사용하여 내용 요소를 노드로 내용 요소간의 관계를 노드 간의 사전확률로 표현하면 평가와 진단을 위한 모델을 구성할 수 있다[8].

상호 관련 있는 변인들 간의 복잡한 관계를 베이저언 추론망을 도구로 추론하는 방법은 여러 분야에서 널리 적용되고 있다. 특히 다양한 변수들이 얽혀있는 상황에서 중요한 의사 결정을 해야 하는 의학과 경영학 등에서는 베이저언 통계에 의한 추론은 이미 보편적으로 사용되고 있다. 컴퓨터 시스템이 마치 인간 교사처럼 학습자의 수준이나 요구를 반영하여 적응적으로 학습 콘텐츠 및 학습 활동을 제공하기 위해서는 인간이 가지고 있는 인지, 판단, 지식의 생산과 재구성 등의 능력이 요구되는데 이를 적용하기 위해 여러 가지 인공지능 기법이 이용된다. 이 중 특히 베이저언 추론망을 적용한 연구가 많은데, 그 대표적인 예로는 독일 DFKI의 주도하에 개발하고 있는 AcitveMath[9], VanLehn이 이끄는 그룹에 의해 만들어졌던 POLA[10], POLA를 사용한 튜터링 시스템인 Andes[11]등이 있다.

이처럼 베이저언 추론망에 의한 적응적 이러닝 시스

템이 많은 이유는 기존의 평가 방법이 가지고 있는 문제점인 지식 요소간의 관계에 대한 기술이 가능할 뿐만 아니라 다른 인공지능 기법에 비하여 간단하게 적용할 수 있다는 장점이 있으며, 무엇보다도 수학적 배경을 토대로 학문적으로 체계적인 연구가 이루어지고 있기 때문이다.

베이저언 추론망 모델의 응용 연구 중에는 주어진 변인들의 관찰치를 조건으로 선택된 몇몇의 변인들의 분포를 얻어내려 하는 연구가 대표적이다[2]. 예를 들면, 이러닝 시스템과 관련해 보면 기존 학습자들의 주어진 특성을 통하여 이후의 학습자들의 특성을 추론하거나, 주어진 패턴이나 검사결과를 가지고 현재의 학습자의 상태의 확률을 베이저언 추론 방법을 통하여 추론하는 것이다.

Mislevy는 ETS에서 방대한 학습자 자료를 가지고 이러한 연구를 심도 있게 수행하였고, 최근에 그는 Roy Levy와 함께 시스코(Cisco)사의 시스템 관리자 교육을 위한 연구를 통하여 베이저언 학습자 모델을 정련하고 다듬는 연구[13]를 실시하여 NetPass라는 시스템에 적용하기도 하였다.

이외에도 베이저언 추론에 의한 사용자 모델은 지식 진단[14], ITS의 적응적 제시를 위한 사용자 모델[15] 등에서도 활발히 연구가 이루어지고 있다.

III. 시스템의 구성

1. 컴퓨터 대수 시스템 기반 저작 환경

컴퓨터 대수 시스템 기반 저작 환경은 수식의 표현과 처리 그리고 사용자와 상호작용이 가능한 동적인 콘텐츠를 온라인으로 저작하는 것이 가능하도록 해 주는데, 이에 필요한 요소들로는 웹 서버, 수식처리 엔진, 웹 서버와 수식처리 엔진을 연결해 주는 미들웨어, 미들웨어와 웹 서버 특성에 맞게 특화된 전용 저작 도구가 있다.

아래 [표 1]은 컴퓨터 대수 시스템 기반 콘텐츠 저작 환경을 구현하기 위해 선택한 컴퓨터 대수 시스템 관련 환경이다. 수학적 온라인 콘텐츠 저작 시스템의 핵심적인 부분이며 본 사례를 다른 관련 연구에 응용할 수 있

도록 주요 내용을 정리하였다.

표 1. 컴퓨터 대수 시스템 기반 저작 환경 구성

	분류	제품명
컴퓨터 대수 시스템 구성	자바	J2SDK(Java2 version 1.6.0)
	컴퓨터 대수 시스템	매프매티카 5.1
	미들웨어	webMathematica 2.0
	서블릿 컨테이너	Tomcat 4.1

수학용 웹 콘텐츠 저작 환경의 주요 요소인 전용 저작 도구인 phpMath를 사용하면 Mathematica 기반의 이공계 수학학습용 콘텐츠를 쉽게 생성할 수 있다[5]. 교수가 콘텐츠의 제목, 내용, 동적 연산을 위한 컴퓨터 대수 시스템 코드를 입력하고 생성 버튼을 누르면 수학용 동적 웹 콘텐츠가 자동 생성된다.

