

자유수면의 모의를 위한 레벨셋 기법의 적용

Application of the Level Set Method for Free Surface Modeling

이해균

단국대학교 천안캠퍼스 토목환경공학과

Haegyun Lee(haegyun@dankook.ac.kr)

요약

수리학에서 다루는 유체 현상은 물과 공기의 경계면인 자유수면을 포함할 때가 많다. 수표면의 곡률이 작은 경우에는 정수압 가정이 적절하지만, 그렇지 않은 경우에는 비정수압 분포를 고려하여야 한다. 이와 같은 문제에서는 수심적분된 천수방정식이 아닌, 네비어-스토크스 방정식(Navier-Stokes equations)에 의존해야 할 때가 많다. 특성이 다른 두 유체, 예를 들면, 물과 공기, 물과 기름과 같이 섞이지 않는 두 유체의 모의를 위하여 본 연구에서는 널리 알려진 레벨셋 기법을, 고전적인 문제인 댐 파괴 문제의 모의에 적용하여 이를 실험결과, 기존 수치모델링 결과와 비교하고 효율성을 확인하였다.

■ 중심어 : | 수리학 | 자유수면 | 레벨셋 기법 | 댐 파괴 |

Abstract

Hydraulics usually deals with flows with free surface. When the surface curvature is small, the assumption of hydrostatic pressure distribution is enough. However, in the case, when the curvature is big, the non-hydrostatic pressure distribution should be taken into account and the Navier-Stokes equations should be employed instead of the depth-averaged shallow water equations. For the simulation of two immiscible fluids with different characteristics (e.g. water and air, water and oil), the level set method is selected for this purpose. The developed model is applied to classical dam break problem and the computational results are compared with the experimental data. The effectiveness of the developed model is confirmed.

■ keyword : | Hydraulics | Free Surface | Level Set Method | Dam Break |

I. 서론

1. 자유수면 모의 기법

1.1 이상유동 (Two-Phase Flow) 모의

수리학에서 다루는 유체 현상은 물과 공기의 경계면인 자유수면을 포함할 때가 많다. 이를 어떤 방식으로

모의할 것인가를 결정하는 것은 물론 문제의 특성에 따라 다르다. 수심에 비하여 수평방향의 규모가 크고, 수표면의 곡률이 작은 경우에는 정수압 가정 (hydrostatic assumption)이 적절하지만, 그렇지 않은 경우에는 비정수압 분포를 고려하여야 한다. 비정수압 분포가 중요한 문제에서는 대체로 수심적분된 천수방정식이 아닌, 네

* 본 연구는 건설교통부 및 한국건설교통기술평가원 건설핵심기술연구개발사업의 연구비지원(06건설핵심B01)에 의해 수행되었습니다.

* 본 논문은 한국콘텐츠헬회 2010 춘계 종합학술대회 우수논문입니다.

접수번호 : #100707-004

접수일자 : 2010년 07월 07일

심사완료일 : 2010년 10월 25일

교신저자 : 이해균, e-mail : haegyun@dankook.ac.kr

비어-스토크스 방정식 (Navier -Stokes equations)에 의존해야 할 때가 많다.

특성이 다른 두 유체, 예를 들면, 물과 공기, 물과 기름과 같이 섞이지 않는 (immiscible) 두 유체의 모의는 유체역학에서 매우 어려운 문제로 오랫동안 알려져 왔다. 유체역학에서는 특히 기체와 액체가 혼재된 경우처럼, 상(phase)이 다른 두 유체의 흐름을 이상유동 (two-phase flow)이라고 구분하며, 다상 유동 (multi-phase flow)의 특별한 예로 분류한다. 자유수면과 같이 경계면을 포함하는 문제는 자연과학 및 공학의 여러 분야에서 나타나며, 이의 해석을 위하여 많은 연구자들이 노력을 기울이고 있다.

1.2 모의 기법의 분류와 레벨셀 기법

이상유동에 대한 전산유체역학(computational fluid dynamics)적인 접근방법에서 경계면인 자유수면의 거동을 해석하는 방법으로는, 고전적인 유체역학의 연구 방법 분류와 같이, 크게 오일러식 접근방법(Eulerian approach)과 라그랑지식 접근방법(Lagrangian approach)으로 구분할 수 있다. 라그랑지식 접근방법은 주로 가상적인 유체입자(particle)의 이동에 초점을 맞추고 있다. 대표적인 방법으로 SPH(Smoothed Particle Hydrodynamics, Gómez-Gesteira와 Dalrymple, 2004) 기법이 있다.

