

축대칭 지형에 적합한 경계처리기법

Boundary Treatment for Axi-symmetric Topography

정태화*, 신현정**, 손민우***

한밭대학교 건설환경공학과*, 인하대학교 해양과학·생물공학과**, 충남대학교 토목공학과***

Tae-Hwa Jung(thjung@hanbat.ac.kr)*, Hyun-Jung Shin(hyunjung_@inha.edu)**,
Minwoo Son(mson@cnu.ac.kr)***

요약

경사진 지형을 갖는 축대칭 지형에 적용이 가능한 경계처리기법을 개발하였다. 섬 지형의 경우 복잡한 지형으로 인하여 유한요소모형을 사용하여 파의 변형을 해석하는 것이 좋지만 해수와 접하는 섬의 단면이 연직이 아닌 경우에는 수심이 0이 되어 경계면을 적절하게 처리하기 어렵다는 단점이 있다. 본 연구에서는 장파에 대한 해석해를 활용하여 임의의 경사진 경계면에 적용가능한 경계처리기법을 개발하였다. 이를 위해 지배방정식으로 완경사 방정식을 사용하였으며 계산 영역을 해석해 영역과 수치해 영역으로 구분하여 해석해 영역에 기존의 해석해를 적용한 후 수치해와 결합하여 모델을 완성하였다. 유도된 해는 기존의 해석해와 비교하여 그 타당성을 검증하였다.

■ **중심어** : | 경계처리기법 | 경사지형 | 수치 해 | 유한요소법 |

Abstract

A new boundary treatment technique which can be applied to axi-symmetric topography with inclined bottom was developed. Although the finite element method is good for complex geometry, there is no proper boundary treatment when a boundary is not a vertical section because the water depth at the coastline becomes zero. In this study, we developed a new boundary treatment for inclined bottom using the analytical solution for long wave. To develop a model, the mild-slope equation was used and then, a computational domain is divided into an analytical region and a numerical region. By combining a numerical and an analytical solutions, a complete solution was obtained. The developed solution was validated by comparing with a previous analytical solution.

■ **keyword** : | Boundary Treatment | Inclined Topography | Numerical Solution | Finite Element Method |

I. 서론

섬 지형 주변으로 파가 입사하는 경우, 전면에서는

입사파와 반사파의 중첩이 발생하며 후면에서는 회절 파와 굴절파의 중첩이 발생하여 매우 복잡한 양상을 보인다. 이러한 파의 거동을 해석하기 위해서는 주로 수

* 본 논문의 제1저자는 2012년도 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국연구재단 기초사업(No. 2012R1A1A1011884)의 지원을 받아 본 연구를 수행하였으며 제3저자는 2012년도 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국연구재단 일반연구지원사업(No. 2011-0010749)의 지원을 받아 본 연구를 수행하였음.

접수번호 : #130129-007

접수일자 : 2013년 01월 29일

심사완료일 : 2013년 02월 14일

교신저자 : 신현정, e-mail : hyunjung_@inha.edu

치기법이 사용되며 자주 사용되는 기법으로는 유한요소법과 유한차분법이 있다. 유한차분법의 경우 지배방정식에서 바로 차분식을 얻을 수 있어 수치해를 구하는 과정이 수월하나 계산영역이 복잡한 경우에는 제대로 구현하기 힘든 단점이 있다. 따라서 불규칙한 해안선을 포함하는 연안역의 해석에는 유한요소모형이 주로 사용된다. Panchang et al.(2000)[5]과 Park et al.(1994)[6]은 타원형 형태의 환경사방정식을 이용하여 항만의 내진동을 해석하였으며 Walkely and Berzins(2002)[9]와 Woo and Liu(2004)[10]등은 Boussinesq 방정식을 이용하여 파랑변형을 해석하였다. 환경사 방정식을 이용한 파랑변형해석은 선형식이기 때문에 적절한 경계조건만 주어지면 해를 구하기가 쉽다. 경계면이 불투수층인 경우, 면에 수직인 방향으로의 유량이 0이 되며 이를 수학적으로 표현하면 다음과 같이 된다.