[그림 2]는 본 이러닝 시스템에 의해 제작된 수학 전용 이러닝 서비스 MathHunter의 화면이다. 여러 이공계 대학 수학 콘텐츠 중 미분방정식에 관한 내용을 다룬 페이지가 보여지고 있다. 전용 저작 도구로 생성한 콘텐츠가 [그림 2]의 오른쪽 프레임에 사용되어 있는데, 학습자가 미분방정식의 개념을 확인할 수 있는 동적 예제로 제작되어 다양한 수식과 원하는 값으로 시험해 볼 수 있어 응용력 배양에도 효과가 있다.

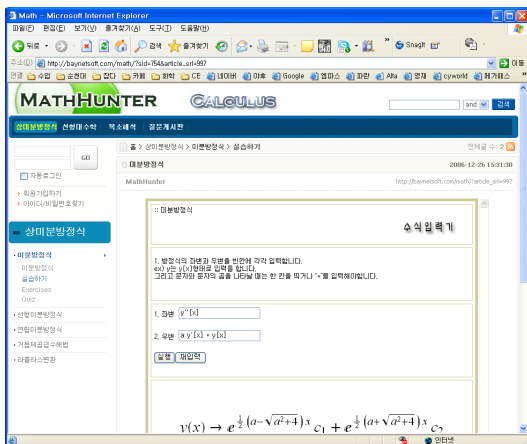


그림 2. 이공계 수학 전용 수학 사이트 MathHunter

컴퓨터 대수 시스템 기반 저작 환경에 포함 될 전용 저작 도구 개발을 위해서는 컴퓨터 대수 시스템에 대한 이해와 미들웨어가 컴퓨터 대수 시스템과 통신하는 방식, 그리고 HTML 문서 내에 전용 스크립트를 임베딩 하기 위한 서버 페이지 기술에 대한 심층적인 연구가 요구된다.

[그림 3]은 본 시스템의 컴퓨터 대수 시스템 기반 저작 도구의 내부 동작 순서도로 저작 도구에 접속하여 인터페이스에 원하는 Mathematica 코드와 그 페이지에서 설명하거나 연습시키고자 하는 내용에 관한 해설을 입력하고 생성버튼을 눌러 실행시키면, 저작 도구는 컴퓨터 대수 시스템 코드를 분석하고, 이를 미들웨어 스크립트로 번역, HTML 템플릿에 포함시켜 동적으로 작동하는 수학용 웹 콘텐츠를 서버측에 생성한다.

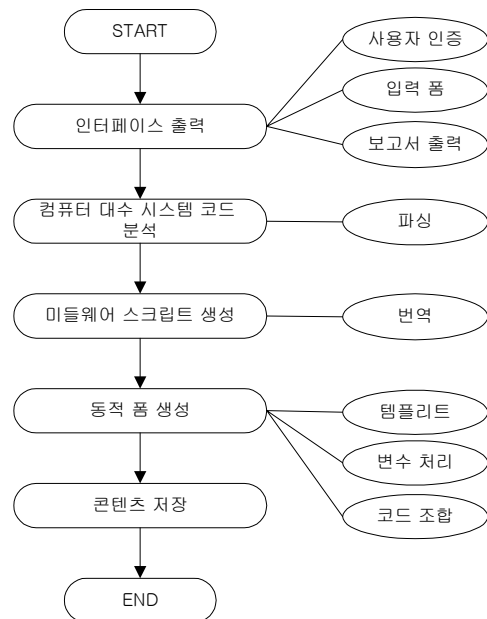


그림 3. 전용 저작 도구의 내부 동작

2. 베이지언 추론망 기반 적응적 개발 환경

인공지능의 여러 기법 중에서 베이지언 추론망을 활용하는 가장 큰 이유는 확률과 통계라는 수학적인 도구를 기반으로 하기 때문에 다른 인공지능 도구에 비하여 그 추론 과정이 비교적 논리적이어서, 이성적으로 납득

할 만한 결과를 산출하기 때문이다. 그리고 네트워크의 요소인 각각의 노드들에 대한 정보가 개방되어 필요에 따라 그 정보를 다룰 수 있다는 강점도 있다. 예를 들면 역전파 신경망과 같은 뉴럴 네트워크(neural network) 기반의 인공지능 도구는 여러 특징들에 대한 훈련 데이터를 토대로 상당한 학습과정을 거쳐 최종적으로 훈련을 마친 네트워크가 판단 결과를 내어 놓는데 그 값은 분류나 결정을 위한 자료로는 사용되어지나 각 노드가 가지고 있는 계산 값들은 우리에게 중요한 의미나 단서를 주지 못한다. 이런 이유로 뉴럴 네트워크를 학습자 모델에 응용하는 연구[3]는 최근은 물론 과거의 연구에서도 그 예를 찾기가 매우 힘들다.

반면 베이지언 추론망에서 계산된 노드들의 사후 확률은 그 자체가 통계적 의미를 가지기 때문에 이를 개별적인 지식 요소들에 대한 사후 확률로 이용이 가능하다. 그러므로 실제 베이지언 추론망의 응용은 교육 분야에서 매우 다양하게 활용[17][18]하고 있으며 이를 위해서 개발된 많은 패키지와 연구 결과들이 있다. 하지만 정작 이를 필요로 하는 학습자, 혹은 사용자 진단이 요구되는 분야에서 비전문가도 쉽게 베이지언 추론망에 의해 추론 결과를 동적으로 보여주는 웹 형태의 온라인 평가 시스템에 관한 연구는 매우 부족하다.

