

# 피라미드 상호연결망의 기반 그래프로서의 $2^n$ -정방형 메쉬 그래프의 간선 특성

## Edge Property of $2^n$ -square Meshes as a Base Graphs of Pyramid Interconnection Networks

장정환

부산외국어대학교 디지털미디어학부

Jung-Hwan Chang(jhchang@pufs.ac.kr)

### 요약

피라미드 그래프는 정방형 메쉬와 트리 구조를 기반으로 하는 상호연결망 토폴로지이다. 본 논문에서는 피라미드 그래프의 각 계층을 구성하고 있는 기반 그래프로서의 정방형 메쉬 그래프의 간선들을 두 개의 서로 다른 그룹으로 분류하는 전략을 채택한다. 메쉬 내의 간선 집합은 해당 간선의 양 끝 정점들에 인접된 부모 정점들이 상위 계층 내에서 서로 이웃하는 관계인지 아니면 공유하는 관계인지에 따라서 각각 NPC-간선과 SPC-간선이라는 이름으로 불리는 두 개의 서로 다른 부분집합으로 나누어질 수 있다. 아울러 원래 그래프에서의 SPC-간선들을 압축된 결과 그래프에서는 압축된 슈퍼-정점 내부로 숨김으로써 NPC-간선들에만 초점을 맞출 수 있도록 하기 위해 압축 그래프의 개념을 소개한다. 본 논문에서는  $2^n \times 2^n$  2-차원 정방형 메쉬 내에서 해밀톤 사이클 구성 시 포함할 수 있는 NPC-간선 개수의 하한 및 상한이 각각  $2^{2n-2}$ 와  $3 \cdot (2^{2n-2} - 2^{n-1})$ 임을 분석한다. 이 결과를 피라미드 그래프로 확장시킴으로써  $n$ -차원 피라미드 내에서 해밀톤 사이클에 포함가능한 NPC-간선의 최대 개수가  $4^{n-1} - 3 \cdot 2^{n-1} - 2n + 7$ 임을 증명한다.

■ 중심어 : | 메쉬 | 피라미드 | 해밀톤 사이클 |

### Abstract

The pyramid graph is an interconnection network topology based on regular square mesh and tree structures. In this paper, we adopt a strategy of classification into two disjoint groups of edges in regular square mesh as a base sub-graph constituting of each layer in the pyramid graph. Edge set in the mesh can be divided into two disjoint sub-sets called as NPC (represents candidate edge for neighbor-parent) and SPC (represents candidate edge for shared-parent) whether the parents vertices adjacent to two end vertices of the corresponding edge have a relation of neighbor or shared in the upper layer of pyramid graph. In addition, we also introduce a notion of shrink graph to focus only on the NPC-edges by hiding SPC-edges in the original graph within the shrunk super-vertex on the resulting graph. In this paper, we analyze that the lower and upper bound on the number of NPC-edges in a Hamiltonian cycle constructed on  $2^n \times 2^n$  mesh is  $2^{2n-2}$  and  $3 \cdot (2^{2n-2} - 2^{n-1})$  respectively. By expanding this result into the pyramid graph, we also prove that the maximum number of NPC-edges containable in a Hamiltonian cycle is  $4^{n-1} - 3 \cdot 2^{n-1} - 2n + 7$  in the  $n$ -dimensional pyramid.

■ keyword : | Mesh | Pyramid | Hamiltonian Cycle |

## 1. 개요

대규모 병렬처리시스템에서 다양한 응용분야의 알고리즘들을 효율적으로 수용하여 제 성능을 발휘할 수 있도록 하기 위해서는 시스템을 구성하고 있는 정점(vertex)들의 연결 구조를 그래프 형태로 표현한 상호연결망(interconnection network) 위상의 역할이 매우 중요하데, 그 이유는 해당 그래프에 대한 이론적인 특성에 해당 병렬처리시스템의 성능이 의존적일 수밖에 없기 때문이다. 일반적으로 상호연결망의 성능에 큰 영향을 미치는 그래프 이론적인 요소로는 지름(diameter), 연결도(connectivity), 고장 허용도(fault tolerance), 라우팅 알고리즘의 간결성 및 효율성 등이 중요하게 평가되고 있는데, 이러한 요소들을 비교 분석하여 보다 좋은 성능의 상호연결망을 설계하려는 시도는 그래프 이론 및 병렬처리 분야에서 많은 관심을 받고 있다. 뿐만 아니라 알고리즘에 내재된 자료구조를 실제 구현된 시스템 구조에 효율적으로 매핑시키거나, 상호연결망 상호간 시뮬레이션을 위한 체계적인 접근으로서 그래프 임베딩(embedding) 문제가 대두하게 되었다[1][2].

고장이 없는 그래프를 대상으로 한 임베딩 연구 결과들도 중요한 의미를 갖지만 현실적인 상황에서 그래프의 정점으로 매핑되는 프로세서나 간선으로 매핑되는 통신 채널 상에서의 고장 가능성이 상존하고 있으므로 정점이나 간선에서의 고장을 갖는 그래프를 대상으로 하는 고장-허용 임베딩(fault-tolerant embedding)에 대한 연구 또한 중요한 의미를 갖는다.

본 논문에서는 간선에서의 고장-허용 해밀톤 사이클 임베딩 문제 해결을 위한 간선 관련 조건을 찾기 위해 피라미드 그래프 내에서의 사이클 확장성에 따라 두 부류의 간선 집합으로 분류하고 이를 개별적으로 고려함으로써 해당 그래프 내에서 해밀톤 사이클 구성 시 특정 그룹 간선들이 어느 정도 포함될 수 있는지를 밝히고자 한다. 이러한 결과는 향후 고장이 발생한 간선을 우회시킬 수 있는 해밀톤 사이클 구성 시 세부 전략을 수립하는데 기준이 될 수 있다고 판단하고 있다.