$$\vec{hu} \cdot \vec{e}_n = 0 \quad (1)$$

여기에서 h 는 경계면에서의 수심, \vec{u} 는 수평유속벡터, \vec{e}_n 은 경계면에 수직인 법선벡터를 나타낸다. 경계면이 수직인 경우에는 h 가 상수가 되며 따라서 식 (1)은 다음과 같이 되어

$$\frac{\partial u}{\partial e_n} = 0 \quad (2)$$

유속성분을 적절히 조절하여 경계조건을 처리할 수 있다. 그러나 경계면이 수직이 아닌 경우에는 경계조건이 다음과 같이 되어 처리하기가 곤란하다[8].

$$\lim_{h \rightarrow 0} \vec{hu} \cdot \vec{e}_n = 0 \quad (3)$$

지금까지는 해안선을 고려하기 위하여 해안선 부근에 가상의 수직벽이 있다고 가정하여 식 (2)를 사용하였으나 이는 경계조건을 정확하게 적용한 것이 아니기 때문에 경우에 따라서는 상당한 오차를 수반한다. 완전반사가 아닌 경우에는 스폰지 경계층을 두거나 임의의

반사율을 갖도록 설정을 할 수 있으나 이는 모두 인위적으로 반사율을 조절하는 것으로 자연현상을 정확하게 재현한 것은 아니다.

Boussinesq 방정식을 이용한 파랑변형해석은 이동경계조건이라는 개념을 이용하여 경사진 지형에도 적용이 가능하나 중간수심 또는 심해 조건에서 사용하거나 강 비선형을 고려하기 위해서는 고차의 차분항을 사용하여야 하며 이로 인하여 안정된 수치해를 얻기가 어렵다. 이와는 별도로, 몇몇 연구자들에 의해 해석 해를 이용하여 축대칭 지형에서의 파의 변형을 모의하는 연구가 수행되었다[1][4][7][11]. 그러나 이들 해석 해들은 수학적인 유도과정을 위해 많은 가정들을 사용하여 실험에 적용하기는 무리가 있다.

따라서, 본 연구에서는 경사진 경계면에 대한 경계처리 기법을 개발하여 환경사 방정식을 이용하면서도 경사진 축대칭 지형에 대해 적용이 가능하도록 하였다. 이를 위해 다음과 같은 두 가지 가정을 사용하였다. 첫째, 수면과 경사진 경계가 만나는 지점에서의 수심은 항상 0이 되기 때문에 그 주변에서의 천해조건을 만족하는 영역이 항상 존재한다. 둘째, 이 영역내에서의 기울기는 항상 일정하다. 두번째 조건은 첫 번째 가정을 만족하는 영역의 크기를 아주 작게하면 크게 문제가 되지 않는다. 최종적으로 이 영역은 일정 기울기를 갖는 천해역이 되기 때문에 Zhang and Zhu(1994)[11]의 해석해를 적용할 수 있으며 이를 기존의 유한요소법과 결합하여 새로운 유한요소모형을 개발하였다. 이러한 접근방법은 정과 류(2010)[2]가 일차원 지형에 적용하여 타당성을 증명하였으며 본 연구는 2차원으로 확대한 것이다. 유도된 수치 해는 동일한 지배방정식을 사용한 해석 해와 비교하여 다시 한 번 타당성을 검증하였다.

II. 기본이론

본 연구에서 고려하는 축대칭 지형의 단면은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

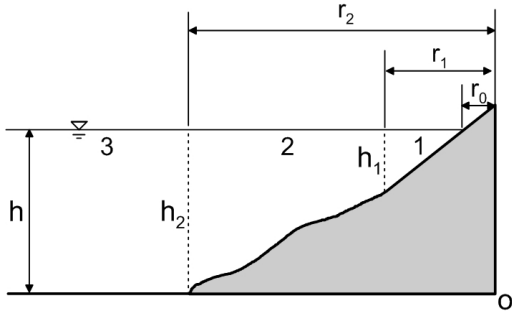


그림 1. 축대칭 지형의 단면도.