베이지언 추론망에 의한 학습자 모델은 곧바로 해당 학습 영역에 대한 학습자 진단 시스템이 된다. 이러한 베이지언 추론망 기반의 학습자 진단 시스템의 내부 구조는 기존 연구[19]를 통하여 알 수 있으며, 이를 활용하여 사용자의 지식 이해 정도에 맞추어 피드백을 생성하는 맞춤형 저작 환경을 개발할 수 있다. 이를 위하여 학습자에게 요구되는 지식 혹은 기술을 교수자가 선별하여 각각의 노드로 표현하고 이들 지식이나 기술의 선후 관계를 화살표를 사용하여 도식화 한 후 해당 노드간의 조건부 확률을 입력하여 모델을 정하면 된다.

베이지언 추론망을 이용한 학습자 모델을 만드는 과정은 [그림 4]와 같다. 각 단계를 자세히 살펴보면 아래와 같다.

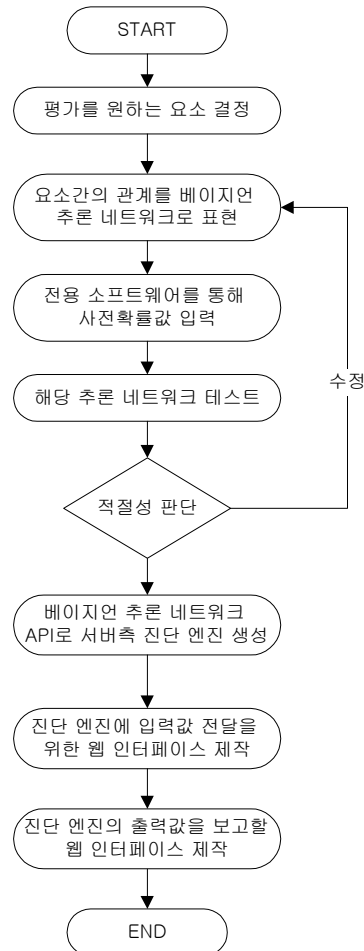


그림 4. 학습자 진단 시스템 개발 과정도

- 1) 교수자가 평가하려는 지식 요소를 결정한다.
- 2) 지식 요소간의 관계를 그래프로 표현하고 베이지언 추론망 소프트웨어를 사용하여 모델을 생성한다.
- 3) 베이지언 추론망 소프트웨어에 생성한 모델에 사전 확률 값을 입력한다. 본 연구에서는 사전에 만들어진 테이블을 이용하였다[20].
- 4) 베이지언 추론망 소프트웨어나 API 를 사용하여 네트워크를 테스트한다.
- 5) 테스트 과정을 통하여 설계한 모델이 학습자의 수준을 적절하게 진단하는지 판단하여 부족시 2)번 과정으로 회귀한다.
- 6) 모델이 결정되면 이 모델을 위한 시험 문제를 출

제하고 웹에서 추론 엔진으로 사용 될 베이지언 추론 모듈을 API로 제작한다.

위의 과정을 통하여 생성된 베이지언 추론망 기반 학습자 모델은 온라인 테스트의 결과를 통하여 최종 진단 보고서를 만들어내는 진단 엔진으로 사용된다. 결국 교수자와 개발자에 의해 만들어진 베이지언 추론망에 학습자가 온라인 시험지를 풀어 각각의 문제별 정오 정보를 입력데이터로 주면, 베이지언 추론망 기반의 진단용 학습자 모델은 그 입력데이터를 문제 요소에 해당하는 노드에 적용하여 네트워크를 재 컴파일하고 이로 인해 새롭게 업데이트 된 각각의 지식 및 기술 요소 노드들의 사후 확률을 학습 진단 보고서의 자료로 출력해 준다.

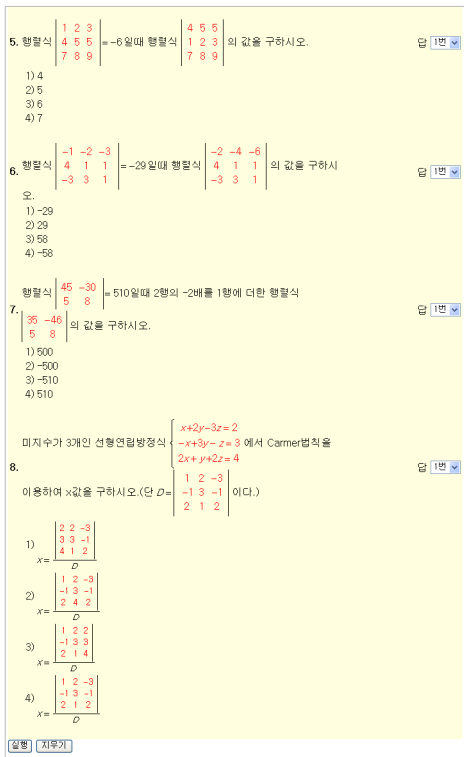


그림 5. 온라인 퀴즈 화면

[그림 5]는 선형 대수학 중 행렬 부분을 학습한 후 풀게 되는 온라인 평가로 이는 베이지언 추론망 기반 평가 환경에서 만들었다.