본 논문은 네 개의 절로 구성되는데 이어지는 두 번째 절에서는 본 논문과 관련이 있는 주요 연구결과 및

본 연구의 배경에 대해 설명하고, 세 번째 절에서는 본 논문에서 주로 다루게 될 주요 그래프에 대한 정의와 주요 성질들을 이용하여 메쉬 부그래프 및 피라미드 그래프에서 해밀톤 사이클 구성 시 특정 그룹에 해당하는 간선들을 얼마나 많이 포함가능한지 그 개수를 분석하여 그 개수의 상한과 하한을 분석하게 되며, 마지막 네 번째 절에서 결론을 맺는다.

## II. 관련 연구

지난 십 수년간 큰 관심을 받아 온 대표적인 상호연결망으로는 하이퍼큐브(hypercube 또는 (이진)  $n$ -큐브)를 꼽을 수 있으며[3], 피라미드(pyramid)와 메쉬(mesh) 또한 병렬처리분야에서 비교적 잘 알려진 상호연결망 구조 중 하나로 널리 이용되고 있는 실정이다 [4][5].

2차원 메쉬(2-dimension mesh)(또는 grid)는 가장 잘 알려진 상호연결망 모델 중 하나로써 구조가 단순하여 확장성이 뛰어나 뿐만 아니라 효율적인 평면배치(layout) 등의 장점을 갖는 것으로 알려져 있다[4][7-9].

높이  $N$ 인 피라미드(pyramid)는 각 계층이  $4^k$  형태의 크기를 갖는 서로 다른 메쉬 구조를 부그래프로 보유하는  $N$ 개의 계층적 구조로 이루어짐으로써 자연스럽게 픽셀 단위 영상처리 등과 같이 계층적 데이터 처리모델을 갖는 멀티미디어 응용분야 등에 효율적인 것으로 알려져 있을 뿐만 아니라 내재된 트리(tree) 및 메쉬(mesh) 구조의 특성을 활용한 그래프 관련 문제들의 해결에도 유용한 것으로 알려져 있고, 다양한 관련 연구들이 진행되어 왔다[3-10].

상호연결망 그래프에 내재된 사이클 특성을 분석한 연구들이 갖는 의의는 다양한 응용분야에 적용되고 있는 대부분 알고리즘들의 수행에 필요한 기본 자료구조일 뿐만 아니라 수많은 프로세서들로 구성된 다중컴퓨터 병렬처리시스템에서 사이클 기반의 방송 또는 멀티캐스팅 형태의 메시지 전달 과정을 필요로 하는 응용분야에서 하부구조로 사이클 특성을 활용하고 있는 점을 예로 들 수 있다[11].

그래프 G 내에서 임의의  $k$ -개 간선이 고장으로 제거된 상태에서도 해밀톤 사이클을 구성할 수 있을 때 그래프 G가 ' $k$ -간선 고장-허용 해밀톤( $k$ -edge fault-tolerant Hamiltonian)' 특성을 갖는다고 한다[12].

일반적으로 최소 분지수  $d$ 인 그래프 G는  $(d-2)$ -간선 고장-허용 해밀톤 특성을 가짐을 쉽게 알 수 있는데, 그 이유는 최소 분지수를 가지는 정점에 인접된  $d$ 개의 간선들 중에서 최소한 2개의 간선은 고장 없이 남아 있어야만 해당 정점을 해밀톤 사이클 구성 시 포함시킬 수 있기 때문이다.

따라서 정점이나 간선에서의 고장이 발생할 수 있음을 가정한 상태에서의 임베딩 문제를 다룬 연구들도 다양하게 존재하지만, 특히 간선에서의 고장을 다루는 고장-허용 해밀톤 사이클 임베딩 문제의 경우에 대상 그래프의 최소 분지수(degree)는 간선에서의 고장-허용 정도를 가늠할 수 있는 기본적인 척도가 되고 있는 셈이다.

그러나 이러한 분지수가 척도로 작용하는 경우는 모든 고장이 최소 분지수를 갖는 정점에 인접된 주변의 간선들로 집중된 특별한 한 경우의 패턴에 한정된 사례일 뿐 현실적으로 발생가능성이 희박하므로 이러한 척도는 이론적으로는 최악의 상황을 고려한 이상적인 값일지는 몰라도 현실적으로는 큰 의미를 부여하기 어렵다. 이런 비현실적인 고장-허용도와 관련하여 보다 현실적으로 의미있는 한계값을 구하기 위한 노력의 일환으로 특별히 주어진 조건 하에서 보다 많은 정점 또는 간선에서의 고장에도 불구하고 남아있는 자원들만을 이용하여 해밀톤 사이클을 구성할 수 있음을 밝히는 방향으로의 연구결과들도 많이 제시되고 있다[13-16].

본 논문에서도 이러한 접근법의 일환으로 사이클 구성 시 간선들의 우회 가능성 등의 활용 역할에 따라 간선들을 분류하고, 분류된 특정 간선그룹별로 고장-허용 관련 특성을 분석함으로써 보다 많은 간선에서의 고장-허용 정도를 보장할 수 있는 간선 그룹별 조건을 찾고자 하는 시도의 관점에서 간선들의 그룹화 인자 요소 발굴에 주목하게 되었다.

피라미드 그래프의 경우에 최소 분지수는 4이기 때문에 2-간선 고장-허용 해밀톤 특성을 갖지만 세 개 이상

의 간선에서 고장이 발생하는 경우라 하더라도 특정 조건만 회피한다면 대부분의 경우에 충분히 더 많은 고장을 감내할 수 있기 때문에 이를 위한 체계적인 관점의 접근이 필요하다.