[그림 1]에서 숫자는 영역을 나타낸다. 영역 1은 해안선 부근의 일정수심을 갖는 천해영역을 나타내며, 영역 2는 임의의 수심을 갖는 변 수심 영역을 나타내며, 영역 3은 계산 영역의 바깥에 위치한 일정수심 영역을 나타낸다. 여기서, 천해영역이란 수심과 파장의 비가 1/20보다 작은 영역을 의미하며, 1/2보다 큰 경우에는 심해역, 그 사이에 있는 경우에는 중간수심영역으로 구분된다. r_0 , r_1 및 r_2 는 각각 원점(O)로부터 해안선, 영역 1의 바깥 경계, 영역 2의 바깥 경계까지의 거리를 나타낸다. h 는 임의의 지점에서의 수심을 나타내며 h_1 과 h_2 는 각각 r_1 과 r_2 에서의 수심을 나타낸다.

유체의 거동이 비회전, 비점성 및 비압축성이라고 가정하면 다음과 같은 형태의 수심적분된 방정식을 사용할 수 있다[3].

$$\nabla \cdot (CC_g \nabla \eta) + \sigma^2 \frac{C_g}{C} \eta = 0 \quad (4)$$

여기에서, ∇ 은 수평 미분 연산자, C 는 파속도, C_g 는 군속도, σ 는 각속도를 의미하며, η 는 자유수면변위를 나타낸다. 축대칭 지형을 고려하기 위해 원형좌표계를 사용하면 식 (5)는 다음과 같이 변환된다.

$$CC_g \frac{\partial^2 \eta}{\partial r^2} + \frac{d(CC_g)}{dr} \frac{\partial \eta}{\partial r} + \frac{1}{r} CC_g \frac{\partial \eta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} CC_g \frac{\partial^2 \eta}{\partial \theta^2} + \sigma^2 \frac{C_g}{C} \eta = 0 \quad (5)$$

여기서 r 은 원점에서 방사방향으로의 거리를 의미하며 θ 는 양의 x 축을 기준으로 반시계방향으로 측정된

각도를 의미한다.

변수분리법, $\eta = R(r)\Theta(\theta)$, 을 사용하면 다음과 같이 r 에 관한 2차상미분방정식과 θ 에 관한 해를 구할 수 있다.

$$CC_g \frac{d^2 R_n}{dr^2} + \left[\frac{d(CC_g)}{dr} + \frac{1}{r} CC_g \right] \frac{\partial R_n}{\partial r} + \left(\sigma^2 \frac{C_g}{C} - \frac{n^2}{r^2} CC_g \right) \eta = 0 \quad (6)$$

$$\Theta(\theta) = \cos n\theta \quad (7)$$

여기서, n 은 양의 정수값을 가지는 eigenvalue를 의미한다.

1. 영역 1

영역 1은 천해조건을 만족하는 영역이기 때문에 $C = C_g = \sqrt{gh}$ 가 되어 식 (6)은 다음과 같이 간략화 될 수 있다.

$$h \frac{d^2 R_{1,n}}{dr^2} + \left[\frac{dh}{dr} + \frac{1}{r} \right] \frac{\partial R_{1,n}}{\partial r} + \left(\frac{\sigma^2}{g} - \frac{n^2 h}{r^2} \right) \eta = 0 \quad (8)$$

또한, 영역 1에서의 수심은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$h = \frac{h_1}{(r_1/r_0 - 1)} \left[\frac{r}{r_0} - 1 \right] \quad (9)$$

식 (9)를 식 (8)에 대입하여 Frobenius 급수이론을 적용하면 최종적으로 다음과 같은 해를 얻게 된다.

$$R_{1,n} = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_{m,n} \left(1 - \frac{r_0}{r} \right)^m \quad (10)$$

여기서 $\alpha_{m,n}$ 은 Frobenius 멱급수 이론에 의해 결정되는 상수로서 $\alpha_{0,n}$ 의 값이 결정되면 나머지 값들은 순환관계식에 의해 자동적으로 결정이 되므로 $\alpha_{0,n}$ 값만이 미지상수이다[11].