이러닝 시스템에 제시된 여러 학습 콘텐츠를 통하여 해당 단원의 학습을 마친 학습자는 [그림 6]과 같이 제시된 퀴즈를 온라인으로 푼다. 문제를 모두 풀고 온라인 퀴즈 페이지의 하단에 있는 테스트 결과 전송 버튼을 누르면 그 결과가 [그림 7]과 같은 학습자 진단 보고서로 통보된다.

[그림 5]에 보이는 총 8문제의 평가를 통하여 학습자는 [그림 6]에 제시되는 8가지의 학습 내용 요소(2차행렬식, 소행렬식, 여인수, n차 행렬식, 행렬식의 일반적 성질1, Cramer의 법칙, 행렬식의 일반적 성질2, 행렬식의 일반적 성질3)의 사후확률값을 알 수 있다. 비록 적은 수의 문제이지만 학습자의 답안을 베이지언 추론망에 입력한 후 계산된 각 지식영역별 사후확률을 구간으로 나누어 이를 수, 우, 미, 양, 가의 5구간 척도로 보고한다. 이렇게 함으로써 퀴즈를 통하여 능력 변화의 과정을 추정할 수 있다[4].

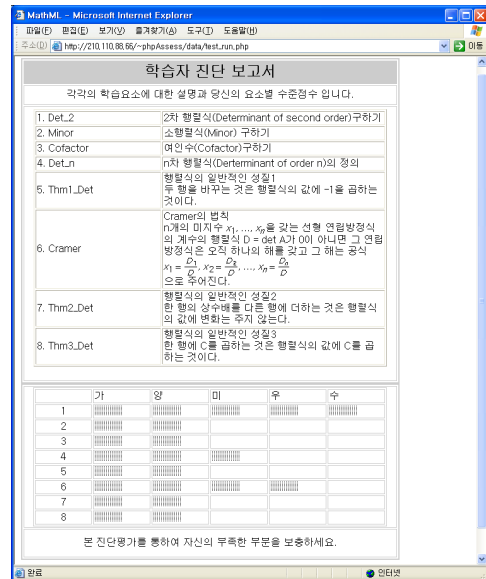


그림 6. 학습자 진단 보고서

학습자의 진단 결과에 따라 보충학습 콘텐츠를 적응적으로 생성하는 절차는 다음과 같다. 1) 각 지식영역별 미 이하에 해당되는 지식요소 Ki를 찾는다. 2) 그 중에서 베이지언 추론망에 해당되는 선수 관계를 파악

한다. (예, $K_i \rightarrow K_j$). 이러한 선수 관계에 따라 K_j 가 K_i 보다 사후 확률이 낮게 나타난다. 3) 이러한 선수 관계에 따라 보충 학습에 관련된 템플릿을 사용하여 피드백을 생성한다. 4) 피드백 생성 후에 다시 퀴즈 풀이를 통하여 지식 요소의 사후확률의 구간이 최소한 미 이상이 되도록 보충 학습 콘텐츠를 적응적으로 제공한다.

IV. 이공계 수학용 콘텐츠 개발

이 절에서는 컴퓨터 대수 시스템 기반의 온라인 저작 환경과 베이저언 추론망 기반 평가 환경으로 구성된 이 러닝 시스템의 효율성, 안정성, 편의성을 테스트하기 위하여 실제 이공계 대학용 수학 콘텐츠를 제작한 내용에 대하여 기술한다.

이공계 대학생을 위한 수학 콘텐츠의 필요성은 대입의 다양화와 전문가 부족을 이유로 최근 그 관심이 집중되고 있는 분야로 공업 수학 중에서 미분방정식과 선형대수학의 두 개 분야 및 이산수학에 관련된 웹 콘텐츠를 제작하였다.

콘텐츠의 구성은 정적인 콘텐츠 위주의 내용 제시 부분과 사용자가 실제 이론이나 계산을 시험해 볼 수 있는 동적인 콘텐츠 부분, 그리고 최종적으로 학습자의 지식 상태를 진단해 주는 진단 부분으로 구성한다.

먼저 선형대수의 행렬 단원에서 다루는 고유값과 고유 벡터에 대한 정의 및 예제와 응용 문제를 다루는 정적인 콘텐츠와 “실습하기”의 동적인 콘텐츠를 보여준다.

1. 고유값 고유벡터

공학적 응용이라는 견지에서 볼 때, 고유값 문제는 행렬과 관련된 가장 중요한 문제이다.