본 논문에서 주목하고 있는 피라미드 그래프에서 간선들은 크게 두 부류로 나눌 수 있는데 그 분류의 기준은 인접된 계층으로의 사이클 확장 가능성 여부에 따른 것이다. 이러한 요소의 중요성은 인접 계층으로의 확장까지 가능한 경우에는 보다 많은 우회 경로 확보가 가능하지만 그 외의 간선들처럼 단일 계층에서의 확장만 가능한 경우에는 다양한 우회 경로를 만들기 어렵기 때문에 우회 경로의 확장 가능성 면에서 중요한 인자라고 판단하여 해당 간선의 개수가 고장-허용 해밀톤 사이클 구성에 있어 중요한 고려사항이 될 수 있다고 판단한 것이다.

따라서 본 논문에서는 피라미드 그래프의 기본 구조를 형성하고 있는  $2^n \times 2^n$  2-차원 정방형 메쉬 그래프에서 해밀톤 사이클을 구성함에 있어서 특별한 의미를 갖는 두 그룹 간선들을 얼마나 많이 포함시킬 수 있는지 그 개수의 하한 및 상한값을 분석함으로써 고장-허용과 관련된 그래프 특성 분석에 활용가능한 연구 결과를 제시한다.

### III. 그래프 간선 특성 분석

#### 1. 기본 그래프 특성

본 절에서는 주요 대상 그래프에 해당하는  $2^n$ -정방형 메쉬 및 피라미드 그래프에 대한 정의와 그래프 이론적 관점에서의 주요 특성들을 살펴보고자 한다.

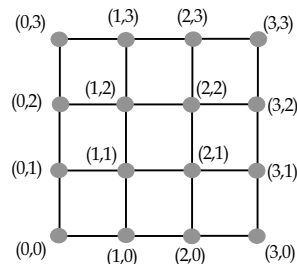


그림 1.  $2^2$ -정방형 메쉬  $SM^2$

[정의 1] 한 변의 길이가  $2^n(n \geq 2)$ 인 2-차원 정방형 메쉬(regular square mesh)(줄여서  $2^n$ -정방향 메쉬)  $SM^n$ 는 정점들의 집합  $V(SM^n)$ 과 간선들의 집합  $E(SM^n)$ 에 의해 다음과 같이 정의한다([그림 1] 참조).

- 1)  $V(SM^n) = \{(x,y) \mid 0 \leq x,y < 2^n\}$
- 2)  $E(SM^n) = \{((x_1,y_1),(x_2,y_2)) \mid |x_1-x_2|+|y_1-y_2|=1\}$

[정의 2] 높이(height)가  $N(N > 2)$ 인 피라미드 그래프(pyramid graph)  $P^N$ 은 정점들의 집합  $V(P^N)$ 과 간선들의 집합  $E(P^N)$ 에 의해 다음과 같이 정의한다([그림 2] 참조).

- 1)  $V(P^N) = \bigcup_{0 \leq l \leq N-1} \{(l,x,y) \mid 0 \leq x,y \leq 2^{N-l}-1\}$
- 2)  $E(P^N) = E_1 \cup E_2$   
 $E_1 = \bigcup_{0 \leq l \leq N-2} \{((l,x_1,y_1),(l,x_2,y_2)) \mid |x_1-x_2|+|y_1-y_2|=1\}$   
 $E_2 = \bigcup_{0 \leq l \leq N-2} \{((l,x,y),(l+1, \lfloor x/2 \rfloor, \lfloor y/2 \rfloor)) \mid 0 \leq x,y < 2^{N-l}\}$

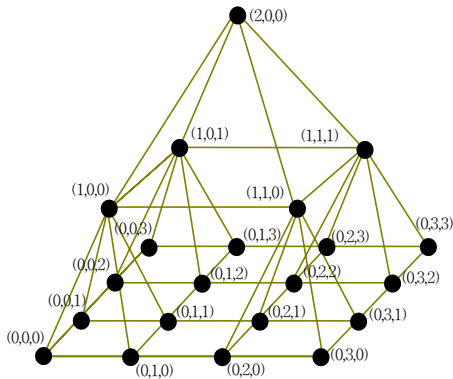


그림 2. 높이 3인 피라미드 그래프  $P^3$

[그림 2]는 높이(height)가 3인 피라미드의 예를 보여 주고 있다. 일반적으로 높이가  $N$ 인 피라미드 그래프  $P^N$ 의 각 계층  $l(0 \leq l < N)$ 에는  $4^{N-l}$ 개의 정점들로 구성된 2-차원 정방형 메쉬  $2^{N-l} \times 2^{N-l}$  구조로 이루어져 있어 가장 위 계층에 해당하는 계층  $N-1$ 의 1개의 정점으로 구성된 2-차원 메쉬로부터 시작하여 가장 아래 계층에 해당하는 계층 0의  $4^{N-l}$ 개로 구성된 2-차원 메쉬까지 다양한 부그래프들을 포함하고 있음을 알 수 있다.

[정의 3] 임의의 그래프(graph)  $G=(V,E)$ 에서의 경로(path)란 시작 정점  $v_1$ 로부터 연속하여 인접된 간선을 따라 연속적으로 나열된 정점들의 정렬  $(v_1,v_2,v_3,v_4,\dots,v_n)$ 을 의미하며, 특별히 간선의 중복 방문이 허용되지 않도록 각 구성 정점들의 분지수(degree)가 최대 2로 제한된 경로를 단순 경로(simple path)라고 일컫는다. 특별히 시작 정점과 마지막 정점 간에 연결 간선을 갖는 닫힌 단순 경로(closed simple path)를 사이클(cycle)이라고 하며 그래프 내의 모든 정점들을 포함하는 최대 길이의 단순 경로를 해밀톤 사이클(Hamiltonian cycle)이라고 일컫는다.