2. 영역 2

영역 2는 실제로 관심을 갖는 변 수심 영역에 해당하며 유한요소법을 사용하여 해를 구하게 된다. 식 (5)에 Galerkin 기법을 적용하면 다음과 같이 이산화된 식을 얻을 수 있으며,

$$\int N \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(CC_g \frac{\partial N^T R_{2,n}^e}{\partial r} \right) \right] d\Omega_e \quad (11)$$

$$+ \int N \left[\frac{1}{r} CC_g \frac{\partial N^T R_{2,n}^e}{\partial r} \right] d\Omega_e$$

$$+ \int N \left[\left(\sigma^2 \frac{C_g}{C} - \frac{n^2}{r^2} CC_g \right) N^T R_{2,n}^e \right] d\Omega_e = 0$$

첫 번째 및 두 번째 식에 부분적분을 적용하면 다음과 같이 된다.

$$\int \left[CC_g \frac{dN}{dr} \frac{dN^T}{dr} - \frac{CC_g}{r} N \frac{dN^T}{dr} \right] d\Omega_e \quad (12)$$

$$- \int \left[\left(\sigma^2 \frac{C_g}{C} - \frac{n^2}{r^2} CC_g \right) NN^T \right] d\Omega_e$$

$$- NCC_g \frac{dR_{2,n}(r_2)}{dr} + NCC_g \frac{dR_{2,n}(r_1)}{dr} = 0$$

3. 영역 3

영역 3은 일정 수심 영역으로 해의 형태는 다음과 같이 된다[11].

$$R_{3,n} = i^n \epsilon_n J_n(kr) + A_n H_n^{(1)}(kr) \quad (13)$$

여기서, i 는 단위허수이며, J_n 은 n 차 제 1종 Bessel 함수, $H_n^{(1)}$ 은 n 차 제 1종 Hankel 함수를 의미하며 A_n 은 지형조건에 의해 산란되는 파의 성질을 결정하는 미지 상수이다. ϵ_n 은 다음과 같이 정의되는 Jacobian 상수이다.

$$\epsilon_n = \begin{cases} 1, & n=0 \\ 2, & n \geq 1 \end{cases} \quad (14)$$

4. 경계조건

식 (12)에서 $dR_{2,n}(r_2)/dr$ 및 $dR_{2,n}(r_1)/dr$ 의 값을 계산하기 위하여 다음과 같은 경계조건을 사용한다.

$$R_{1,n} = R_{2,n}, \quad \frac{dR_{1,n}}{dr} = \frac{dR_{2,n}}{dr}, \quad \text{at } r = r_1 \quad (15)$$

$$R_{2,n} = R_{3,n}, \quad \frac{dR_{2,n}}{dr} = \frac{dR_{3,n}}{dr}, \quad \text{at } r = r_2 \quad (16)$$

식 (15)로부터,

$$\frac{dR_{2,n}(r_1)}{dr} = \frac{R'_{1,n}}{R_{1,n}(r_1)} R_{2,n}(r_1) \quad (17)$$

식 (16)으로부터,

$$\frac{R_{2,n}(r_2)}{dr} = i^n \epsilon_n k \left[1 - \frac{H_n^{(1)'}(kr_2) J_n(kr_2)}{H_n^{(1)}(kr_2) J'(kr_2)} \right] J'(kr_2) \quad (18)$$

$$+ k \frac{H_n^{(1)'}(kr_2)}{H_n^{(1)}(kr_2)} R_{2,n}(r_2)$$

의 결과를 얻는다. 최종적으로 위 식 (17) 및 (18)을 식 (12)에 대입하면 영역 2에 대한 파랑변형을 모의할 수 있다. 영역 1 및 3에서의 파랑변형 값들은 경계조건 (15) 및 (16)을 이용하여 미지수 값들만 구하면 계산할 수 있다.