최근 많이 사용되고 있는 방법인, 오일러식 접근방법은 다시 계면추적방법 (interface tracking method)과 계면포착방법 (interface capturing method) 방법으로 구분할 수 있다. 경계일치 좌표계(body fitted coordinate)를 사용하여 자유수면이 해석을 위한 격자의 경계가 되도록 하는 방법이 계면추적방법에 속하는 반면, VOF (Volume of Fluid, Hirt 등, 1981)와 본 논문에서 소개할 레벨셀 기법 (Level Set Method)을 대표적인 계면포착 방법으로 분류할 수 있다.

본 연구에서 채택하고 있는 레벨셀 (Level set method) 기법은 UCLA의 수학자인 Stanley Osher와 캘리포니아 대학 버클리의 James Sethian 등에 의하여 1980년대에 제안되었다 (Osher와 Sethian, 1988). 그후, 많은 연구자들의 노력에 의하여 영상 이미지 처리, 컴퓨터 그래픽스, 계산 기하학(computational geometry),

최적화(optimization), 전산유체역학분야 등 여러 분야에 응용되어 지금에 이르게 되었다. 사실상 레벨셀이라는 말이 낯설 뿐, 영화, 광고 등을 통하여 이미 우리 주위에 가까이 와 있는 셈이다.

레블셀 방법과 VOF 방법은 기체와 액체의 경계면의 모의를 위하여, 다음과 같이 확산항이 없는 이송방정식 (advection equation)을 의존한다.

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \phi = 0 \tag{1}$$

여기서 ϕ 는 레벨셀 함수, \mathbf{u} 는 속도장(velocity field)이다. 이는 물과 공기의 경계면과 같이, 섞이지 않는 (immiscible) 두 유체의 모의를 생각한다면 경계면의 번짐(smearing)이 없어야 하기 때문에 당연한 것이다. 다만, VOF 방법에서 이를 수치격자내에서 서로 다른 유체의 부피 구성비(volume fraction)를 나타내는 일종의 지시함수의 이송방정식으로 해석하였고, 레벨셀 방법에서는 이를 자유수면에 대한 운동학적(kinematic) 경계조건의 적용이라는 관점에서 출발하였을 뿐이다.

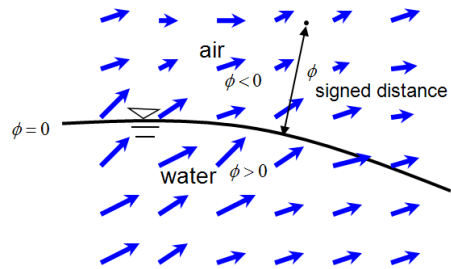


그림 1. 속도장과 레벨셀 함수

레블셀 방법에서는 이송방정식의 지시함수(레블셀 함수, ϕ)를 경계면으로부터 부호가 부여된 최단거리 (signed distance)로 정의한다 ([그림 1]). 즉, 예를 들면, 물과 공기의 경계면에서 물이 있는 영역은 경계면으로부터의 거리에 양(+)의 부호를, 공기가 있는 영역은 음 (-)의 부호를 부여한다. 계산한 속도장에 의하여 이송된 레벨셀 함수값이 경계면으로부터 거리가 되도록 재구성하는 과정을 재초기화(reinitialization) 또는 재거리

화(redistancing)라고 부르며, 각 시간 단계마다 수행하는 것이 보통이다. 대체로 재초기화는 기하학적인 방법을 사용하거나, 전 영역에서 경계면까지 거리 구배가 1이 되도록 편미분방정식을 적용한다.

본 연구에서는 유한요소법 기반의 3차원 Navier-Stokes 방정식 해석코드를 레벨셀 알고리즘과 결합하였다. 그리고, 개발된 모델을 댐 파괴-기둥 문제에 적용하였다.

II. 모형의 특성과 적용

1. 개발된 모형의 특성

1.1 흐름 모형

레블셀 함수의 이송방정식의 해를 구하기 위해서는 먼저 속도장을 구하여야 한다. 비압축성 흐름을 기술하는 네비어-스토크스(Navier-Stokes) 방정식과 연속방정식(continuity equation)은 다음과 같다.

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \mathbf{b} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3)$$

여기서 \mathbf{u} 는 속도장을, p 는 압력을, \mathbf{b} 는 체력(body force), 즉, 중력을 나타낸다. ρ 와 ν 는 각각 유체의 밀도와 동점성계수이다. 네비어-스토크스 방정식인 식(2)는 쌍곡선형/포물선형 편미분 방정식인 반면, 연속방정식인 식(3)은 타원형 방정식으로서, 두 종류의 방정식이 결합된 연립방정식의 수치해를 구하는 것은 압축성 유동에 비하여 정교한 알고리즘이 필요하다. 본 연구에서는 방정식의 공간적 이산화를 위하여 복잡한 경계면의 처리에 장점을 가진 유한요소법을, 시간적 적분을 위하여 단계적 기법 (fractional step method)를 사용하였다. 개발된 모형은 시간간격과 공간격자에 대하여 2차 정확도를 갖고 있으며, 상세한 해법에 대해서는 Lee (2007)에 설명되어 있다.

