https://doi.org/10.5392/JKCA.2019.19.02.186

단일 설비의 입지 설정을 위한 무게중심법에 대한 소고

A Short Study on the Center of Gravity Method for the Locating a Single Facility

손진현
선문대학교 글로벌경영학과

Jinhyeon Sohn(jhsohn@sunmoon.ac.kr)

요약

본 연구에서는 일반적으로 생산운영관리 교재나 일부 연구들에서, 각 수요지에서 가중 유클리디안 거리의 합이 가장 작은 새로운 단일 설비의 위치(가중기하중위점)를 찾고자 할 때, 무게중심점을 대안으로 사용하는 것에 의문을 가지고 두 지점의 차이와 유사점을 살펴본다. 먼저, 수요지 가운데 한 곳의 수요량이 전체의 절반을 초과한다면, 그곳이 무게중심점과는 완전히 별개로 가중기하중위점이 됨을 보였고, 모든 수요지가 일직선상에 있는 특별한 경우의 가중기하중위점의 위치를 살펴보았다. 한편, 정n각형에서 각각의 꼭짓점에 수요량이 동일한 수요지들이 위치한 특별한 경우에는 기하중위점이 무게중심점과 일치함을 쉽게 알 수 있다. 또한, 삼각형과는 달리 볼록사각형의 경우에는 기하중위점의 위치를 간단히 구할 수 있다.

■ 중심어 : | 단일 설비 입지 | 무게중심법 | 유클리디안 거리 | 가중기하중위점 |

Abstract

This article compares the weighted geometric median with the centroid, from the question why they use the centroid when they would find the single facility location(the weighted geometric median) which minimize the sum of weighted Euclidean distances in some text books and papers. Firstly, we show that the demand point whose volume of demand exceeds the half of total demand is the weighted geometric median differently from the centroid, and we examine the weighed geometric median when every demand point is located on a line. Meanwhile, we could simply see that the geometric median and the centroid are coincident in the special case when every demand point is located at a vertex of a regular polygon, and every volume of demand is equal. Furthermore, the geometric medians of convex tetragons could be simply attained unlike triangles.

■ keyword : | Single Facility Location | Center of Gravity | Euclidean Distance | Weighted Geometric Median |

I. 서 론

설비입지(facility location) 의사결정은 제조설비나 서비스설비가 지리적으로 어디에 위치해야 하는가를 다룬다. 제조업과 서비스업의 입지는 제조원가와 영업비용, 나아가 제품이나 서비스의 수요와 가격에까지 영향을 미칠 수 있으므로 설비입지에 대한 의사결정은 매우 중요하며 따라서 신중하게 이루어져야 한다[1]. 또

접수일자 : 2018년 12월 17일
수정일자 : 2019년 01월 31일
심사완료일 : 2019년 02월 12일
교신저자 : 손진현, e-mail : jhsohn@sunmoon.ac.kr

한, 물류 네트워크에서 창고, 물류센터 등과 같은 고정 시설물의 위치를 결정하는 것은 전체 물류 시스템의 형태 및 구조를 결정짓는 중요한 의사결정문제이다[2].

현실에서 발생하는 다양한 설비입지문제의 유형은 크게 다음과 같이 네 가지 형태로 구분할 수 있다[1]. 첫째, 기존의 다른 설비와의 상호연관성을 고려하지 않는 단일설비 입지문제. 둘째, 기존의 설비 네트워크에 새로운 설비를 추가할 때의 입지문제. 셋째, 경쟁업체의 입지를 고려한 수익최대화를 위한 소매점의 입지문제. 넷째, 경찰서, 소방서, 구급차 대기소 등 신고를 받은 후 출동하여 서비스를 개시할 때까지의 반응시간을 최소화하기 위한 응급 서비스설비의 입지문제.

