

원-달러 변동성 및 옵션 모형의 설명력에 대한 고찰

Volatilities in the Won-Dollar Exchange Markets and GARCH Option Valuation

한상일

한국기술교육대학교

Sang-Il Han(sihan@koreatech.ac.kr)

요약

원-달러 장외 외환 시장은 1990년말 외환위기 및 2008년 서브프라임 위기에 극심한 변동성을 보였으므로 변동성 연구에 적합한 특성을 띤다. 본고는 ARCH 모형에 기반해 옵션 가격 결정 모형을 제시한 Duan, Heston and Nandi의 GARCH 모형으로 외환 옵션 시장에서 변동성의 특성이 옵션 가격에 반영되는 정도를 분석해 보았다. 2006년 5월부터 2013년 1월까지 원-달러 장외시장에서 거래되는 옵션 자료에 대해 본고는 세 가지 모형(Black and Scholes, Duan, Heston and Nandi)간의 설명력을 비교했다. 최우추정법으로 계산된 모수를 고정하고 전일 내재 변동성을 이용하여 당일의 이론 가격을 구해 오차를 계산하면 Duan 및 Black and Scholes 모형 모두 약 0.1% 수준을 보인다. 다만 Heston and Nandi는 상기 두 모형에 비해 큰 오차값을 가지며 또한 만기가 길어지면 설명력이 약해진다. 따라서 원-달러 외환 옵션시장의 경우 Duan 또는 Black and Scholes 모형을 이용하여 가치를 측정하는 것이 유용할 것으로 사료된다. 또한 정책적 시사점으로는 외환 현물 시장의 과거 변동성 평균이 14% 전후에서 형성되었으므로 내재 변동성 5% 전후에서 외환 옵션 등을 매매하는 것은 매도자에게 대규모 손실을 초래할 수 있다.

■ **중심어** : | 외환시장 | 내재 변동성 | GARCH 옵션 | 변동성 군집 | 비대칭성 |

Abstract

The Korean Won-Dollar exchange markets showed radical price movements in the late 1990s and 2008. Therefore it provides good sources for studying volatility phenomena. Using the GARCH option models, I analysed how the prices of foreign exchange options react volatilities in the foreign exchange spot prices. For this I compared the explanatory power of three option models(Black and Scholes, Duan, Heston and Nandi), using the Won-Dollar OTC option markets data from 2006 to 2013. I estimated the parameters using MLE and calculated the mean square pricing errors. According to the my empirical studies, the pricing errors of Duan, Black and Scholes models are 0.1%. And the pricing errors of the Heston and Nandi model is greatest among the three models. So I would like to recommend using Duan or Black and Scholes model for hedging the foreign exchange risks. Finally, the historical average of spot volatilities is about 14%, so trading the options around 5% may lead to serious losses to sellers.

■ **keyword** : | Won-Dollar Exchange Markets | Duan(1995) | Heston and Nandi(2000) | Foreign Exchange Options |

* 익명의 세분 심사자자의 논평에 감사하며, 가격 자료를 제공해주 로이터 및 한국채권평가에 감사한다.

접수일자 : 2013년 11월 21일

심사완료일 : 2013년 12월 03일

수정일자 : 2013년 11월 28일

교신저자 : 한상일, e-mail : sihan@koreatech.ac.kr

I. 서론

금융상품중 콜(put)옵션은 보유자에게 계약만료 시점에 의무가 없이 매수(매도)권리만을 부여하므로 가격 변화에 대해 비대칭적으로 대응하는데 사용될 수 있다. 따라서 콜-풋 옵션을 동시에 매매하는 전략은 가격변화보다 변동성 변화에 의해 손익이 결정되는 구조를 보일 수 있다. 장외시장의 경우 옵션의 매도와 매수를 동시에 하는 제로 코스트 옵션의 경우 초기에 자금의 흐름이 0이므로 기업들이 환위험의 헤지를 위해 많이 사용한다. 금융기관은 KIKO와 같이 초기시점에 양의 자금흐름 만기시에 음의 자금흐름을 제공하는 상품으로 기업의 매매를 유도하기도 한다.

2008년 서브 프라임 금융위기사 원-달러 변동성은 크게 확대되었다. 당시 국내 중소기업은 원화 강세에 대비해 KIKO 옵션 등에 내재된 원-달러 장외 옵션에 대한 매도를 했다. 하지만 원화가치 하락과 변동성 증대로 인한 만기시 음의 자금흐름의 확대로 큰 손실이 발생했다. 이후 동 매매 자체의 적법성 및 매매가격의 적절성에 대한 논란이 가중되고 있다. 재판과정에서 보면 중소기업들은 옵션의 성질을 모르고 KIKO와 같은 복잡한 이색옵션 거래를 함으로써 큰 손실을 경험했다. 이와 같은 사건이 재발하여 국민 경제적 피해가 발생하는 것을 최소화하기 위해서 외환 옵션에 대한 연구가 풍성해져야 한다. 또한 실물 옵션 모형은 기술 가치 평가 등에 최근 많이 사용되고 있다. 따라서 고도기술사회를 지향하기 위해서도 옵션에 대한 연구는 그 의의가 있을 것이다.