정의 1.1

$n \times n$ 행렬 $A = [a_{jk}]$ 에 대하여

$$Ax = \lambda x$$

인 스칼라 λ 와 벡터 $x \neq 0$ 가 존재하면 λ 를 행렬 A 의 **고유값** (eigenvalue) 또는 **특성값** (characteristic value)이라고 하고 x 를 고유값 λ 에 대응하는 **고유벡터** 또는 **특성벡터**라 한다.

예제 1

행렬 $A = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ 에 대하여 고유값과 고유벡터를 구하라.

그림 7. 선형대수의 고유값과 고유벡터 콘텐츠

2. 고유값 문제의 응용

고유값 문제의 응용에 대한 예제를 알아보자.

예제 1 탄성막의 신장

결과로서 원 $x_1^2 + x_2^2 = 1$ 을 갖는 x_1, x_2 평면상상에 있는 탄성막을 잡아 당겨 점 $P(x_1, x_2)$ 가 점 $Q(y_1, y_2)$ 로 가도록 하고 다음과 같이 주어진다.

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = Ax = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \text{즉} \quad \begin{cases} y_1 = 5x_1 + 3x_2 \\ y_2 = 3x_1 + 5x_2 \end{cases}$$

이때 Q 의 위치벡터 y 의 방향이 P 의 위치벡터 x 의 방향과 같거나 정반대 방향이 되는 위치벡터 x 의 방향(주방향)을 구하라.

(풀이)

y 의 방향과 x 의 방향이 같거나 반대방향이 될려면 y 가 x 의 스칼라 배가 되어야 한다. 즉 $y = \lambda x$ 인 x 를 찾는 것이다.

$y = Ax$ 이므로 이 문제는

$$y = Ax = \lambda x$$

인 행렬 A 의 고유값과 고유벡터 x 를 찾는 문제이다.

그림 8. 고유값의 응용에 관한 예제

[그림 8]은 고유값 문제의 응용을 다루는 예제가 담긴 콘텐츠를 보여준다. [그림 9]는 이러한 응용 문제를 해결하는 과정에서 고유값과 고유 벡터를 계산하는 실습을 할 수 있는 모드를 보여준다.

행렬 - 고유값과 고유벡터

수식입력기

행렬의 고유값과 고유벡터를 구하는 예제입니다. 행렬 A를 {{1,0},{0,1}}... 식으로 입력합니다. 그 후 실형을 누르면 행렬 A의 고유값과 고유벡터가 나타납니다. ex) 행렬 A를 {{1, 0}, {0, 1}}, {{0, -1}, {0, -1}} 라하고 실형을 누르면 행렬 A의 고유값과 고유벡터가 구해집니다.

A =

{{{5,3},{3,5}}}

고유 값 : {8, 2}

고유벡터 : {{1, 1}, {-1, 1}}

그림 10. 고유값과 고유벡터를 계산하는 “실습하기”

이제 미분방정식에서 행렬을 사용하는 콘텐츠 개발의 사례를 소개한다. 상계수를 갖는 제차 선형연립 미분방정식의 해를 구하기 위하여 행렬을 사용하는 콘텐츠가 [그림 11]에 제시되어 있다.

3. 상계수를 갖는 제차 선형연립방정식

$n \times n$ 행렬 $A = [a_{jk}]$ 를 상수행렬 즉 모든 a_{jk} 가 t 에 의존하지 않는 상수라 가정하고 제차 선형연립방정식

$$(1) \quad \mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$$

에 대한 해법을 소개한다.

식 (1)을 풀기 위해 단일방정식 $y' = ky$ 가 $y = ce^{kt}$ 를 해로 가짐을 이용하면

$$(2) \quad \mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} \Rightarrow \mathbf{y}' = \lambda \mathbf{x} e^{\lambda t}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad x_j \text{는 상수}$$

를 해라고 시도해 본다. 식 (1)에 대입하면

$$\mathbf{y}' = \lambda \mathbf{x} e^{\lambda t} = \mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} e^{\lambda t}$$

를 양고 양변을 $e^{\lambda t}$ 로 나누면 고유값 문제

$$(3) \quad \mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$$

가 남는다. 따라서 식 (1)의 자명하지않는 해는 식 (2)의 형태인데 여기서, λ 는 \mathbf{A} 의 고유값이고 \mathbf{x} 는 그에 대응하는 고유벡터이다.

그림 11. 상계수를 갖는 제차 선형연립방정식

[그림 12]는 상계수를 갖는 제차 선형연립방정식의 해를 구하기 위하여 특성방정식을 이용한 고유값과 고유벡터를 구하는 실습 모드를 보여준다.

∴ 미분방정식(상계수를 갖는 제차 선형 연립방정식)

수식 입력기

1. 제차 선형 연립방정식을 $\{(x1, y1), (x2, y2)\}$ 식으로 입력합니다.
 ex) $y' = 3x - y$ 의 경우 $\{(5, -1), (0, 3)\}$ 형태로 입력을 합니다.