1.2 레벨셀 이송방정식

레블셀 함수(ϕ)의 이송방정식은 식 (1)과 같다. 매 시간 단계(time step)마다 흐름장(velocity field)을 계산하고, 레벨셀 이송방정식을 이용하여 새로운 자유수면의 위치를 계산하여야 한다. 자유수면의 위치가 결정되면, 이에 따라 각 계산 영역에 속한 유체의 밀도, 점성 등 물리적 특성을 갱신(update)하여야 한다.

레블셀 이송방정식으로 새로운 자유수면의 위치를 포착해 나갈 때, 레벨셀 함수값은 자체 경사(slope)의 완급화(steepeing and flattening)에 의하여 원래의 부호가 있는 거리(signed distance) 값을 유지하지 못한다 (Osher와 Sethian, 1988). 따라서, 유체의 경계면($\phi = 0$)을 유지하며, 재초기화(reinitialization) 과정을 통하여, 레벨셀 값을 다시 부호가 있는 거리 값으로 복원할 필요가 있다. 즉, 경계면으로부터의 구배가 1이 되도록, 본 연구에서는 다음과 같은 편미분 방정식을 이용하였다.

$$\frac{\partial \psi}{\partial \tau} + s(\psi_0)(|\nabla \psi| - 1) = 0 \quad (4)$$

여기서 $\psi_0(\mathbf{x}, \tau = 0) = \phi(\mathbf{x}, t)$ 이며, $s(\psi_0)$ 는 부호 함수(sign function)이다. τ 는 편의상 도입한 유사 시간(pseudo-time)이다. 재초기화 완료 후 다시 $\psi_0(\mathbf{x}, \tau)$ 는 레벨셀 함수 $\phi(\mathbf{x}, t)$ 로 환원된다. 본 연구에서는 재초기화과정을 매 시간 단계에서 수행하였다.

2. 모형의 적용

2.1 댐 파괴-기둥 모의

레블셀 기법의 적용 사례로서 정사각형 단면 기둥이 있는 댐 파괴-기둥 문제([그림 2])를 모의하였다. 댐 파괴 문제는 급격한 유량의 증가에 대한 적절한 모의 기법의 확립은 물론, 구조물에 작용하는 충격력의 산정이라는 측면에서 매우 중요한 문제로 알려져 있다. 초기조건에서 수체(water body)를 가두었던 막을 제거함으로써 수체가 기둥에 충격력을 가하고 반대편 벽에 부딪혀 다시 돌아올 때까지를 모의하였다. 수리실험(Ámason, 2005)은 워싱턴 대학(University of Washington)에서 수행되었으며,

중간에 위치한 기둥에 작용하는 충격력과 여러 지점의 유속에 대한 시간이력을 각각 로드 셀(load cell)과 레이저 도플러 유속계(LDV; Laser Doppler Velocimetry)를 이용하여 측정하였다. [그림 2]에 보인 바와 같이 댐 파괴-기둥 모의는 사각 기둥의 중심선에 대하여 대칭인 문제이므로 전체 계산영역의 1/2만을 계산영역으로 모의하였다. 모두 181,905 절점(node)과 169,752 육면체 요소(hexahedral element)를 사용하여 모의를 수행하였다. 계산 시간간격(time step)의 설정에는 CFL(Courant-Friedrichs-Lewy) 조건을 사용하였다. [그림 3]은 댐 파괴 이후 자유수면의 시간이력(time history)을 보인 것이다.

사각 기둥의 중심으로부터 상류방향(-x 방향)으로 14.6 cm, 바닥 지면으로부터 2.6 cm에 위치한 유속계로부터 측정한 유속 자료와 로드 셀에 의하여 측정된 충격력 값을 수치해와 비교하였다. [그림 4]은 x-방향 유속(u)에 대하여 Árnason (2005)의 실험값, 기존의 SPH 모의 (Gómez-Gesteira 와 Dalrymple, 2003)와 본 연구의 수치해를 비교한 것이다. [그림 5]는 본 연구에서 사각 기둥 표면의 압력(pressure)을 적분한 값을 각각 실험 결과, SPH 수치해와 비교한 것이다. 유속의 경우 SPH 기법에 의한 결과와 비교하여 큰 차이를 보이지 않지만, 사각 기둥에 작용하는 힘의 경우([그림 5]에, 레블셀 모의에 의한 결과가 실험 결과와 보다 더 잘 일치하는 경향을 보이고 있다.