[정의 4] 그래프  $G$  내에서 길이가 각각  $m$ 과  $n$ 이고  $C_A \cap C_B = \emptyset$ 인 두 사이클  $C_A=(u_1,u_2,\dots,u_m)$ 와  $C_B=(v_1,v_2,\dots,v_n)$ 에 각각 존재하는 두 간선  $e_1=(u_i,u_{i+1}) \in C_A$ 과  $e_2=(v_j,v_{j+1}) \in C_B$ 를 희생(제거)시키는 대신, 현재  $C_A$ 와  $C_B$ 의 어디에도 속해있지는 않지만 관련이 있는 두 간선  $(u_i,v_j)$ 와  $(u_{i+1},v_{j+1})$ 를 새롭게 사이클 소속 간선으로 참여시키는 사이클 결합 연산(cycle merge operation)  $\oplus$ 를 다음과 같이 정의한다([그림 3] 참조).

$$C_A(e_1) \oplus C_B(e_2) = (u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u_i, v_j, v_{j-1}, v_{j-2}, \dots, v_2, v_1, v_n, v_{n-1}, \dots, v_{j+2}, v_{j+1}, u_{i+1}, u_{i+2}, \dots, u_{m-1}, u_m)$$

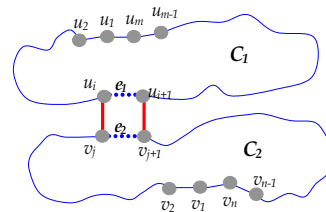


그림 3. 사이클 결합 연산

이러한 사이클 결합 연산의 결과로 새롭게 결합된 사이클  $C_A(e_1) \oplus C_B(e_2)$ 의 크기는 결합 전 각 사이클 크기의 합에 해당하는  $m+n$ 이 된다.

[정의 5] 피라미드 그래프  $P^N(N > 2)$ 의 계층  $l$ 을 형성하고 있는 부그래프(sub-graph)에 해당하는  $2^{N-l} \times 2^{N-l}$  2차원 정방형 메쉬  $S$  내에 소속된 간선  $e=((l,x_1,y_1),(l,x_2,y_2))$ 의 양 끝 정점에 해당하는 두 정점  $(l,x_1,y_1)$ 와  $(l,x_2,y_2)$ 가 아래의 두 조건 중 하나를 만족하

는 경우에 간선  $e$ 를 인접-부모 간선(*neighbor-parent edge*)(줄여서 *NP-간선*)이라고 한다.

$$(1) \lfloor x_1/2 \rfloor - \lfloor x_2/2 \rfloor = 1 \ \&\& \ y_1 = y_2$$

$$(2) \lfloor y_1/2 \rfloor - \lfloor y_2/2 \rfloor = 1 \ \&\& \ x_1 = x_2$$

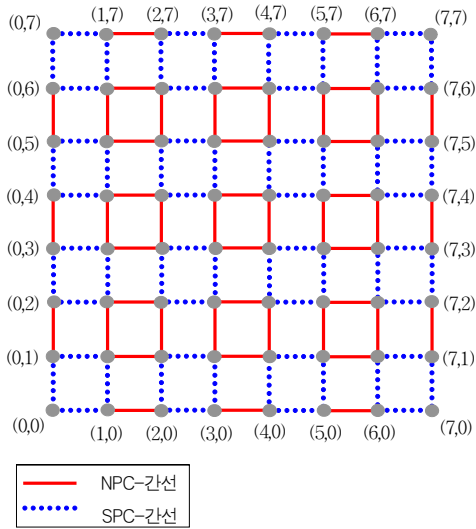


그림 4. 메쉬  $SM^3$  내의 NPC-간선 및 SPC-간선

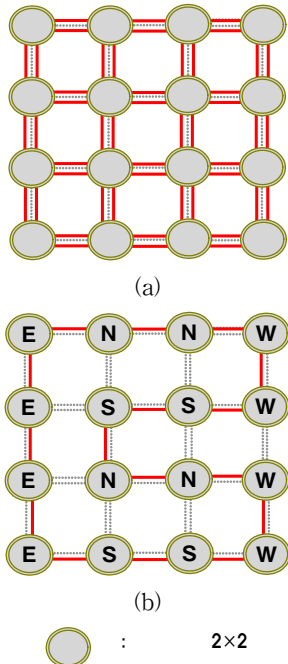


그림 5.  $SM^n$ 의 1-압축 그래프 및 헤밀턴 사이클 구성 예

위의 조건 (1) 및 (2)를 만족하는 간선들을 각각 행-방향(*row-direction*) NP-간선 및 열-방향(*column-direction*) NP-간선이라고 한다.

피라미드 그래프의 특정 계층  $l$ 을 구성하고 있는 부 그래프에 해당하는 정방형 메쉬  $S$ 에 속한 간선  $e=(u,v)$ 가 NP-간선이라는 의미는  $e$ 의 양 끝 정점  $u$  및  $v$ 와 각각 인접하고 있는 차상위 계층  $l+1$ 에 속한 두 정점이 인접되어 있다는 뜻으로 해석할 수 있다. 그리고  $S$ 에 속한 간선들 중 NP-간선들을 제외한 나머지 간선들은 공통-부모 간선(*shared-parent edge*)(줄여서 *SP-간선*)으로 명명함으로써  $S$ 에 속한 정점 상호간 연결된 간선 집합을 두 개의 부분 집합에 해당하는 NP-간선들과 SP-간선들로 양분할 수 있다.