옵션의 가치 측정에 대한 논의는 변동성을 고정하고 충격의 대칭성을 가정하는 Black and Scholes(이하 BS, 1973)[6] 모형에 기반해 이루어지고 있다. 금융 시계열은 자기 상관성 등으로 변동성이 커지면 그 현상이 군집(clustering) 형태로 발생하는 것과 뉴스(호재, 악재)에 대한 반응이 비대칭적인 특징을 보인다. 계량 모형 중 ARCH 및 이의 확장 모형을 이용하면 이러한 변동성의 특성이 분석될 수 있다. 그런데 우리나라 외환 시장은 1990년말 외환위기 및 2008년 서브프라임 위기때 극심한 변동성을 보였으므로 변동성 연구에 적합한 특

성을 보인다. 기존 BS 옵션 모형은 기초 자산의 가격 과정을 기하 브라운 운동(GBM, geometric Brownian motion)으로 간주하므로 변동성의 변동성이 변하는 것을 반영하지 않는다. 반면 Duan(1995)[10], Heston and Nandi(이하 HN, 2000)[13] 모형은 변동성의 변동을 반영한 이산 관측 과정을 기초 가격 과정으로 가정하고 옵션의 이론 가격을 제시한다. 실제 시장에서 변동성 자체도 시변하므로 동 모형들은 변동성의 변동을 반영하는 유용한 모형으로 판단된다.

본고는 ARCH 모형에 기반해 옵션 가격 결정 모형을 제시한 Duan의 GARCH(이하 D-GARCH) 및 HN의 GARCH(이하 HN-GARCH) 모형을 이용하여 원-달러 현물 시장에서 변동성의 군집 및 비대칭성을 추정해 보았다. 그리고 Reuter에서 제공하는 우리나라 장외 외환 옵션 시장자료를 이용하여 변동성의 특징이 반영되는 정도를 동 저자들의 옵션 모형으로 분석해 보았다. HN-GARCH 모형의 경우 기존 통계 S/W에서 추정치를 제공하지 않으므로 이에 대한 실증분석이 많지 않다. 본고는 최우추정법(MLE)을 이용하여 D-GARCH 및 HN-GARCH를 추정하였다.

시장에서 널리 인용되는 연속시간 모형인 BS 모형에서 가격을 이용해서 변동성을 역산한 내재 변동성은 순간 변동성의 일정 기간 동안 평균적 움직임을 나타낸다. 따라서 이산 모형을 가정하고 기초 자산 과정에서 추정된 변동성과 차이를 보일 수 있다. 이럴 경우 모형의 모수와 이산 관측 자료를 이용한 추정치간 수렴 문제가 발생한다. 또한 BS 모형은 시장에서 외가격 옵션의 내재 변동성이 등가격 옵션의 그것보다 높은 스마일 현상을 용이하게 설명하지 못한다. 그리고 종종 시장에서 관측되는 변동성 군집을 효과적으로 설명하지 못한다. 기초 자산에 대한 GARCH 과정을 가정한 후 유도된 옵션 모형의 단편 해는 HN에 의해 처음으로 제시되었다. 실증분석을 보면 Christoffesen et. al.(2008)[9]이 GARCH 옵션의 실증분석을 제시했다 또한 Huang et.

1 본고는 현업에서 사용 가능한 모형으로 모의실험에 기반한 Duan 모형과 해석해를 사용하는 HN 모형을 비교한다. 모의실험을 사용하는 측면에서 Duan 모형과 Duan, Gauthier and Simonato(1999) 모형간의 비교가 더 유용할 수도 있으나 동일한 연구자에 의한 모형이므로 이는 제시하지 않았다.

al.(2012)[14]은 GARCH 형태의 기초 자산의 가격 과정을 위험 중립 확률 과정으로 전환하는 방법을 제시하고 있다. 국내에서는 외환 시장의 변동성 전반에 대한 고찰은 서영경, 성광진, 김동우(2011)[3]이 있다. 그리고 장국현(2001)[4]은 확률 변동성 자체를 측정하는 방법을 제시했다. 또한 전상원, 강신애(2012)[5]는 외환파생상품이 기업 가치에 유의적 영향을 미치지 않는 것으로 보고하고 있다. KOSPI200 옵션 시장에 대한 실증분석은 김무성, 강태훈(2007)[1] 등이 있다. 원-달러 시장에 대한 GARCH 옵션 등에 대한 국내 연구는 아직 초기 상태인 것으로 보인다. 본고는 기초 가격 과정에 대해 일반 통계 S/W에서 제공하지 않는 D-GARCH, HN-GARCH 모형을 MLE로 추정했다. 그리고 옵션 시장 가격 자료에 대해 Duan 옵션 모형과 HN 옵션 모형 간의 비교를 통해 변동성 특징이 옵션 시장에 반영되는 정도를 보고자 한다. 또한 이렇게 추정된 GARCH 옵션 모형의 모수가 가격 결정 및 헤징에 대해 갖는 시사점을 제시하고자 한다.

본고는 다음과 같이 구성되어 있다. 먼저 제 2장에서는 GARCH 옵션 모형을 다룬다. 그리고 제 3장에서는 현물 원-달러 환율에 대해 D-GARCH 및 HN-GARCH 모형을 MLE로 추정해 보고 옵션 모형을 통해 실증 분석을 한다. 이후 제 4장에서는 결론을 맺는다.