본 연구에서는 대다수의 생산운영관리의 입문서에서 다루는 단일 설비의 입지 설정을 위한 방법 가운데 새로운 설비의 입지 후보지가 주어지지 않은 상태에서 각 수요지의 위치와 수요량을 고려하여 새로운 설비의 입지를 결정하는 방법을 살펴볼 것이다.

일반적으로 대부분의 생산운영관리 교재에서는 단일 설비의 입지설정 방법으로 다음과 같은 것들을 다루고 있다[1][3-7].

첫째, 다수의 입지 후보지들을 대상으로 입지 결정에 고려할 여러 가지 요인들을 파악한 다음 요인들의 상대적 중요도에 따라 각 요인들에 가중치를 부여한 후, 각각의 후보지별로 각 요인에 대해 평가를 하고 각 요인의 평가점수에 가중치를 곱한 다음 이를 합산하여 각 후보지들의 총점을 계산하여 가장 높은 점수를 얻은 후보지를 선택하는 요인평가법(factor rating method).

둘째, 사전에 생산능력이 결정되지 않은 상태에서 각각의 입지 후보지별로 시설설비에 따른 비용을 고정비와 변동비로 구분하여 생산량에 따른 총비용을 계산한 후 생산량별로 총비용이 최소가 되는 후보지를 판별하는 손익분기점법(break-even analysis). 이 방법은 산출량에 따라서 최선의 대안이 어떻게 달라지는가를 판단하고자 할 때 중요한 정보를 제공해 준다.

셋째, 새로운 설비의 입지 후보지에서 각각의 수요지까지의 거리와 수송물량을 고려하여 수송비를 산정하여 후보지별로 총수송비를 구한 후, 그 값이 최소가 되는 후보지를 찾는 부하량-거리기법(load-distance method). 이 방법은 근접성 요인에 기초를 두어 입지를 평가하는 수학적 모형인데, 두 지점 간의 거리는 유클리디안 거리(Euclidean distanc)나 직각거리(rectilinear distance) 혹은 단위당 운송비용 등을 사용할 수 있다.

넷째, 새로운 설비의 후보지 위치가 정해지지 않은 상태에서, 각 수요지의 수요량을 고려하여 평면상에서 모든 수요지의 무게중심점을 구하여 그 부근을 새로운 설비의 후보지로 고려하는 무게중심법(center of gravity method). 여기에서 무게중심점은 각 수요지의 평면상의 좌표를 지정 한 후 각 수요지의 수요량을 고려하여 전체 수요지의 x 좌표와 y 좌표의 가중평균을 구하여 얻게 된다.

위의 방법 가운데, 앞의 세 가지는 입지 후보지들이 주어진 상태에서 각 후보지의 이점을 평가하는 방식이고, 네 번째는 입지 후보지가 주어지지 않은 상태에서 바람직한 입지 후보지의 위치를 찾고자 하는 것에서 가장 큰 차이가 있다.

그런데 무게중심법에서 주의할 점은 그 방법으로 구한 무게중심점이 유클리디안 거리를 사용한 부하량-거리기법에 의한 총수송비를 최소로 하는 지점(가중기하중위점)이 아니라는 것이다(물론, 직각 거리를 사용하여도 마찬가지다). 이 점을 명확하게 기술한 교재[3][4][8]도 있고, 마치 무게중심점이 총수송비를 최소로 하는 지점인 것처럼 오인할 수 있게 기술된 교재[1][5-7]도 있다. 무게중심점이 총수송비를 최소로 하는 지점이 아니라는 것을 기술한 교재[1][3][4]조차도 무게중심점과 가중기하중위점과의 차이점에 대해서 구체적으로 설명하고 있지는 않다.

이에 따라 생산운영관리를 배우는 학생들이 무게중심점과 가중기하중위점과의 차이점을 이해하기 쉽지 않은 형편이다. 본 연구에서는 무게중심점과 가중기하중위점과의 차이에 대하여 몇 가지 사례에 대하여 구체적으로 살펴보고 그를 통하여 가중기하중위점이 가지는 특성에 대하여 알아보고자 한다.