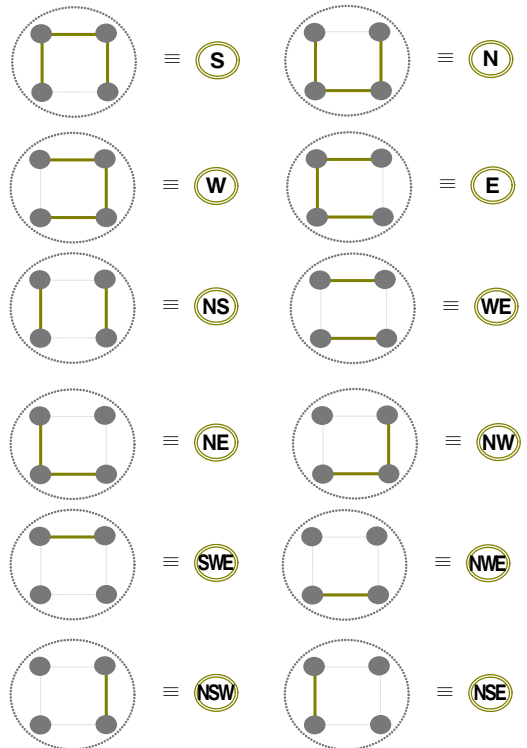


그림 6. 1-압축 그래프 생성 시 구성가능한 슈퍼-정점 부류의 예

한편 이러한 개념 자체는 피라미드 그래프 내에서만 의미를 갖는 개념이지만 논문 전개의 편의를 위해 정방

형 메쉬 그래프를 대상으로 하는 논문 내용 전반에 걸쳐 메쉬 내에 존재하는 간선들에게로 이러한 개념을 확장시키는 과정에서 혼란을 방지하기 위해 메쉬에서는 NP-간선 및 SP-간선을 대신하여 각각 인접-부모 후보 간선(*neighbor-parent candidate edge*)(줄여서 NPC-간선) 및 공통-부모 후보 간선(*shared-parent candidate edge*)(줄여서 SPC-간선)이라고 명명하기로 한다([그림 4] 참조).

**[정의 6]** 주어진 메쉬  $SM^n = (V,E)$ 에 내재된 부-그래프(sub-graph)에 해당하는  $2^k \times 2^k$  메쉬 그래프를 각각 하나의 슈퍼-정점(super vertex)으로 매핑시키고, 슈퍼-정점에 속한 정점들간의 간선 연결을 해당 슈퍼-정점 상호간의 슈퍼-간선(super-edge) 개념으로 확장시켜 생성한 그래프를 *k-압축 그래프(k-shrink graph)*라고 한다([그림 5(a)] 참조).

메쉬 내에 구성가능한 헤밀톤 사이클을 이러한 압축 그래프 개념을 도입하여 나타내면 [그림 5(b)]와 같은 형식으로 표현할 수 있으며, 이러한 구성에서 각 슈퍼-정점에 활용 가능한 구성의 예는 [그림 6]에서 보는 바와 같이 다양한 부류를 형성하고 있다.

## 2. 메쉬 부그래프 간선 특성

피라미드 그래프의 기반 구조를 형성하고 있는  $2^n$ -정방형 메쉬를 대상으로 NPC-간선들의 특성을 분석하고자 한다. NPC-간선은 메쉬 그래프 자체만을 고려할 때에는 SPC-간선과 동등하게 여러 간선들 중 하나일 뿐이지만 피라미드 그래프로 확장된 이후에는 보다 중요한 특성과 역할을 수행하게 된다. 즉, [그림 1]과 [그림 2]를 비교해보면 알 수 있는 바와 같이 SPC-간선들의 경우는 고장 등으로 인해 불가피하게 우회를 해야 하는 경우에 대신할 수 있는 간선들이 동일 계층이나 하위 계층에만 분포하는 특성을 갖는 반면에 NPC-간선들의 경우는 동일 계층이나 하위 계층은 물론이고 상위 계층을 통해서도 우회할 수 있는 특성을 보유하고 있어 사이클 구성의 확장 가능성 및 고장-허용 특성 등의 관점에서 고려해볼 때 중요한 의미를 갖는다고 판단된다.

**[보조정리 1]**  $n \geq 2$ 를 만족하는  $2^n$ -정방형 메쉬  $SM^n$  내에서 구성 가능한 헤밀톤 사이클에 포함할 수 있는 NPC-간선의 총 개수는 최소  $2^{2n-2}$ 개이다.

**[증명]** 메쉬의 대칭성(symmetric property)을 이용하면 모양은 다르지만 서로 동형(isomorphic)인 다양한 구성이 가능하다. 헤밀톤 사이클을 구성하는 다양한 방법 중에서도 NPC-간선들을 가능한 적게 포함되도록 구성하기 위해서는 해당 메쉬 그래프의 압축 그래프를 대상으로 슈퍼-정점 상호간을 연결해주는 간선들에 초점을 기울일 필요가 있으며, 이러한 연결 간선들의 개수를 최소화시키는 전략이 필요하다. 따라서 이러한 유형에 해당하는 [그림 7]에 주어진  $n=3$ 일 경우의 예를 참조하여 일반적인 경우로 확장시키는 방법을 통해 NPC-간선의 최소 개수를 분석할 수 있다.

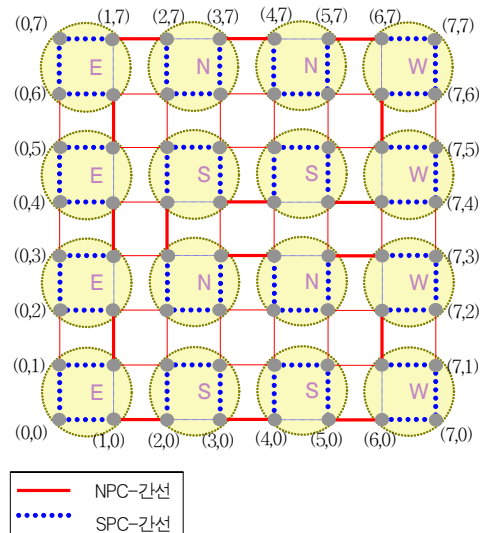


그림 7.  $SM^3$ 에서 최소 NPC-간선 보유 헤밀톤 사이클 구성 예

임의의  $SM^n$ 을 대상으로 헤밀톤 사이클 구성 시 포함될 NPC-간선들의 유형을 행-간선과 열-간선으로 나누어 분석한다.