II. GARCH 옵션 모형

1. 변동성의 자기 상관성에 대한 모형

금융 시계열에 대한 모형을 구축하는 경우 기초 자산의 가격 과정인 GBM은 변동성을 상수로 가정하고 극치 사건이 정규분포로 발생한다. 하지만 현실 세계는 극치 사건이 동 모형이 가정하는 것보다 빈번하게 발생하는 경향(fat tail)을 보인다. 이러한 문제는 변동성 자체가 자기 상관성을 띠는 가정을 도입하면 해결될 수 있다. 즉 변동성의 변동성을 가정하는 것이다. 이중 GARCH(1,1) 모형은 AR(autoregressive) 및 MA(moving average)를 1차원으로 가정하고 금융 시계열 자료를 적절히 설명하는 것으로 알려져 있다. 그

런데 옵션 모형을 구축하려는 경우 위험 중립 과정으로 변환이 용이한 GARCH 모형이 필요하다. 일반 GARCH 모형에서 조건부 분산 h 은

$$h(t) = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j h_{t-j} \quad (1)$$

과 같이 자기 회귀적 형태를 띠고 있다. 여기에서 ϵ 은 오차 항, ω , α_i , β_i 는 모수이다. Duan 옵션 모형은 상기 식을 변형해 오차항 ϵ_t 및 정규 확률 변수 z_t 를 이용해 조건부 변동성을

$$h_t = \omega + \beta_i h_{t-1} + \alpha_i \epsilon_{t-1}^2, \quad (2)$$

$$\epsilon_t = \sqrt{h_t} z_t$$

로 가정한다. 또한 GARCH-M 모형과 유사하게 가격 과정 $S(t)$ 가

$$\log(S(t)) = \log(S(t-\Delta)) + r + \lambda h(t) - \frac{1}{2} h(t) + \epsilon_t \quad (3)$$

를 따른다고 가정한다. 따라서 Duan의 GARCH 옵션 모형에서 모수는 GARCH-M을 변형하여 추정될 수 있다. 반면 HN는 Duan과 다르게 ϵ_t 를 분리하여 새로운 모수 γ 를 도입하고 잔차항을 정규분포 항 및 조건부 분산으로 분해하는 가정을 한다. 기초 자산의 가격 과정에 대한 HN-GARCH 모형은 최우추정법(MLE)으로 추정될 수 있다. 일반 GARCH 모형과 동일하게 로그 우도함수는

$$\ln(\theta|y) = -\frac{1}{2} \sum (\ln(2\pi) + \ln(h_t) + \frac{(y_t - \mu_t)^2}{h_t}) \quad (4)$$

로 표현되며, $\mu_t = r + \lambda h_t$ 이다. 이때 h_t 에 HN-GARCH모형의 특성을 반영하면 모수를 MLE로 추정할 수 있다. 본고는 Stata ML 함수를 이용하여 기

초 가격 과정을 추정했다. HN 모형은 Duan 모형보다 기초 자산 가격과정을 제한함으로써 닫힌 해 및 이에 따른 델타 등과 같은 Greek를 유도한 점에서 차이를 보인다.

2. Garch 옵션 모형

콜옵션은 매수자에게 권리만을 부여하므로 기초자산의 가격을 S , 행사가격을 K , 만기를 T 로 나타내면 만기시 손익은 $\max(S_T - K, 0)$ 로 결정된다². BS의 옵션 가격 공식은 기초자산이 상수인 변동성 모수 σ 에 의해 표현되는 GBM을 따르는 경우 만기시 손익을 무위험 이자율 r 로 할인해 현재 가치로 표현한 공식이다. 따라서 BS 공식은 기초자산의 현재가격, 행사가격, 만기, 변동성 및 무위험이자율에 의해 표현된다. 타 모수는 고정하고 시장에서의 옵션 가격과 이론 가격을 일치시켜 주는 변동성은 내재변동성으로 칭해진다. 동 값은 만기에 따른 특정기간동안의 정보이므로 기초 가격 과정의 순간 변동성의 평균값이다. 동 모형을 적용하려는 경우 모형의 모수와 현실 세계에서 관측되는 통계치간 관계가 규명되어야 한다. 보통 연속 가격 모형을 이항(binomial) 근사하면 동 근사 과정이 연속 모형에 수렴하느냐는 문제가 발생한다. 또한 동 모형은 시장에서 관측되는 외가격 옵션의 내재 변동성이 내가격 옵션의 그것보다 월등히 높은 스마일 현상 등을 적절히 설명하지 못한다. 이처럼 GBM에 기초한 BS 모형 자체는 현실 세계의 가격의 동학을 정확히 기술하지 못하는 한계를 갖는다. 이를 극복하기 위해 확률 변동성 모형이 Heston(1993)[12] 등에 의해 제안되었으며 확률 과정 자체가 점프를 포함하는 Levy 과정으로 확장하는 방법이 있다. 하지만 이러한 모형도 연속 시간 모형이므로 기초 자산 가격 과정을 가정하고 추정된 모수와 이산 관측으로 추정된 모수간 관계가 명확하지 않는 문제를 갖는다. 따라서 복잡한 연속시간 모형은 기초 자산 가격 과정에서 추정된 모수가 아닌 유동성이 높은 상품의 가격 자료를 이용하여 역산된 모수를 추정한다. 이렇게 계산된 모수를 이용해 유동성이 낮은 타 상품의 가격이 산정된다.

2 이에 대칭하여 풋 옵션은 $\min(K - S_T, 0)$ 로 결정된다.

반면 이산 모형을 가정하고 위험 중립 확률(risk neutral probability) 하에서 가격 결정 공식이 유도되면 이러한 문제가 완화된다. 또한 이산 모형이 연속 모형에 수렴하는 경우 연속 모형에서 개발된 다양한 분석 방법이 적용 가능하다. 상기 식 (3)에서 λh_t 는 위험 프리미엄에 대응하는데 위험 중립 측도하에서 제거되어야 한다. Duan(1995)[10]은 위험 중립 확률 Q 및 시점 t 까지의 정보 집합 \mathfrak{N}_t 하에서 가격 과정이

$$\log(S(t)) = \log(S(t - \Delta)) + r - \frac{1}{2}h(t) + \epsilon_t \quad (5)$$

임과 조건부 분산이

$$h(t) = \omega + \beta h(t-1) + \alpha(\epsilon(t-1) - \lambda \sqrt{h_{t-1}})^2 \quad (6)$$