레블셀 기법에 의한 모의의 정확도를 확인하기 위하여 다음 표1에 보인 바와 같이 실험값과 수치기법인 레블셀 기법, SPH 기법에 의한 결과를 오차를 이용하여 정량적으로 비교하였다. 수치해석에 의한 값에 대응하는 시점의 실험 자료를 선형 보간(interpolation)하여, 실험결과와의 차이를 절대값으로 최대값을 취한 E_{max} 와 RMS (Root Mean Square) 오차인 E_{rms} 를 비교하였다. 유속의 경우, $t = 2.0$ sec 부분 후반부에서 보이는 차이로 인하여 작은 차이로 오히려 SPH 기법이 작은 오차를 보이고 있으나, 기둥에 작용하는 힘의 경우에는 두 오차 모두 레블셀 기법이 좋은 결과를 보이는 것을 알 수 있다.

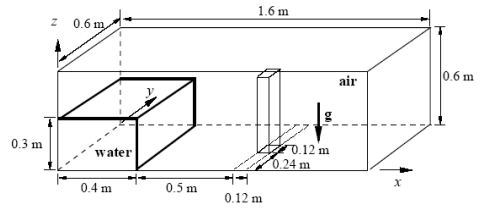


그림 2. 댐 파괴-기둥 모의

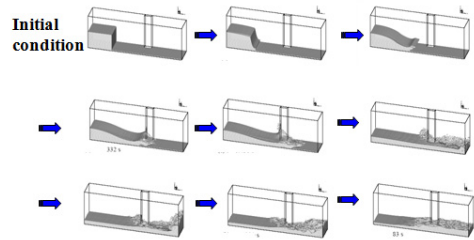


그림 3. 기둥 전면부의 유속 비교

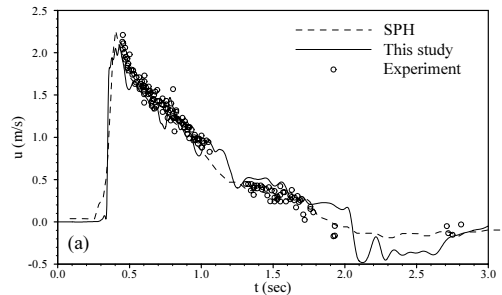


그림 4. 기둥 전면부의 유속 비교

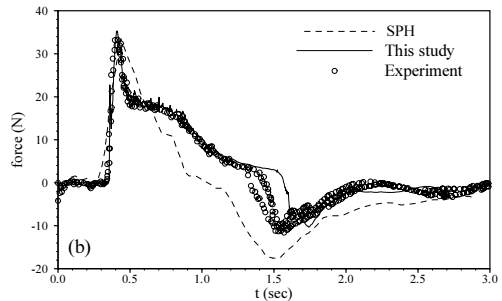


그림 5. 기둥에 작용하는 힘의 비교

표 1. 댐 파괴 - 기둥 모의의 오차

| 전면부 유속 | Emax | Erms |
|----------|--------|--------|
| SPH | 0.220 | 0.150 |
| LSM | 0.245 | 0.163 |
| 기둥에 대한 힘 | Emax | Erms |
| SPH | 17.628 | 13.524 |
| LSM | 15.327 | 6.171 |

III. 결론

본 연구에서는 레벨셋 기법을 이용하여 3차원 댐 파괴-기둥 문제를 모의하고 이를 실험결과, 기존의 수치 해석 결과와 비교하여 잘 일치함을 보였다. 향후 정교한 난류모형의 적용, 병렬처리 등의 추가 연구를 통하여 모형의 기능을 향상시킬 예정이다.

Comput. Phys., Vol.79, No.1, pp.12-49, 1988.

저 자 소 개

이 해 균(Haegyun Lee)

정회원



- 1995년 2월 : 서울대학교 토목공학과(공학사)
- 1997년 2월 : 서울대학교 토목공학과(공학석사)
- 2007년 7월 : 미국 아이오와 대학교 토목공학과(공학박사)

▪ 2009년 3월 ~ 현재 : 단국대학교 천안캠퍼스 토목환경공학과 전임강사

<관심분야> : 수리학, 전산유체역학, 수자원공학

참 고 문 헌

- [1] H. Árnason, "Interactions between an incident bore and a free-standing coastal structure," Doctoral dissertation, The University of Washington, Seattle, 2005.
- [2] M. Gómez-Gesteira and R. A. Dalrymple, "Using a 3D SPH method for wave impact on a tall structure," J. Waterway, Port, Coastal, Ocean Engineering, 130, 2, pp.63-69, 2004.
- [3] C. W. Hirt and B. D. Nichols, "Volume of fluid (VOF) methods for the dynamics of free boundaries," J. Comput. Phys., Vol.39, pp.201-225, 1981.
- [4] H. Lee, "Level-Set Finite Element Simulation of Free-Surface Flow," Doctoral dissertation, The University of Iowa, Iowa City, 2007.
- [5] S. Osher and J. A. Sethian, "Fronts propagating with curvature-dependent speed: Algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations," J.