1. 항렬 형태로 입력

실행 **재입력**

입력한 행렬	$\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$
특성방정식	$(\lambda^2 - 8\lambda + 15)$
고유값	$\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$
고유벡터	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

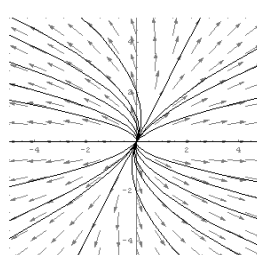


그림 12. 제차 선형연립방정식의 실습하기

다음은 이산수학 분야에서 그래프 구조를 이해하는 콘텐츠를 소개한다. 먼저 (1,2,3)의 순열에서 임의의 숫자 2개가 서로 자리바꿈하여 생긴 다른 순열과 서로 간선을 가지는 Transposition 그래프를 생성하는 실습하기 모드가 [그림 13]에 나타나 있다.

∴ Transposition Graph 그리기
 순열에서 임의의 숫자 2개만 자리 바꿈한 그래프

수식 입력기

사용법) 순열을 만들 집합을 입력하세요.
 ex) 사용한 명령어
 MakeGraph[Permutations[{1, 2, 3}], {Count[#1 - #2, 0] == 1} &, Type -> Undirected]

1. 만들고 싶은 순열의 집합 입력

실행 **재입력**

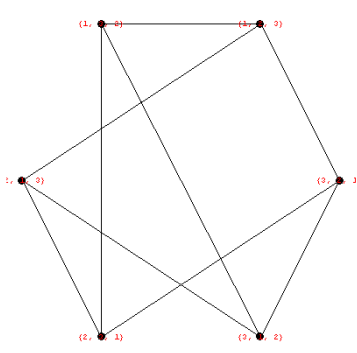


그림 13. Transposition 그래프 그리기

마찬가지 방법으로 트리에 대한 실습을 하는 모드가 제공되고 있으며 순서구조 단원에서 하세 도표 구하기, 부울대수 단원에서 카노맵 그리기 등을 실습할 수 있다.

V. 이러닝 시스템 평가

컴퓨터 대수 시스템과 베이지언 추론망 기반의 이공계 수학용 이러닝 시스템에 관한 효용성 평가 및 사용자 의견을 조사하기 위하여 형성평가 방법을 사용하였다[6]. 본 연구에서는 총 23문항으로 된 설문지 조사를 수행하였으며 이 중 5중 척도 질의는 12문항이었다. 인

터넷과 관련한 사용자 특성에 관한 질의가 총 10문항, 수학과 관련한 사용자의 성향에 관한 질의가 총 7문항 그리고 컴퓨터 대수 시스템과 베이지언 추론망 기반의 이공계 수학용 이러닝 시스템에 의해 제작된 이러닝 서비스인 MathHunter의 사용에 관한 질의가 6 문항이었다.

대상자는 총 26명으로 이 학생들은 기계우주공학부, 정보통신공학부, 기계공학부, 과학교육과, 전기제어공학부, 자동차공학부 총 5개 전공자들로 모두 이공계 대학생을 위해 개설된 대학 수학 과목을 수강하는 학생들이며 비율은 기계우주가 26명중 18명으로 70%를 차지하며 나머지 전공의 학생들의 수는 미미하였다.

학생들의 학년 구성은 1학년이 19명으로 73%를 차지하며 나머지 학년은 2학년과 4학년은 2명, 3학년 3명으로 대부분 1학년생으로 2007년도 신입생이 대부분이다. 성별은 이공계의 특성을 반영하듯 여학생이 5명으로 20%, 남학생이 21명으로 전체의 80%를 차지하였다.

인터넷 사용능력에 관한 질의에서는 5분 척도의 평균 값이 3.27로 대부분이 보통이상인 수준임을 보였다. 신입생의 비율이 73%임을 감안한다면 인터넷 및 컴퓨터 사용에 관하여는 거부감이 없고 모두 활용도가 높은 것을 추정 할 수 있다.

인터넷을 통해 주로 하는 활동에 대해 순위를 매겨 3가지를 선택하도록 한 질의에서 첫 번째로 꼽는 인터넷 활동으로는 단연 자료검색이 15명으로 많았으며, 다음은 온라인 게임이 6명으로 나왔다.

인터넷 학습의 경험에 관한 질문에서는 단지 2명만이 인터넷 학습을 해본 경험이 없으며, 나머지 24명 즉 92%는 이미 인터넷 학습을 해본 것으로 드러났다.

온라인 학습 사이트를 이용하여 구체적으로 어떤 형식의 강의를 수학하였는지에 관한 질의에서 압도적으로 73%가 동영상 강의를 꼽았다. 대상 학생들은 대부분 동영상 강의 외에는 별다른 학습 활동으로 온라인 강의를 활용하지 못하고 있음을 알 수 있다.

수학 과목 관련 웹기반 학습을 경험해 본 대상자에 대하여 어떠한 형태로 온라인 학습 활동을 하였는지 질의하였다. 중복 선택을 할 수 있도록 한 결과 동영상 강의를 수강한 것이 16건으로 가장 많았고 시험 등 문제 풀이가 7건이었으며 그 외의 건수는 미미했다.