로 전환됨을 보였다. 따라서 행사가격 K 인 콜 옵션의 가치 결정 함수는 가치결정 정리에 의해

$$C^Q = e^{-r(T-t)} E^Q[\max(S_T - K, 0) | \mathfrak{N}_t] \quad (7)$$

가 된다. 여기에서 ϵ_t 은 분산이 h_t 를 따르는 정규 확률 변수이다. 몬테카를로 모의실험으로 상기 식 (7)에 따라 옵션 가격이 계산될 수 있으며 이때 $N(0,1)$ 을 따르는 정규 확률 변수를 이용하여 ϵ_t 가 생성되어야 한다. 본고는 Duan(1995)[10]의 EMS(empirical martingale simulation)을 이용하여 옵션 가치를 모의실험으로 계산했다. 그런데 몬테카를로 모의실험은 감마 등의 계산에서 불안정성을 보일 수 있다. 따라서 GARCH 가격 과정을 가정하고 닫힌 해를 가진 옵션 모형이 필요한데 HN 모형은 GARCH를 가정하고 식 (7)에 대응하는 닫힌 해를 제시한다. 위험 중립 과정하에서 GARCH 과정에 따른 모수가 반영된 생성함수를 $f^*(\phi)$ 로 표현하자. 그러면 위험 중립하에서 가격결정 정리³를 이용하면 콜 옵션의 가격이

3 이에 대한 자세한 내용은 Carr-Madan(1999)[8]를 참조하시오.

$$C = \frac{1}{2}S(t) + \frac{e^{-r(T-t)}}{\pi} \int_0^\infty \text{Re} \left[\frac{K^{-i\phi} f^*(i\phi + 1)}{i\phi} \right] d\phi - Ke^{-r(T-t)} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \text{Re} \left[\frac{K^{-i\phi} f^*(i\phi + 1)}{i\phi} \right] d\phi \right) \quad (8)$$

를 만족함을 보일 수 있다. 여기에서 Re 는 복소수에 대해 실수 부분만의 값을 나타낸다. 상기 식 (8)에서 변동성의 변동성을 나타내는 모수를 모두 제거하여 변동성을 상수항으로 전환하면 HN 공식은 BS 공식으로 변환된다. 따라서 HN 공식은 BS 공식을 내포하므로 두 모형의 설명력을 동일한 조건하에서 비교하면 HN의 설명력이 높게 나올 것이다. 이러한 문제를 극복하기 위해 실증분석에서 BS 모형의 경우 하나의 모수인 σ 를 직전일의 시장가격에 맞추어 추정된 후 해징 결과가 산출될 수 있다. 그리고 HN 모형의 경우 변동성의 변동성을 나타내는 모수를 고정하고 오차가 계산된 후 두 모형간 설명력이 비교될 수 있다.

III. 변동성의 자기 상관성에 대한 실증분석

1. 기초 자산의 기술 통계량

외환 시장은 크게 역내 및 역외시장이 있는데 주식 시장과 다르게 역외시장에서 주된 매매가 발생한다. 선도시장의 경우 원화로 현물정산을 하지 않고 달러화로 현금정산을 하는 NDF 시장을 중심으로 발달이 이루어졌다. 따라서 외환 옵션시장도 장외시장에서 이루어지는 가격이 주된 분석대상이 된다. Reuter에서 제공하는 우리나라 장외 외환 옵션 시장자료를 보기 전에 기초자산인 현물환율을 먼저 보자. [표 1]은 2008년 5월 2일부터 2013년 1월 18일까지의 일별 현물 원/달러 환율 수준 및 수익률을 %로 나타내고 있다. 연율화한 일별 평균 수익률이 0.11%로서 0에 근접한 값이며 이에 비해 수익률의 표준편차는 약 14.5%이다. 일간 수익률을 보면 최소값이 -13.2%이고 최대값이 10.2%로서 환율이 하락하면 상승 폭에 비해 하락 폭이 크게 발생한다. 한

미간 이자율은 1년 만기 이자율(Fed 1년, 국고채 1년) 간 차이이다. [그림 1](좌)의 수익률을 보면 원화는 2008년 및 2009년에 변화폭이 크다. [그림 1](우)는 수익률의 제곱 값인데 이는 조건부 분산 정보를 나타낸다. 조건부 분산도 2008년 및 2009년에 크게 확대됨을 알 수 있다.

표 1. 현물 환율의 통계치

	평균	표준편차
환율	1100.3	134.2
일간 수익률	0.11	14.5
한미간 이자율차(bp)	-2.33	1.32

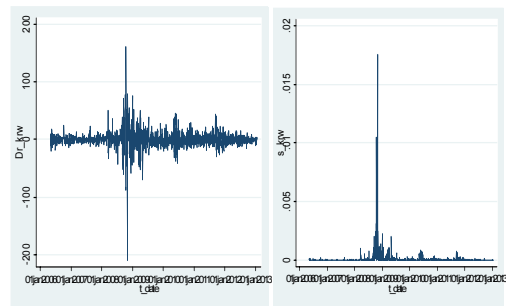


그림 1. 원-달러 일별 수익률 및 제곱 수익률

모형을 추정함에 있어 2008년 서브프라임 사건으로 인해 외환 시장에서 가격의 급변동이 관측된다. 따라서 동 기간을 중심으로 검증 기간을 분리하는 것이 유용할 것이다. 이에 본고는 2009년 6월까지의 기간을 전반기, 이후 기간에서 2013년 1월까지를 후반기로 하여 모수를 추정하고자 한다. 자료기간이 2006년부터 시작하면서 중간에 외환 시장의 급변동 시기를 포함하므로 변동성 군집 현상을 설명하는 모형을 적용하는데 유용할 것이다. Duan 옵션 모형에 필요한 모수는 $r, \alpha, \beta, \lambda, h_t, T$ 인데 이 중 단기 이자율 r 은 상수로 반영하며 동 수치의 수준에 따라 위험 프리미엄 λ 가 결정된다.