III. 해의 검증

본 연구에서 유도한 해석 해의 타당성을 검토하기 위하여 본 연구의 수치 해를 기존에 존재하는 해석 해와 비교하여 보았다.

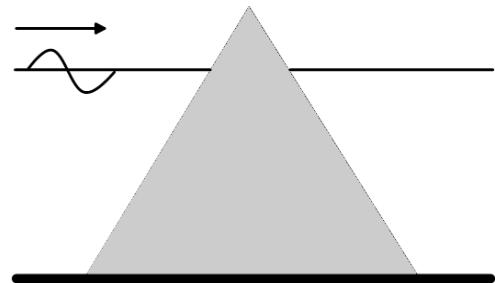
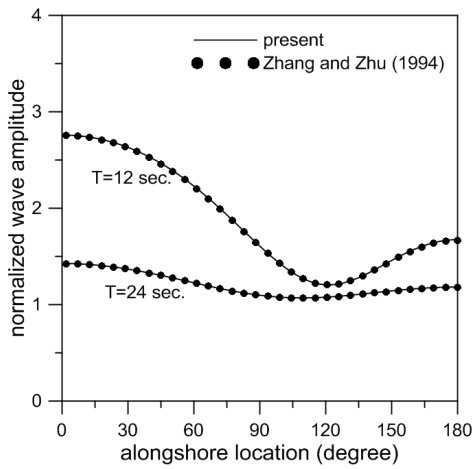


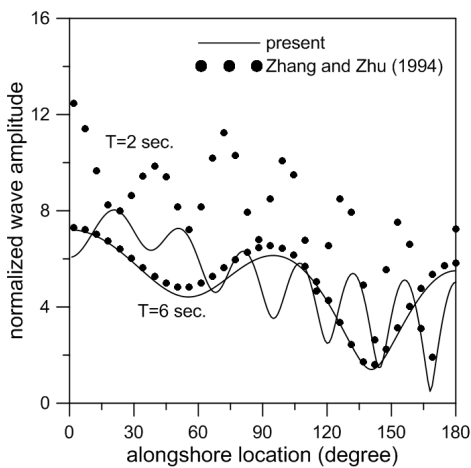
그림 2. 콘 형태의 섬 단면

앞서 기술한 바와 같이 Zhang and Zhu(1994)[11]은 [그림 2]와 같이 수심이 일정하게 증가하는 콘 형태의 축대칭 지형에 대한 장파의 해석 해를 유도한 바 있다.

따라서 본 연구에서도 그들이 제시한 동일한 지형에 대하여 수치 해를 구하여 그들의 해와 비교하였다. Zhang and Zhu(1994)[11]은 변 수심 영역 전체에 대한 해석 해를 제시하였으며, 본 연구에서는 해안선 부근의 극히 좁은 영역에서만 그들의 해석 해를 사용하고 나머지 영역에서는 식 (12)의 유한요소식을 사용하여 계산하였다. 계산 조건은 다음과 같다. $r_0 = 30 \text{ km}$, $r_2 = 30 \text{ km}$, $h_2 = 4 \text{ km}$ 이며 r_1 및 h_1 의 값은 $kh_1 = 0.005\pi$ 를 만족하는 곳으로 정하였다.