컴퓨터 대수 시스템 즉 수학전용 소프트웨어의 사용 경험에 대한 질의에서 들어는 보았으나 사용해 본 적은 거의 없는 것으로 들어났다.

‘컴퓨터 대수 시스템을 활용하면 수학 학습에 도움이 될 것인가’라는 질문에 대한 답변은 5분 척도 값이 평균 3.33으로 보통 이상의 효과가 있을 것이라는 기대감을 가지고 있다.

전공과목을 공부하는데 수학이 기여하는 정도를 묻는 질문에서는 평균 4.58로 수학이 전공과목을 공부하는데 매우 기여도가 높은 것으로 판단하고 있음을 알 수 있었다.

MathHunter 학습 사이트의 중간 중간에 있는 “실습하기” 페이지가 대학생들의 수학 학습시 학습내용을 이해하는데 도움을 주는가에 대한 질문에 대하여 응답자들은 평균 3.4로 보통 이상의 효과가 있다고 답변하였다.

MathHunter 학습 사이트의 콘텐츠를 이루고 있는 컴퓨터 대수 시스템 기반의 수식과 그래프가 대학생들의 수학 학습시 학습 내용을 이해하는데 도움을 주는가에 대한 질문에 대하여 응답자들은 평균 3.28로 보통 이상의 효과가 있다고 답변하였다.

MathHunter 학습 사이트의 “실습하기”를 학습자들이 직접 수행하는 과정이 학습자들에게 이해력과 응용력을 길러주는 효과가 있는가라는 질문에 대하여 응답자들은 평균 3.15로 보통의 효과가 있다고 답변하였다.

MathHunter 학습 사이트의 “실습하기” 페이지를 통하여 얻을 수 있는 이익에 대하여 다수 개 중복 선택이 가능하도록 질의를 한 결과 총 39건 중 복잡한 계산 결과를 알아볼 때 좋다는 의견이 15건으로 가장 많았고, 복습할 때 유용하다는 의견이 11건으로 그 다음 많았다. 그리고 정확하고 정밀한 그래프로 표현된 콘텐츠로 인해 신뢰감을 준다는 의견이 7건 나타났다.

VI. 결론 및 향후 연구

본 시스템은 교수자가 보다 쉽게 이공계 수학용 학습 콘텐츠를 생성할 수 있도록 컴퓨터 대수 시스템에 최적

화 된 전용 콘텐츠 저작 도구를 포함하도록 개발되었다. 특히 Mathematica를 이용한 템플릿 기반의 저작 환경을 사용함으로써 양질의 수학 학습용 콘텐츠를 양산하는데 기존의 시스템보다 유리한 장점을 갖추고 있다. 또한 베이지언 추론망 기반의 학습자 진단을 통하여 학습자에게 적응적인 피드백을 제공함으로써 기존의 온라인 콘텐츠 평가 방법이 가지고 있는 한계점을 보완하는 방법을 제시하였다[6].

이공계 수학용 이러닝 시스템으로 구현된 MathHunter에 대한 사용자 대상 설문조사를 실시한 결과 MathHunter 학습 사이트의 메뉴 및 “실습하기”, 컴퓨터 대수 시스템 기반의 수식과 그래프가 대학생들의 수학 학습시 학습 내용을 이해하는데 도움을 준다는 반응을 보였다. 또한 MathHunter 학습 사이트에 제시된 컴퓨터 대수 시스템 기반의 “실습하기” 과정이 학습자들이 복잡할 때 유용하며 정확하고 정밀한 그래프로 표현된 콘텐츠로 인해 신뢰감을 준다는 의견을 보였다. 이러한 결과에 비추어 보면 컴퓨터 대수 시스템과 학습자 진단을 위한 베이지언 추론망에 대한 연구가 매우 적합한 방법을 제공해 주며 앞으로 이공계 수학용 콘텐츠 개발에 새로운 영역을 개척할 수 있는 여지가 많음을 보여주고 있다.

향후 이공계 학습자의 지식 영역별 수준과 학습자 프로파일을 반영한 콘텐츠를 학습 차시마다 적응적으로 제시하도록 현 시스템을 발전시킨다면 학습 효과 크기(effect size)를 좀더 높일 수 있을 것으로 예상된다. 이러한 방식은 Wallis[12]와 ActiveMath[9]의 연구에서 보고되어 있는데, 이공계 수학의 한 과목(예, 선형대수, 미분방정식 등) 전체를 대상으로 과제분석(task analysis)을 통한 지식 요소를 추출하고 각 장별 지식 요소를 트리 구조로 변환함으로써 전체 장을 베이지언 추론망으로 설계하는 방식이 유용할 것으로 예측된다. Andes 튜터링 시스템에서 사용하는 POLA 기법[10]을 이용하여 문제해결의 단계(plan)를 추적하는 세밀한 형태의 진단 기법과 이에 따른 피드백 생성도 향후 고려할 연구과제가 된다.