표 2. Duan(1995)[10] 모형의 모수

	변수	추정치
전구간	λ	0.022742
	ω	3.66e-07
	α	0.105731
	β	0.888520
전반기	λ	0.054341
	ω	5.62e-07
	α	0.155121
	β	0.838064
후반기	λ	-0.00633
	ω	2.24e-07
	α	0.082256
	β	0.915195

D-GARCH 모형의 경우 GARCH-M과 유사하므로 MLE를 통해 모수를 추정해 보면 다음 [표 2]와 같다. 위험 프리미엄에 대응하는 λ 는 외환시장의 경우 사전적으로 양의 값을 띠는 것은 아니고 단기 이자율에 대한 가정에 민감하다. 본고는 단기 이자율로 0.1%를 가정하고 모수를 추정했다. 변동성의 변동성을 나타내는 ω 는 매우 낮은 수준으로 추정되어야 하는데 3.66e-07 이므로 비교적 이를 만족하는 것으로 보인다. ARCH 및 GARCH 효과에 대응하는 α, β 가 각각 0.1057307, 0.8885197로 추정되어서 두 수치의 합이 1보다 작아 안정성 조건을 만족한다. 또한 p 값도 0.001보다 작아 GARCH 모형으로 수익률의 설명이 된다. Duan(1995)[10]에서 S&P 지수 옵션에 대해 NLS 로 추정한 모수는 $\omega=1.524e-5$, $\alpha=0.1883$, $\beta=0.7162$ 및 $\lambda=7.452e-3$ 이다. 이에 비해 원-달러 환율시장의 β 가 높게 추정되는 것을 알 수 있다. λ 는 단기 이자율 수준에 민감한 수치이므로 그 의미가 약하다. 변동성의 변동성을 나타내는 ω 는 Duan 모형 및 본 논문의 추정치 모두 매우 낮은 값을 알 수 있다.

HN 옵션 모형은 Duan 모형에 더해 모수로 γ 를 필요로 하며 동 모수는 비대칭성(skewness)을 통제하는 변수이다. 만일 $\gamma=0$ 이면 분포 함수는 대칭이다. 그리고 안정성 조건은 $\alpha\gamma^2 + \beta < 1$ 로 바뀌게 된다. MLE를 이용하여 모수를 추정한 [표 3]을 보면 안정성 조건이 충족됨을 알 수 있다. 다만 α, γ 를 보면 부호가 반

대로 추정되고 있다. 특히 $\gamma < 0$ 이므로 환율이 상승하면 변동성이 낮아지는 것이 아니고 증가하는 경향이 있는 것으로 판단되며 비대칭성이 존재한다. 즉 주식 시장의 경우 주가가 고점에 이르면 변동성이 낮아지는 현상이 관측되나 외환 시장은 반대되는 현상이 관측된다. HN에서 미국 주식시장에 대해 MLE로 추정한 모수 값은 $\alpha=1.32e-6$, $\beta=0.589$, $\gamma=421.39$, $\omega=5.02e-6$, $\lambda=0.205$ 인데 원-달러 시장의 경우 이에 비해 β 추정치가 0.87~0.95 수준이다. 따라서 현재 조건부 분산이 과거 조건부 분산에 영향을 받는 자기 회귀성이 강한 것으로 보인다. 이는 극심한 가격 변동이 관측된 2008년 및 2009년을 제외하면 델타 헤징을 통해 옵션의 수익 복제가 주식 시장보다 용이할 수 있음을 의미한다. [표 3]의 추정치는 [표 2]의 α, β 에서 합치되는 결과를 보인다.

표 3. HN(2005)[13] 모형의 모수

	변수	추정치
전구간	λ	0.7481
	ω	-1.05e-6
	α	2.45e-6
	β	0.9504
	γ	-97.3442
전반기	λ	-0.0585
	ω	-1.41e-6
	α	2.54e-6
	β	0.87367
	γ	-205.47
후반기	λ	-3.7217
	ω	-1.37e-8
	α	1.72e-6
	β	0.88213
	γ	-205.17

2. 내재 변동성 자료의 구조 및 기술 통계량

BS 모형에서 타 변수가 고정되어 있는 경우 변동성과 옵션 가격은 일대일 대응관계를 갖는다. 따라서 가격은 변동성으로 표현될 수 있다. 이때 내재 변동성은 옵션 만기까지 미래에 실현될 가격의 변동에 대한 예측치가 된다. 따라서 만기에 따른 내재 변동성을 연월화하면 단일한 단위 기간(1년)으로 만기에 따른 변동성이

비교될 수 있다. 일반적으로 옵션의 유동성이 높은 경우 만기 및 행사가격에 따른 옵션 가격의 특성이 파악될 수 있다. 하지만 원-달러 옵션의 경우 장외 시장 중심으로 매매가 이루어지므로 등가격 옵션만이 유동성을 충분히 갖는다. 이에 등가격 옵션에 대한 내재 변동성을 보자. 특정일에 만기가 되는 장내 옵션과 다르게 장외 옵션은 만기(예 : 1개월) 자체가 고정된 상품이 매매된다.