본고의 구성은 다음과 같다. 먼저, 평면상에서 수요지들의 가중기하중위점과 무게중심점을 구하는 방법과 두 지점의 의미에 대하여 살펴본다. 다음으로 무게중심점이 가중기하중위점과 어떻게 다른지 몇 가지 사례를

통하여 살펴보고 이를 통하여 몇 가지 가중기하중위점의 성격을 추론해 내고, 마지막으로 결론 및 추후 연구 과제에 대하여 서술하였다.

II. 가중 유클리디안 거리 합의 최소점과 무게중심점

본 절에서는 단일 설비의 입지를 설정하는 방법 가운데, 입지 후보지들이 주어지지 않은 상태에서 각 수요지들의 평면상의 좌표와 수요량이 주어졌을 경우 가중 유클리안 거리 합을 최소로 하는 지점과 무게중심점의 의미에 대하여 살펴본다.

1. 가중 유클리디안 거리 합의 최소점: 가중기하중위점(The Weighted Geometric Median)

다수의 수요지의 평면상의 좌표와 각 수요지에서의 수요량이 주어져 있는 경우 새로운 공장이나 물류센터의 입지를 고려할 때, 새로운 설비에서 각 수요지까지의 총수송비를 최소로 하는 지점을 찾고자 하는 경우, 각 수요지에서의 수요량과 새로운 설비의 위치에서 그 수요지까지의 거리의 곱의 합을 가장 작게 만드는 지점을 찾아보는 것이 의미가 있을 수 있다. 여기에서 평면상의 두 지점의 거리가 유클리디안 거리(Euclidean Distance)로 정의되고 새로운 설비의 입지가 평면상의 모든 지점에서 가능할 경우, 평면상에서 총수송비를 최소로 하는 지점을 찾는 문제는 고전적인 설비입지 문제인 다음과 같은 웨버 문제(Weber Problem)가 된다[9].

$$\min_{(x,y)} W(x,y) = \sum_{k \in K} w_k d_k(x,y)\,,$$
$$\text{where } d_k(x,y) = \sqrt{(x-a_k)^2 + (y-b_k)^2} \qquad (1)$$

식 (1)에서 목적함수는 좌표 (a_k, b_k)에 놓인 각각의 수요지 $k \in K$에 대하여 수요량 w_k가 반영된 가중 유클리디안 거리의 총합을 가장 작게 만드는 지점 (x^*, y^*)를 찾는 것이다.

일반적으로 수학 분야에서 모든 수요량을 1로 보았을 때의 식 (1)의 최적지점을 기하중위점(geometric median)이라 칭하기에[10], 본고에서는 수요량(가중치)이 고려된 현 문제의 최적지점을 가중기하중위점(weighted geometric median)이라 칭하였다.

식 (1)은 비교적 간단하지만 그 최적해를 구하는 과정을 이해하는 것은 그리 간단하지 만은 않다. 최적해를 구하기 위하여 식 (1)을 x와 y에 대하여 편미분한 식의 값을 0으로 만드는 지점을 찾아야 하는데, 이러한 비선형식의 수리적 해를 찾기 위하여 [11]에서는 어떤 한 지점에서 순환적 식을 사용하여 점차 최적 지점으로 수렴해 가는 기법을 제시하고 있다.

가중기하중위점의 현실적인 가치는 쉽게 이해되지만, 생산운영관리 교재들의 사례들에서 기하중위점을 직접 구하는 대신에 무게중심점을 이용하는 이유는 기하중위점을 구하는 방법이 복잡하기도 하고, 무게중심점이 가중기하중위점을 어느 정도 대체할 수 있다고 생각되기 때문인 것으로 보인다.