참 고 문 헌

- [1] 김성욱, “공학전공자를 위한 대학 수학 교육과정과 교수”, 한국수학교육학회지시리즈E, Vol.19, No.2, pp.409-416, 2005.
- [2] 김명화, *학습자의 인지진단 방법에 관한 연구 - 분수의 인지과정 모델에 Bayesian 추론망 모델 적용*, 고려대학교, 박사학위 논문, 1997.
- [3] 김현수, 손권태, “신경회로망을 이용한 학습자 진단모델에 관한연구”, 한국정보처리학회논문지, Vol.5, No.11, pp.2915-2920, 1998.
- [4] 김성훈, 강상진, 김성호, “다층모형을 적용한 능력 변화 과정의 측정”, 교육평가연구, Vol.12, No.2, pp.169-190, 1999.
- [5] 박홍준, 전영국, 장문석, “컴퓨터 대수 시스템과 웹 연동 기술을 활용한 코스웨어 개발용 웹 매뉴얼 생성기”, 컴퓨터교육학회논문지, Vol.8, No.5, pp.97-108, 2005.
- [6] 전영국, 김진영, 권순걸, 허희옥, “컴퓨터대수시스템 기반의 이공계 수학용 웹 콘텐츠 개발과 형성 평가”, 한국학고수학회, Vol.10, No.1, pp.27-43, 2007.
- [7] B. Kevin, Korb, and E. Ann, Nicholson, “Bayesian Artificial Intelligence,” Chapman & Hall/CRC, New York, 2004.
- [8] D. N. Paul, F. C. Susan, and L. B. Robert, Cognitively Diagnostic Assessment, Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, New Jersey, 1995.
- [9] M. Erica, A. Eric, B. Jochen, F. Adrian, G. George, L. Paul, P. Martin, and U. Carsten, “ActiveMath: A Generic and Adaptive Web-Based Learning Environment,” International Journal of Artificial Intelligence in Education, Vol.12, pp.385-407, 2001.
- [10] C. Conati and K. VanLehn, “POLA: a student modeling framework for Probabilistic On-Line Assessment of problem solving performance,”

Fifth International Conference on User Modeling: Proceedings of the conference, pp.75-82, 1996.

[11] A. Gertner, C. Conati, and K. VanLehn, "Procedural help in Andes: Generating hints using a Bayesian network student model," Proceedings of the Fifteenth National Conference on Artificial Intelligence AAAI-98, pp.106-111, 1998.

[12] M. Manolis and M. Antony, "WALLIS: a Web-based ILE for Science and Engineering Students Studying Mathematics," Conference on Artificial Intelligence in Education, 2003.

[13] L. Roy and J. M. Robert, "Specifying and Refining a Measurement Model for a Simulation-Based Assessment," CES Report 619, University of California, Los Angeles, 2004.

[14] V. D. Jiska, Knowledge Assessment using Bayesian Networks, Master's Thesis Cognitive Artificial Intelligence, University of Melbourne, 2003.

[15] C. Conati, S. Abigail, Gertner, K. VanLehn, and J. D. Marek, "On-Line Student Modeling for Coached Problem Solving Using Bayesian Networks," Proceedings of the Sixth International Conference, Um97, Springer Wien New York, pp.232-242, 1997.

[16] S. Keehong, "Flash-Enabled User Interface For CAS,," Workshop at ISSAC 2003.

[17] M. Joel and V. Kurt, "Student assessment using Bayesian nets," Int. J. Human-Computer Studies 42 pp.575-591, 1995.

[18] R. J. Mislevy and D. H. Gitomer, "The role of probability-based inference in an intelligent tutoring system," User-Modeling and User-Adapted Interaction, Vol.5, pp.253-282, 1996.

[19] H. J. Park, J. Y. Kim, Y. C. Jun, and M. S.

Jang, "Web-based Intelligent Tutoring System using Bayesian Inference Network and Computer Algebra System," ICoME, pp.383-386, 2006.

[20] S. H. Kim, "Stochastic ordering and robustness in classification from a Bayesian network," Decision Support Systems, Vol.39, pp.253-266, 2005.

저 자 소 개

박 홍 준(Hong-Joon Park)

준회원



- 2002년 2월 : 순천대학교 컴퓨터 교육과(이학사)
- 2005년 2월 : 순천대학교 컴퓨터 과학과(이학석사)
- 2005년 3월 ~ 현재 : 순천대학교 대학원 컴퓨터과학과 박사과정

<관심분야> : AI, WBI, CAS, ITS, BIN

전 영 국(YoungCook Jun)

정회원



- 1986년 2월 : 수원대학교 수학과(이학사)
- 1986년 : 시카고주립대학교 수학과(이학석사)
- 1995년 : 일리노이대학교 어바나-삼페인(교육학박사)

▪ 1996년 ~ 현재 : 순천대학교 사범대학 컴퓨터교육과 교수

<관심분야> : 지능형교수시스템, WBI, HCI