[표 4]에서 변동폭인 표준편차를 보면 1개월 만기 옵션이 제일 큰 것을 알 수 있다. 내재 변동성의 최소값은 3.3%이며 최고값은 75%이어서 그 진폭이 매우 크다. 시장 가격인 내재 변동성의 평균이 11~12%에서 형성되고 있는데 동일한 기간 동안 현물 외환 수익률의 일간 수익률 연율화된 표준편차가 약 14.5%이므로[표 1] 내재 변동성이 현물의 표준편차보다 낮은 수준에서 형성되는 경향이 있다. 그리고 과거 경험을 보면 KIKO 옵션의 매매는 현물 변동성 평균 14.5%와 큰 차이를 보이는 내재 변동성 5% 전후에서 주로 이루어졌는데, 이러한 매매는 옵션매도자에게 대규모의 손실을 초래했다.

[그림 2]에서 SW는 만기 일주일에 대응하는 내재 변동성이다. 나머지는 만기 월에 따라 분류된 그림이며, 만기 1개월에 대응하는 내재 변동성의 변화가 제일 큰 것을 알 수 있다. 내재 변동성 자체를 보면 잡음적 성격을 띠는 부분이 많으며 자기 회귀성이 강한 것을 알 수 있다. 또한 만기 1개월을 중심으로 옵션의 만기가 길어지거나 작아지면 변동성이 낮아지는 경향이 있다. 이와 같은 변동성의 기간구조는 변동성이 매우 낮은 수준인 5%미만에서도 나타나는 경향이 있다. 2008년전 내재 변동성을 보면 2008년 및 2009년에 비해 매우 낮은 수준에서 형성되고 있으며 2013년 현재 시점을 보면 역시 변동성이 매우 낮아진 상황이다. 실제 시장에서 KIKO 거래가 집중적으로 이루어진 시기는 2008년 초이며, 당시에 내재 변동성은 5% 전후로서 매우 낮은 수준에서 중소기업들이 옵션을 매도함으로써 대규모 손실을 경험했다.

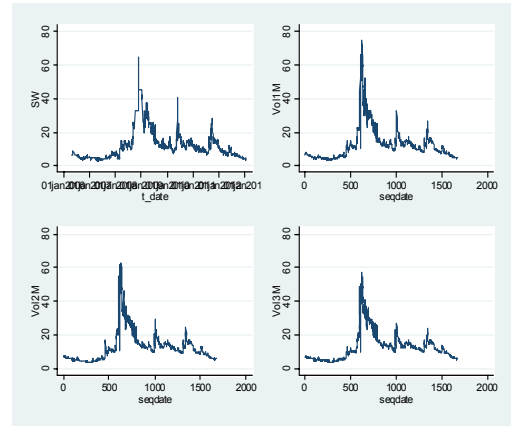


그림 2. 만기별 원-달러 내재 변동성
* SW는 만기 일주일에 대응하는 내재 변동성이다.

표 4. 내재 변동성의 통계치

	평균	표준편차
SW	11.91	8.6
1M	12.57	10.0
2M	12.49	9.1
3M	12.38	8.3

3. GARCH 옵션 모형 설명력 검증

Duan 및 HN 모형은 기초 자산 과정을 직접 추정하지 않고 GARCH 모수를 행사가격 및 만기별 옵션 가격 자료를 사용하여 NLS 방법으로 추정했다. 가격 자료의 경우 미래 예측 정보가 포함되어 있으므로 동 방법은 미래 가격 움직임에 대한 적절한 추정방법으로 보인다. 이러한 접근 방법은 옵션 가격 자료가 등가격 이외에서도 충분히 주어지는 경우에 적절하다. 그런데 원-달러 옵션 시장의 경우 장외 시장 중심으로 발달되어 있으므로 내가격이나 외가격 옵션의 유동성이 낮다. 이럴 경우 추정된 모수와 기초 자산 과정에서 직접 추정된 모수간에 상치된 현상이 발생할 수 있다.

Reuter가 제공하는 국내 원-달러 장외 옵션시장 자료를 보면 등가격 옵션에 대한 내재 변동성만이 제공되므로 옵션 가격 자료를 이용한 NLS 방법에 따른 모수의 추정은 자유도에서 문제가 발생할 것이다. 따라서 본고는 NLS 방법보다 기초 자산의 시계열 자료를 이용하여 추정된 모수를 이용하여 모형간 설명력을 비교하

고자 한다. 또한 HN 모형과 다르게 가격 오차를 측정하지 않고 변동성 오차를 측정하고자 한다⁴. 가격 오차는 가격 수준에 민감하나 변동성 대비 오차는 직관적으로 오차의 범위를 알 수 있다. 모형에 따른 오차 값은 오차 값의 평균을 구한 후 이의 제곱 값을 구한 RMSE(root mean square)와 오차 절댓값의 평균인 MAE를 모두 구했다. 그리고 대상 상품은 만기 일 주, 1개월 및 2개월로 하였으며 내재 변동성의 시계열이 유사하므로 나머지 만기물에 대해서도 오차에 대한 유사한 결과를 얻을 수 있을 것이다. 내재 변동성 시계열의 자기 회귀성이 강하므로 직전일 $t-1$ 의 내재 변동성을 변동성으로 사용하여 당일 t 시점의 이론 가격을 구하면 모형의 추정 오차가 작을 것이다.