2. 무게중심법에 의한 무게중심점(Centroid by Center of Gravity Mehod)

무게중심법은 다음의 식 (2)의 최적해를 구하기 위한 방법이다.

$$\min_{(x,y)} C(x,y) = \sum_{k \in K} w_k d_k(x,y)^2,$$
$$\text{where } d_k(x,y)^2 = (x-a_k)^2 + (y-b_k)^2 \qquad (2)$$

식 (2)에서 목적함수는 좌표 (a_k, b_k)에 놓인 각각의 수요지 $k \in K$에 대하여 수요량 w_k와 유클리디안 거리의 제곱의 곱의 총합을 가장 작게 만드는 지점 (x^*, y^*)를 찾는 것이다.

식 (2)의 최적해는 다음과 같다[9][11].

$$(x^*, y^*) = \left(\frac{\sum_{k \in K} w_k a_k}{\sum_{k \in K} w_k}, \frac{\sum_{k \in K} w_k b_k}{\sum_{k \in K} w_k} \right)$$

즉, 무게중심점(centroid)이 식 (2)의 최적해, 즉, 수송 비용이 수송량과 유클리디안 거리에 의한 수송거리의 제곱에 비례한다는 가정 하에서 총수송 비용을 최소화하는 지점이 되는 것이다.

이와 같이 무게중심점과 가중기하중위점이 가지는 의미가 다름에도 불구하고 무게중심점을 구하는 식이 간편하다는 이유로 다른 형태의 설비 입지문제에서도 무게중심법이 응용되기도 한다[12][13].

Ⅲ. 가중기하중위점과 무게중심점의 비교

앞에서 언급한 대로 현실에서 가중기하중위점을 찾아야 하는 사례들에서, 대부분 무게중심점을 대신 이용하고 있다. 물론, 무게중심점이 유클리디안 거리를 사용하는 문제에서 최적해가 아님을 인지하고, 다만 최적해 근방일 것이라는 생각 속에서 초기해로서의 역할을 기대하는 것으로 서술된 생산운영관리 교재들도 많이 있다. 본 절에서는 수송비가 수송량과 유클리디안 거리에 비례한다는 가정 하에서 몇 가지 가중기하중위점의 특성을 살펴보고 무게중심점과의 비교를 통하여 둘의 차이점과 유사점을 알아보고자 한다.

먼저, 수송비가 수송량과 유클리디안 거리에 비례한다는 가정 하에서의 단일 설비의 최적 입지(가중기하중위점)의 가장 큰 특성으로 다음과 같은 <성질 1>을 이야기 할 수 있을 것이다.

<성질 1> 만약, 수요지 가운데 한 곳의 수요량이 전체 수요량을 절반을 초과한다면, 그 수요지가 위치한 지점이 가중기하중위점이 된다.

이러한 내용은 [11]에도 언급되어 있으나 그에 대하여 무게 추를 이용하여 설명하고 있다. 그러나 수식을 사용하여 <성질 1>을 보이는 것도 그리 어렵지 않다.

먼저, 간단하게 수요지가 두 곳 밖에 없는 것을 생각해보자. (수요지 1)의 좌표를 (0, 0), 그 곳에서의 수요량을 60이라고 하고, (수요지 2)의 좌표를 (10, 0), 수요량을 40이라고 하자.

새로운 설비의 위치가 무게중심점인 (4, 0)에 있으면, 무게중심점에서 양쪽의 있는 각각의 수요지까지의 수송비가 240으로 동일하여 마치 총수송비를 최소화하는 지점처럼 착각을 일으킬 수도 있다.

이제 위의 무게중심점에 위치한 새로운 설비를 x 좌표의 왼쪽으로 한 좌표단위만큼 이동시키면, 왼쪽에 있는 (설비 1)까지의 수송비는 60만큼 줄고 오른쪽에 있는 (설비 2)까지의 수송비는 40만큼 늘어남으로 전체적으로 20만큼의 비용이 감소하는 것을 알 수 있다. 이러한 비용 감소는 새로운 설비가 (수요지 1)에 위치 할 때까지 이루어진다.