(a)

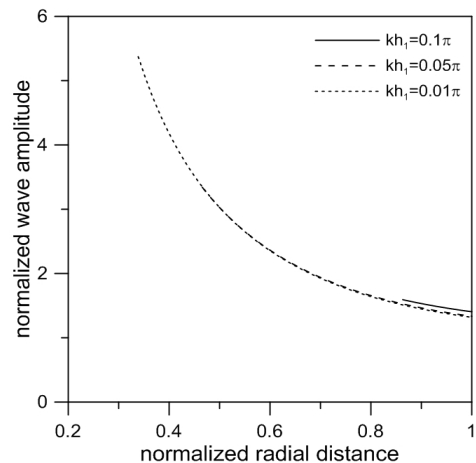


(b)

그림 3. 본 연구의 수치 해와 해석 해의 비교: (a) 천해조건; (b) 중간수심조건

[그림 3]은 서로 다른 주기에 대하여 본 연구의 수치 해와 해석 해를 비교한 결과이다. x 축은 파가 입사하는 방향을 기준으로 심 주변으로 방향을 의미하며 y 축은 해안선 지점에서 측정된 파고값으로 입사파의 파고를 이용하여 무차원화하였다. (a)에서 주기가 24초 및 12초인 경우 상대수심은 각각 0.028π 및 0.057π 가 되어 천해조건을 만족한다. (b)에서 주기가 6초 및 2초인 경우 상대수심은 각각 0.12π 및 0.41π 이 되어 중간수심영역이 된다. Zhang and Zhu(1994)[11]의 해석 해는 천해영역에서만 성립하기 때문에 그림에서 보여지듯이 천해조건에서는 본 연구의 수치 해와 해석 해가 잘 일치한다. 그러나 중간수심영역에서는 두 해가 큰 차이를 보이는 것을 알 수 있다. 아마도 이것은 Zhang and Zhu(1994)[11]의 해가 가지는 한계 때문인 것으로 볼 수 있다. 아쉽게도 중간수심영역에서는 비교할만한 해석 해나 수치 해가 존재하지 않기 때문에 기준에 존재하는 해와의 비교는 천해역으로만 국한을 하였다.

다음으로 중간수심영역에서는 r_1 의 위치에 변화를 주면서 해의 수렴성을 검토해 보았다. [그림 4](a) 및 [그림 4](b)는 각각 주기 6초 및 2초인 경우에 대하여 방사방향으로 파고값을 그린 결과이다. 앞선 그림과 마찬가지로 y 축은 입사파의 파고로 무차원화하였으며 x 축은 r_2 의 값으로 무차원화하였다.



(a)

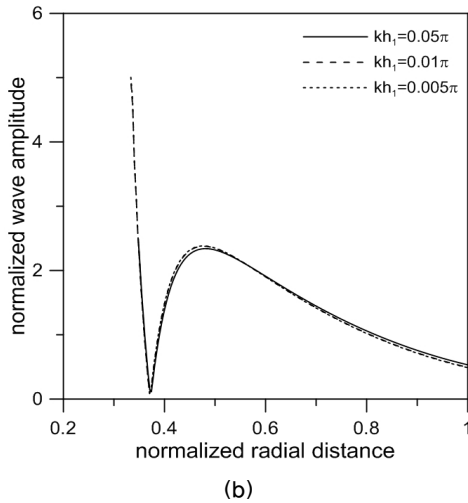


그림 4. 중간수심영역에서 r_1 의 위치에 따른 해의 수렴성 검토: (a) 주기 6초; (b) 주기 2초.

두 그래프 모두 영역 1이 천해쪽으로 가면서 해가 수렴하는 것을 확인할 수 있다. 입사파의 상대수심이 클수록(즉, 입사파의 주기가 짧을수록) 수렴을 하기 위해서는 영역 1이 천해쪽으로 더욱 근접하여야 한다는 것도 확인할 수 있었다. 본 연구에서 보여주지는 않았지만 다양한 수치테스트 결과 $kh_1 = 0.005\pi$ 를 만족하면 전 영역에 걸쳐서 만족할만한 수치 해를 얻을 수 있었다.