(1) 열-간선은 다음과 같이 표현되는 세 부분 NPC-간선 그룹들의 합으로 표현할 수 있다.

- ①  $E_{C1} = \{(1,2j+1), (1,2j+2) \mid 0 \leq j < 2^{n-1}-1\}$
- ②  $E_{C2} = \{(2,4j+3), (2,4j+4) \mid 0 \leq j < 2^{n-2}-1\}$
- ③  $E_{C3} = \{(2^n-2,4j+1), (2^n-2,4j+2) \mid 0 \leq j < 2^{n-2}\}$

(2) 행-간선 역시 다음과 같이 표현되는 네 부분 NPC-간선 그룹들의 합으로 표현할 수 있다.

- ①  $E_{R1} = \{(2i+1,0),(2i+2,0) \mid 0 \leq i < 2^{r-1}-1\}$
- ②  $E_{R2} = \{(2i+1,4j),(2i+2,4j) \mid 1 \leq i < 2^{r-1}-1, 0 \leq j < 2^{r-2}-1\}$
- ③  $E_{R3} = \{(2i+1,4j+3),(2i+2,4j+3) \mid 1 \leq i < 2^{r-1}-1, 0 \leq j < 2^{r-2}-1\}$
- ④  $E_{R4} = \{(2i+1,2^{r-1}),(2i+2,2^{r-1}) \mid 0 \leq i < 2^{r-1}-1\}$

따라서 열-간선의 합과 행-간선의 합을 각각  $S_C$ 과  $S_R$ 라고 하면 이들은 다음 식으로 계산 가능하다.

$$S_C = |E_C| + |E_{R2}| + |E_{R3}| = (2^{r-1}-1) + (2^{r-2}-1) + (2^{r-2}) = 2^n - 2$$

$$S_R = |E_{R1}| + |E_{R2}| + |E_{R3}| + |E_{R4}| = 2 * (2^{r-1}-1) + 2 * (2^{r-2}-1) * (2^{r-1}-2) = 2^{2r-2} - 2^{r+2}$$

따라서 최종적으로 헤밀톤 사이클에 남아있는 NPC-간선들의 개수는  $S_C$ 와  $S_R$ 의 합에 해당하므로 최악의 경우에도  $2^{2n-2}$ 개는 존재하게 됨을 확인할 수 있다. □

유사한 방법을 이용하여 정방형 메쉬 내에서 구성되는 헤밀톤 사이클 내에 포함 가능한 NPC-간선의 상한 값(upper bound)을 확인할 수 있다.

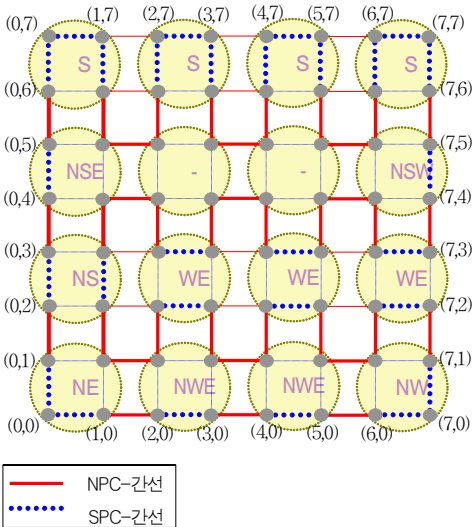


그림 8. SM<sup>3</sup>에서 최대 NPC-간선 보유 헤밀톤 사이클 구성 예

**[보조정리 2]**  $n \geq 2$ 를 만족하는  $2^n$ -정방형 메쉬  $SM^n$  내에서 구성 가능한 헤밀톤 사이클에 포함할 수 있는 NPC-간선의 총 개수는 최대  $3 * (2^{2n-2} - 2^{n-1})$ 개이다.

**[증명]** 위 [보조정리 1]에서와 유사하게 [그림 8]에 주어진  $n=3$ 인 경우를 기반으로 하여  $n$ 에 대해 일반화시키는 확장 기법을 이용하여 임의의  $SM^n$ 을 대상으로 헤밀톤 사이클 구성 시 포함될 NPC-간선들의 유형을 행-간선과 열-간선으로 나누어 분석한다.

(1) NPC-간선들 중에서 열-간선은 다음과 같이 정의되는 간선의 집합 형식으로 표현할 수 있다.

$$E_C = \{(2i,2j+1),(2i,2j+2), (2i+1,2j+1),(2i+1,2j+2) \mid 0 \leq i < 2^{r-1}, 0 \leq j < 2^{r-1}-1\}$$

(2) NPC-간선들 중에서 행-간선 역시 다음과 같이 정의되는 간선의 집합 형식으로 표현할 수 있다.

$$E_R = \{(2i+1,4j),(2i+2,4j), (2i+1,4j+1),(2i+2,4j+1) \mid 0 \leq i < 2^{r-1}-1, 0 \leq j < 2^{r-2}\}$$

따라서 열-간선의 합과 행-간선의 합을 각각  $S_C$ 과  $S_R$ 라고 하면 NPC-간선의 총 개수는 다음과 같이 집합의 크기를 이용해 계산 가능하다.

$$S_C = |E_C| = 2^n * (2^{r-1}-1) = 2^{2n-1} - 2^n = 2 * (2^{2n-2} - 2^{n-1})$$

$$S_R = |E_R| = 2 * 2^{r-2} * (2^{r-1}-1) = 2^{2n-2} - 2^{n-1}$$

따라서 최종적으로 헤밀톤 사이클에 남아있는 NPC-간선들의 개수는  $S_C$ 와  $S_R$ 의 합에 해당하므로 최선의 경우에 최대  $3 * (2^{2n-2} - 2^{n-1})$ 개까지 포함될 수 있음을 확인할 수 있다. □

위의 두 보조정리들의 내용을 종합하면 다음과 같은 사실을 확인할 수 있다.