마찬가지로 새로운 설비가 (수요지 1) 이외의 어느 곳에서든지 (수요지 1)의 위치로 가까이 갈수록 비용감소가 이루어지는 것을 쉽게 알 수 있다. 즉, 수요지가 두 곳인 경우 총수송비를 최소로 하는 가중기하중위점은 그 수요량이 전체 수요량의 절반이 넘는 수요지의 위치임을 알 수 있다. 다음으로 수요지가 세 곳 이상인 경우를 포함한 일반적인 경우에 <성질 1>이 성립됨을 보여 보자.

(성질 1의 증명) 먼저 n을 수요지의 개수라 하고, 각 수요지에 1, 2,⋯, n이라는 수를 부여하고, (수요지 1)을 그 수요지에서의 수요량이 전체 수요량의 절반이 넘는 수요지라고 하자. 여기에서, 만약 새로운 설비의 위치가 (수요지 1)의 위치와 같지 않다면 총수송비가 최소가 아님을 보이면 된다.

먼저 새로운 설비의 입지가 (수요지 1)의 위치와 같을 때의 총수송비는 다음과 같다.

$$TC(1) = \sum_{i=2}^{n} w_i d(1,i) \quad \text{where}$$
$$d(1,i) = \sqrt{(a_1 - a_i)^2 + (b_1 - b_i)^2} \tag{3}$$

식 (3)은 새로운 설비의 위치가 (수요지 1)에 있을 경우 총수송비는 나머지 수요지들 각각의 수요량에 그 수요지에서 (수요지 1)까지의 유클리디안 거리의 곱을 합한 값이 되는 것을 말하고 있다.

또한, 새로운 설비의 위치가 (수요지 1)의 위치가 아

니라 임의의 p 지점에 위치하는 경우의 총 수송비는 다음의 식(4)와 같이 나타낼 수 있다.

$$TC(p) = w_1 d(1,p) + \sum_{i=2}^{n} w_i d(i,p) \tag{4}$$

한편, [그림 1]에서 다음의 식 (5)가 성립됨을 쉽게 알 수 있다.

$$d(1,i) \le d(1,p) + d(i,p) \tag{5}$$

식 (5)의 양변에 각각의 $i = 2,\cdots,n$에 대하여 w_i를 곱하고 전체를 합하면 다음의 식(6)이 성립된다.

$$\sum_{i=2}^{n} w_i d(1,i) \le \sum_{i=2}^{n} w_i d(1,p) + \sum_{i=2}^{n} w_i d(i,p) \tag{6}$$

한편, (수요지 1)의 수요량이 나머지 수요지들의 수요량의 총합보다 크다고 가정하였으므로, 다음의 식 (7)이 성립되고,

$$\sum_{i=2}^{n} w_i d(1,p) < w_1 d(1,p) \tag{7}$$

식 (6)과 식 (7)에서 $TC(1) < TC(p)$ 임을 알 수 있다. □

앞의 식 (5)에서 등식이 성립되는 경우는 p 지점이 (수요지 1)과 (수요지 i)가 일직선상에 있는 경우이다. 따라서 모든 수요지들이 일직선상에 있는 경우가 아니라면, 앞의 증명과정에서 (수요지 1)의 수요량이 다른 수요지들의 수요량의 총합보다 같기만 하여도 $TC(1) < TC(p)$ 이 성립됨을 알 수 있다.

현실에서 가중기하중심점의 근사치를 찾기 위한 방법으로 무게중심법을 설명하는 사례에서 종종 한 곳의 수요지의 수요량이 다른 수요지들의 수요량의 합 이상이 되는 경우가 종종 있다[7][14]. 이 경우 더 이상 분석이 필요 없이 수요량이 총수요량의 절반 이상이 되는 수요지가 새로운 설비를 위한 최적의 위치가 되는 것이다.