본고는 적정 가치를 구하기 위해 Duan 및 HN 모형의 경우 기초 자산 가격 자료를 이용해 MLE로 추정된 모수를 전 구간에서 걸쳐 사용했다(정적방법). 그리고 단기 이차물에 대해 원화는 4.5%를 미 달러화는 4.0%를 가정했다. 조건부 분산 h_t 에 대해 각 시점마다 다른 값을 적용할 수 있다. 즉 Duan 및 HN 모형의 경우 전 구간에서 걸쳐 내재 변동성의 평균에 대응하는 h_t 를 고정된 값을 사용하며 BS 모형 역시 전구간에서 내재 변동성의 평균을 사용했다. 시점 t 에서 보면 $t-1$ 시점의 내재 변동성은 주어진 정보이다. 또한 내재 변동성의 자기 상관성이 높으므로 $t-1$ 시점의 내재 변동성을 이용하여 옵션 가치를 계산하는 것이 유용할 것이다. 이에 h_t 이외의 모수는 전구간에서 추정된 값을 사용하되 직전 영업일의 내재 변동성 σ_{t-1} 에 대응하는 가치를 산정한 후 Duan 및 HN 모형을 만족하는 h_{t-1} 를 비선형 방정식의 해로 계산할 수 있다(동적방법). 시점 t 에서 기초 자산 가격 S_t 에 대해 h_{t-1} 를 모수로 사용하여 옵션 가치를 산정한 후 이에 대응하는 이론 내재 변동성을 구해 관측되는 내재 변동성과 비교하여 오차를 계산했다. 마찬가지로 전날의 내재 변동성을 변동성으로 사용하여 BS 모형에 따른 가치가 산정했으며, 이를 이

용해 내재 변동성이 계산될 수 있다.

표 5. 모형의 설명력 비교

모형	모수	월	RMSE	MAE
HN	정적	2M	0.090762	0.060155
		1M	0.100272	0.063993
		1W	0.086411	0.062023
	동적	2M	0.073615	0.061637
		1M	0.054688	0.043086
		1W	0.018380	0.009484
BS	동적	2M	0.023450	0.006776
		1M	0.017265	0.007513
		1W	0.017265	0.007121
Duan	정적	2M	0.090871	0.061213
		1M	0.100484	0.064818
		1W	0.086661	0.062669
	동적	2M	0.026561	0.009735
		1M	0.023799	0.011233
		1W	0.024035	0.010814

[표 5]를 보면 내재 변동성 평균을 전기간에 사용하여 오차를 계산하는 경우 Duan과 HN 모형에서 전일 내재 변동성을 사용해 구한 MAE를 구하면 Duan 모형의 오차는 약 1% 수준인데 HN 모형의 오차는 만기가 길어지면서 커진다. 즉 등가격 옵션의 가치를 평가하는 경우 GARCH 옵션 모형보다 BS 모형에 의한 설명이 유효하다. 모수를 고정된 후 가치 측정을 하면 MAE 기준 오차가 6%내외를 형성해서 평균 변동성의 50% 수준에 이른다. 등가격 옵션을 설명하는데 있어 GARCH 옵션 모형에서 h_t 만을 조정하는 방법은 Duan 모형에서는 유용하나 HN 모형의 설명력은 이에 비해 낮다. 이는 외환 시장의 경우 주식 시장과 다르게 비대칭성이 약하며 외가격 옵션에 대한 GARCH 옵션의 설명력은 Duan 모형으로 가능함을 암시한다.

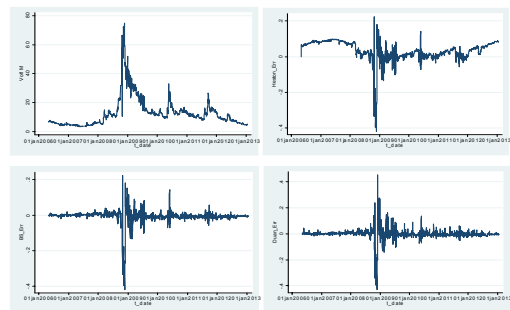


그림 3. 모형 오차(동적 모수 사용)

4 보통 실증분석에서 구간을 구분해 표본내 및 표본외 검증은 한다. 하지만 본고는 기초 자산과정에 대한 추정치를 옵션 모형에서 사용하므로 추정된 모수가 옵션 가격에 과적합되는 문제는 약하다. 이에 표본외 검증은 하지 않았다.

이를 보다 직관적으로 보기 위해 세 모형의 오차를 [그림 3]에서 보자. 여기에서 좌상 그림은 내재변동성이며 나머지는 오차 그래프이다. 세 모형 모두 내재 변동성이 급변하는 2008년 및 2009년에 오차가 커지며 BS 모형과 Duan 모형은 HN 모형에 비해 비교적 낮은 수준에서 오차 값을 보이는 것을 알 수 있다. HN 모형의 오차가 0보다 큰 구간이 많아 동 모형은 옵션 가치를 일반적으로 고평가되는 경향이 있음을 알 수 있다. 이러한 실증분석 결과는 Zhang and Shu(2003)[15] 논문에서의 Heston(1993)[12]에 대한 실증 분석 결과와 어느 정도 합치된다. 이렇게 HN 모형이 과대 평가되는 경향을 보이는 것은 비대칭성을 반영하는 γ 에 따른 영향으로 보인다. 따라서 HN 모형을 사용하는 경우 시계열 자료보다 가격 자료를 이용하여 모수를 직접 추정하는 방법이 사용되어야 할 것이다. [그림 3]에서 보면 세 모형 모두 내재 변동성이 급변하는 2008년 및 2009년에 오차가 커지며 BS(좌하)과 Duan(우하)는 비교적 낮은 수준에서 형성되고 있는 것을 알 수 있다. HN(우상) 모형의 오차는 일반적으로 고평가되는 경향이 있음을 알 수 있다. 이는 비대칭성을 반영하는 γ 에 따른 영향으로 보인다.