**[정리 1]** 한 변의 길이가  $2^n (n \geq 2)$ 으로 주어진 2-차원 정방형 메쉬  $SM^n$  내에서 구성 가능한 헤밀톤 사이클에 포함할 수 있는 NPC-간선의 총 개수  $T_M$ 의 범위는  $2^{2n-2} \leq T_M \leq 3 * (2^{2n-2} - 2^{n-1})$  이다. □

위 [정리 1]에 의하면  $SM^2$ 과  $SM^4$ 에는 각각 전체 간선 중 68.75%와 71.875%에 해당하는 최대 36개 및 168개까지의 NPC-간선을 포함시킬 수 있음을 확인할 수 있다.

### 3. 피라미드 그래프 간선 특성

위에서 언급한 메쉬 부그래프의 간선 특성을 피라미드 그래프로 확장시키면 다음과 같은 특성으로 확장시킬 수 있다.

**[정리 2]**  $n \geq 2$ 를 만족하는  $n$ -차원 피라미드 그래프  $P^n$  내에서 구성 가능한 해밀톤 사이클에는 최대  $4^{n-1} - 3 * 2^{n-1} - 2n + 7$  개까지의 NPC-간선을 포함할 수 있다.

**[증명]** [정의 2]에 의하면  $n$ -차원 피라미드 그래프에는 계층  $l=0$ 부터  $l=n-1$ 까지의 총  $n$ 개의 계층적 구조로 이루어져 있으며, 계층  $l$ 은 한 번의 길이가  $2^{n-l}$ 인 정방형 메쉬  $SM^{n-l}$ 를 형성하고 있음을 알 수 있다.

한편 [정리 1]에 의하면  $SM^n$  내에서 구성 가능한 해밀톤 사이클에 포함할 수 있는 NPC-간선의 총 개수  $T_m$ 의 범위는  $2^{2m-2} \leq T_m \leq 3 * (2^{2m-2} - 2^{m-1})$  이므로 각 계층에서 독립적으로 해밀톤 사이클을 구성한 다음, [정의 4]의 사이클 결합 연산을 이용하여 계층간을 연결해 나가는 과정을 통해 전체  $P^n$ 의 해밀톤 사이클을 구성할 수 있으며, 이 과정에서 희생되는 NPC-간선의 수를 최소화하는 전략을 고려할 필요가 있다.

계층  $n-1$ 과  $n-2$ 에 해당하는 최상위 2개 계층에는 NPC-간선이 존재하지 않으며,  $0 \leq l \leq n-3$ 에 해당하는 계층  $l$ 에서 하나의 인접계층과의 사이클 확장을 위해서는 계층  $l$  내에서 최소한 하나의 NPC-간선을 제거하여 인접계층과의 연결 간선으로 대체시켜야 하므로 인접계층마다 하나씩의 NPC-간선이 희생되어야 함을 알 수 있는데, 특별히 최하위 계층인 계층 0에서는 인접계층이 상위 계층만 존재하므로 하나이고, 나머지 계층 1부터 계층  $n-3$ 까지는 모두 상위 및 하위 계층으로 각각 2개씩의 인접계층과 연결시켜야 하므로 각 층에서 상응하는 NPC-간선들이 제외되어야 한다.

이러한 고려사항들을 반영하여  $P^n$  내에서 해밀톤 사이클 구성과정에서 남아있는 NPC-간선의 최대 개수를 수식화하면 다음 식으로 주어진다.

$$\sum_{l=0}^{n-3} (3 * (2^{2(n-l)-2} - 2^{n-l-1})) - 2(n-3) - 1$$

$$= 3 * \left( \frac{4 * (4^{n-2} - 1)}{3} - (2^{n-1} - 2) \right) - 2n + 5$$

$$= 4^{n-1} - 3 * 2^{n-1} - 2n + 7 \quad \square$$

[그림 9]는 3-차원 피라미드 그래프 내에서 최대 NPC-간선을 보유하도록 해밀톤 사이클을 구성한 예를 보여주고 있는데 5개의 NPC-간선을 보유하도록 구성한 경우이다.

위의 분석과정을 통해 확인한 결과는 정방형 메쉬를 기본 그래프 구조로 내포하고 있는 피라미드 상호연결망 등의 사이클 결합을 통한 확장 가능성이나 고장-허용 관련 특성 등을 분석하는데 의미가 있을 것으로 판단된다.

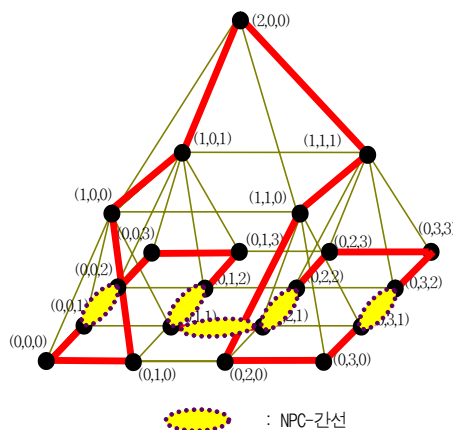


그림 9.  $P^3$ 에서 최대 NPC-간선 보유 해밀톤 사이클 구성 예

### IV. 결론

본 논문에서는 상호연결망 토폴로지 중의 하나인 피라미드 그래프의 기반을 이루고 있는 그래프의 관점에서 2-차원  $2^n$ -정방형 메쉬 그래프에 내재된 간선 특성을 분석하였다.