IV. 결론

본 연구에서는 천해영역에서 만족하는 해석 해를 활용하여 연직방향으로 경사진 지형을 갖는 축대칭 지형에 적용가능한 유한요소모형을 개발하였다. 기존에 존재하는 유한요소모형에서는 해안선에서의 수심이 0이 되기 때문에 경계조건을 처리하기가 쉽지 않았다. 본 연구에서는 Zhang and Zhu(1994)[6]가 제안한 축대칭 지형에 대한 장파의 해석 해를 활용하여 수심이 0이 되는 경계조건을 적절하게 고려할 수 있도록 하였다. 이를 위해 다음과 같은 두 가지 가정을 사용하였다. 첫째, 수심이 0이 되는 해안선 주변에는 항상 천해영역이 존재한다. 둘째, 이 영역의 크기를 아주 작게 잡으면 수심의 변화율이 일정하다. 천해역에서 기존의 해석 해와

비교하고, 중간수심영역에서는 수렴성 테스트를 통하여 본 연구에서 제안한 경계처리기법의 타당성을 검토하였다.

참고 문헌

- [1] 김수영, 이승오, 정태화, "함몰지형 위를 통과하는 파의 변형에 관한 해석해", 한국콘텐츠학회논문집, 제12권, 제3호, pp.434-441, 2012.
- [2] 정태화, 류용욱, "환경사 방정식을 이용한 유한요소모형에서 경사경계의 처리", 한국해양해양공학회논문집, 제24권, 제2호, pp.84-88, 2012.
- [3] J. C. W. Berkhoff, "Computation of combined refraction-diffraction," Proceedings of the 13th International Conference on Coastal Engineering, ASCE, pp.471-490, 1972.
- [4] S. Homma, "On the behavior of seismic sea waves around circular island," Geophysics Management. XXI, pp.199-208, 1950.
- [5] V. Panchang, W. Chen, B. Xu, K. Schlenker, Z. Demirebilek, and M. Okihiro, "Exterior bathymetric effects in elliptic harbor wave models," Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering, Vol.126, No.2, pp.71-78, 2000.
- [6] W. S. Park, I. S. Chun, and W. M. Jeoung, "Infinite element for the analysis of harbor resonances," Journal of Korean Society of Coastal and Ocean Engineering, Vol.6, No.2, pp.139-149, 1994.
- [7] T. H. Jung, C. Lee, and Y. S. Cho, "Analytical solutions for long waves over a circular island," Coastal Engineering, Vol.57, No.4, pp.440-446, 2010.
- [8] C. C. Mei, *The Applied Dynamics of Ocean Surface Waves*, World Scientific, Singapore.
- [9] M. Walkley and M. Berzins, "A finite element

method for the two-dimensional extended Boussinesq equations," International Journal of Numerical Methods in Fluids, Vol.39, No.10, pp.865-885, 2002.

[10] S. B. Woo and P. L. F. Liu, "Finite-element model for modified Boussinesq equations 1: model development," Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering, Vol.130, No.1, pp.1-16, 2004.

[11] Y. L. Zhang and S. P. Zhu, "New solutions for the propagation of long water waves over variable depth," Journal of Fluid Mechanics, Vol.278, pp.391-406, 1994.

손민우(Minwoo Son)

정회원



- 1999년 2월 : 서울대학교 토목공학과(공학사)
- 2001년 2월 : 서울대학교 대학원 토목공학과(공학석사)
- 2009년 12월 : U. of Florida, Civil and Coastal Engineering

Dept. (Ph.D)

- 2011년 8월 ~ 현재 : 충남대학교 토목공학과 조교수
- <관심분야> : 유체역학

저자 소개

정태화(Tae-Hwa Jung)

정회원



- 2001년 2월 : KAIST 토목공학과 (공학사)
- 2003년 2월 : 서울대학교 대학원 토목공학과(공학석사)
- 2007년 2월 : 서울대학교 대학원 토목공학과(공학박사)

- 2009년 1월 ~ 현재 : 한밭대학교 건설환경공학과 조교수

<관심분야> : 해안공학

신현정(Hyun-Jung Shin)

정회원



- 2009년 2월 : 인하대학교 해양과학과(이학사)
- 2009년 9월 ~ 현재 : 인하대학교 해양과학·생물공학과 석박사통합과정

<관심분야> : 해안공학