IV. 결론

금융 시계열의 변동성을 보면 자기 상관성이 강해 변동성이 커지면 그 영향이 지속되는 경향이 있으며, 뉴스(호재, 악재)에 대한 반응이 비대칭적이다. 계량 모형 중 ARCH 및 이의 확장 모형을 이용하여 기초 자산 가격의 변동성이 추정될 수 있다. 그런데 우리나라 외환 시장은 1990년말 외환위기 및 2008년 서브프라임 위기 때 극심한 변동성을 보였으므로 변동성 연구에 적합한 특성을 보인다. 본고는 GARCH 모형에 기초한 Duan, HN 옵션 모형을 가정하고 원-달러 역내 현물 시장에서 변동성의 지속성 및 비대칭성을 먼저 추정했다. 그리고 이 결과를 이용하여 옵션 가격에 변동성의 특징이 반영되는지를 분석해 보았다.

2006년 5월부터 2013년 1월까지 원-달러 현물 시장

에 대한 GARCH 모형을 추정을 해보면 주식시장과 반대로 환율 상승시 변동성이 증가하고 분포의 비대칭성 현상이 관측된다. Reuter가 제공하는 원-달러 장외시장에서 거래되는 등가격 옵션의 내재 변동성에 대해 본고는 세 가지 모형(BS, Duan 및 HN)간의 설명력을 비교해 보았다. 실증분석 전 구간에서 MLE로 추정된 모수를 고정하고 전일 내재 변동성을 이용하여 당일의 이론 가격을 구해 내재 변동성에서의 오차를 구했다. 이에 따르면 Duan 및 BS 모형의 오차(MSE)는 모두 약 0.1% 수준이다. 다만 HN 모형은 만기가 길어지면 설명력이 약해진다. 이는 GARCH 옵션 모형이 조건부 분산인 h_t 를 조정하여 등가격 옵션을 설명할 수 있음을 의미한다. 그리고 기초자산 가격 과정의 비대칭성을 반영하여 추정을 한 후 GARCH 옵션 모형을 이용하면 유동성이 낮은 원-달러 외가격 옵션의 적정 가치가 차익 모형으로 측정될 수 있다.

최근 우리사회에서 논란이 거세게 일고 있는 KIKO와 같은 배리어 옵션의 적정 가치의 측정이 주로 BS 모형에 의해 이루어진 후 논의가 진행되고 있다. 하지만 본고에서 논의했듯이 동 모형은 기초 자산의 변동성 군집 및 두터운 꼬리 분포를 충분히 설명하지 못한다. 따라서 동 모형에 따라 측정된 적정 가치는 실상 이론가격대비 낮은 수준일 수 있다. GARCH 과정을 기초한 옵션 가치 모형은 현실을 보다 정확히 기술하는 것으로 판단된다. 따라서 향후 이에 기초한 적정가치 논의가 필요할 수 있다. 또한 외가격 옵션의 유동성이 높은 KOSPI 시장에 대한 연구로 확장을 하면 우리나라 증권 시장에서 GARCH 옵션 모형의 유용성이 보다 정확히 평가될 수 있을 것이다. 정책적 시사점으로는 외환 현물 시장의 과거 변동성이 14% 전후에서 형성되므로 외환 옵션의 내재 변동성 5%전후에서 옵션을 매매하는 것은 매도자에게 대규모 손실을 초래할 수 있다.

참고 문헌

- [1] 김무성, 강태훈, “KOSPI 200 지수옵션의 가격동학에 관한 실증연구”, 대한경영학회지, 제20권, 제

5호, pp.2141-2156, 2007.

[2] 강병진, “원/달러 장외통화옵션시장에서 내재변동성의 정보효과”, 선물연구, 제19권, 제2호, pp.207-232, 2011.

[3] 서영경, 성광진, 김동우, “원/달러 환율변동성이 큰 이유와 배경”, BOK 경제브리프, pp.1-33, 2011

[4] 장국현, “한국옵션시장의 변동성 예측과 예측성과 비교에 관한 연구”, 선물연구, 제9권, 제1호, pp.51-79, 2001.

[5] 전상원, 강신애, “외환과생상품사용이 기업가치에 미치는 영향”, 한국콘텐츠학회논문지, 제12권, 제3호, pp.285-294, 2012.

[6] F. Black and M. Scholes, “The pricing of options and corporate liabilities,” Journal of Political Economy, Vol.81, pp.637-659, 1973.

[7] F. Black and M. Scholes, “The pricing of options and corporate liabilities,” Journal of Political Economy, Vol.81, pp.637-659, 1973.

[8] P. Carr and D. Madan, “Option valuation using fast Fourier transform,” Journal of Computational Finance, Vol.2, pp.61-73, 1999.

[9] P. Christoffersen and K. Jacobs, “Which GARCH model for option valuation?,” Management Science, Vol.50, pp.1204-1221, 2004.

[10] J. C. Duan, “The GARCH Option Pricing Model,” Mathematical Finance, Vol.5, pp.13-32, 1995.

[11] J. C. Duan, G. Gauthier, and J. G. Simonato, “An analytical approximation for the GARCH option pricing model,” Journal of Computational Finance, Vol.2, pp.75-116, 1999.

[12] S. Heston, “A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options,” Review of Financial Studies, Vol.6, pp.327-343, 1993.

[13] S. Heston and S. Nandi, “A closed-form GARCH option pricing model,” Review of

Financial Studies, Vol.13, pp.585-625, 2000.

[14] S. Huang, Y. Liu, and J. Wu, “An empirical study on implied GARCH models,” Journal of Data Science, Vol.10, pp.87-105, 2012.

[15] J. Zhang and J. Shu, “Pricing S&P500 index options with Heston’s model,” IEEE international conference, 2003.

저 자 소 개

한 상 일(Sang-II Han)

정희원



- 1986년 2월 : 서울대학교 졸업
- 1998년 8월 : 서강대학교 졸업
- 2004년 3월 ~ 현재 : 한국기술교육대학교 교수

<관심분야> : 기술 자산가치평가, 포트폴리오 관리