메쉬 그래프의 간선들은 메쉬 자체에서는 동등한 의미를 갖지만 피라미드 그래프의 부그래프로서의 관점에서는 상위 메쉬 부그래프에 존재하는 부모 정점들의 연결 형태에 따라 동일 부모를 공유하는 경우(SPC-간선)와 인접된 부모를 갖는 경우(NPC-간선)의 두 부류로 나눌 수 있는데 특히 NPC-간선들은 사이클 확장 및 고장-허용 특성과 관련하여 다양성을 제공한다라는 관점



에서 중요한 의미를 갖는다.

이러한 시도가 갖는 의미는 간선에서의 고장이 발생한 경우라 하더라도 해당 고장을 감내할 수 있도록 헤밀톤 사이클 등을 구성할 수 있는 기법을 연구하기 위해 특정 조건을 체계화시킴으로써 특정 그룹별로 요구되는 전제조건을 찾기 위한 노력의 일환으로 해석될 수 있다.

피라미드 그래프의 기반 구조를 형성하고 있는  $2^n$ -정방형 메쉬 그래프 내에서 구성 가능한 헤밀톤 사이클에 포함할 수 있는 NPC-간선 개수의 범위는 하한과 상한이 각각  $2^{2n-2}$ 와  $3*(2^{2n-2}-2^{n-1})$ 임을 증명하였다.

아울러 이 결과를 확장시켜  $n$ -차원 피라미드 그래프에서 헤밀톤 사이클 구성 시 포함가능한 NPC-간선의 개수를 분석한 결과 최대  $4^{n-1}-3*2^{n-1}-2n+7$ 개까지 포함될 수 있음을 확인하였다.

이와 같이 상호연결망 내에서의 사이클 특성과 관련된 연구가 갖는 의의는 그래프 이론적인 의미뿐만 아니라 다중 프로세서들로 구성된 병렬처리시스템 상에서 프로세서 상호간 방송 또는 멀티캐스팅 형태의 메시지 전송과정에서 사이클을 하부 구조로 이용하게 되는 응용 등에서 활용이 가능할 것으로 기대된다.

#### 참 고 문 헌

- [1] F. Berman and L. Snyder, "On mapping parallel algorithms into parallel architectures," J. of Parallel and Distrib. Comput., Vol.4, pp.439-458, 1987.
- [2] B. Monien and H. Sudborough, "Embedding one interconnection network in another," Computing Supplement, Vol.7, pp.257-282, 1990.
- [3] Y. Saad and M. H. Schultz, "Topological properties of hypercubes," IEEE Trans. on Comput., Vol.37, pp.867-872, 1988.
- [4] F. T. Leighton, *Introduction to Parallel Algorithms and Architectures: Arrays, Trees, Hypercubes*, Morgan Kaufmann Pub., 1992.
- [5] R. Miller and Q. F. Stout, "Data Movement Techniques for the Pyramid Computer," SIAM J. on Comput., Vol.16, No.1, pp.38-60, 1987.
- [6] Q. F. Stout, "Mapping Vision Algorithms to Parallel Architectures," Proc. of the IEEE, Vol.76, No.8, pp.982-995, 1988.
- [7] D. M. C. Ip, C. K. Y. Ng, L. K. L. Pun, M. Hamdi, and I. Ahmad, "Embedding Pyramids into 3D Meshes," Proc. of 1993 Int'l Conf. on Paral. and Distrib. Sys., pp.348-352, 1993.
- [8] K. -L. Chung and Y. -W. Chen, "Mapping Pyramids into 3-D Meshes," Nordic J. of Computing, Vol.2, No.3, pp.326-337, 1995.
- [9] 장정환, "피라미드의 3-차원 메쉬로의 신장율 개선 임베딩", 정보처리학회논문지-A, Vol.10-A, No.6, pp.627-634, 2003.
- [10] 장정환, "피라미드 그래프의 헤밀톤 특성", 정보처리학회논문지-A, Vol.13-A, No.3, pp.253-260, 2006.
- [11] Y. C. Tseng, D. K. Panda, and T. H. Lai, "A Trip-based Multicasting Model in Wormhole-routed Networks with Virtual Channels," IEEE Trans. on Paral. and Distrib. Sys., Vol.7, No.2, pp.138-150, 1996.
- [12] J. A. Bondy and U. S. R. Murty, *Graph Theory with Applications*, North-Holland, 1980.
- [13] S. -Y. Hsieh, "Fault-tolerant cycle embedding in the hypercube with more both faulty vertices and faulty edges," Parallel Computing, Vol.32, No.1, pp.84-91, 2006.
- [14] J. -S. Fu, "Conditional fault-tolerant Hamiltonicity of star graphs," Parallel Computing, Vol.33, No.7-8, pp.488-496, 2007.
- [15] T. -L. Kueng, T. Liang, L. -H. Hsu, and J. J. M. Tan, "Long paths in hypercubes with conditional node faults," Information Sciences, Vol.179, No.5, pp.667-681, 2009.
- [16] P. -Y. Tsai, J. -S. Fu, and G. -H. Chen,

"Fault-free longest paths in star networks with conditional link faults," Theoretical Computer Sciences, Vol.410, No.8-10, pp.766-775, 2009.

저 자 소 개

장 정 환(Jung-Hwan Chang)

정회원



- 1983년 2월 : 경북대학교 전자공학  
학과(전산전공)(공학사)
- 1985년 2월 : 한국과학기술원 전  
산학과(공학석사)
- 1998년 8월 : 한국과학기술원 전  
산학과(공학박사)

- 1985년 4월 ~ 2000년 8월 : (주)케이티(KT) 선임연  
구원
- 2000년 9월 ~ 현재 : 부산외국어대학교 디지털미디  
어학부 교수

<관심분야> : 그래프이론, 병렬처리, 통신망보안