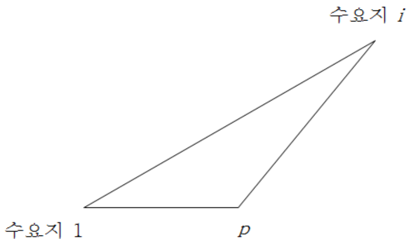

그림 1. p 지점에 새로운 설비가 위치한 경우

이러한 결과는 어느 한 곳의 대도시의 인구가 전체 인구의 절반 이상이 되면 그 도시가 모든 것을 흡수해 버릴 수도 있다는 것을 보여 준다고 할 수 있다.

한편, 모든 수요지들의 위치가 일직선상에 있는 경우에도 복잡한 수식을 사용하지 않고도 수송비용이 최소가 되는 가중기하중위점을 쉽게 찾을 수 있다.

<성질 2> 모든 수요지들이 일직선상에 존재할 때, 직각 좌표의 x 좌표(가로 좌표)에 모든 수요지들을 위치시키고, 맨 좌측 수요지부터 오른쪽으로 진행하면서 해당 수요지들의 수요량을 더해나갈 경우, 그 값이 전체 수요량의 절반과 일치하는 경우가 없다면, 최초로 전체 수요량의 절반을 넘게 하는 지점이 가중기하중위점이 된다.

(증명) 우선, 맨 좌측부터 더해나간 수요량의 총합이 전체 수요량의 절반과 일치하는 경우가 없다고 하고, 맨 좌측의 수요지부터 각 수요지에 1, 2,$\cdots$, n이라는 수를 부여하자. 만약, 맨 좌측의 수요지의 수요량이 절반을 넘는다면 <성질 1>에 의해 <성질 2>는 당연히 성립된다. 그렇지 않고 왼쪽부터 더해 나간 수요량의 합이 최초로 전체 수요량을 넘게 하는 수요지가 (수요지 k, $k > 1$)라고 하자. 그러면 다음의 식 (8)과 (9)가 성립된다.

$$\sum_{i=1}^{k-1} w_i < w_k + \sum_{i=k+1}^{n} w_i \tag{8}$$

$$\sum_{i=1}^{k-1} w_i + w_k > \sum_{i=k+1}^{n} w_i \tag{9}$$

수요지 k에 위치한 설비를 h만큼 오른쪽으로 이동시킬 경우, 수요지 $1,\cdots,k$ 의 수송량이 오른쪽으로 h 만큼 더 이동해야 하므로 이에 의한 수송비의 증가분은 $h\left(\sum_{i=1}^{k-1} w_i + w_k\right)$가 되고, 수요지 k의 오른쪽에 있는 수요지 $k+1,\cdots,n$의 수송거리는 h만큼 감소하므로 이에 의한 수송비의 감소분은 $h\sum_{i=k+1}^{n} w_i$가 되므로, 식 (9)에 의해 수송비의 증가분이 감소분보다 커서 총수송비가 증가함을 알 수 있다.

마찬가지로 수요지 k에 위치한 설비를 h만큼 왼쪽으로 이동할 경우, 수송비의 증가분과 감소분은 각각 $h\left(w_k + \sum_{i=k+1}^{n} w_i\right)$와 $h\sum_{i=1}^{k-1} w_i$가 되어 식 (8)에 의해 총 수송비가 증가하게 된다.

위에서 수송비 증가분의 계산에서 h의 값은 왼쪽으로는 수요지 $k-1$의 지점까지의 거리 이내 오른쪽으로는 수요지 $k+1$의 지점까지의 거리 이내의 값이어야 한다. 만약 그보다 크다면 순 비용 증가분은 더욱 커지게 된다.

이로써 수요지 k가 위치한 지점이 총수송비를 최소로 하는 가중기하중위점임을 알 수 있다. □

만약, 맨 좌측의 수요지부터 오른쪽으로 진행하면서 수요량들을 더해 나갈 때 그 값이 전체 수요량의 절반과 일치하는 지점이 존재하면, 그 지점의 오른쪽에 있는 수요지들의 수요량의 합 또한 전체 수요량의 절반이 된다. 즉, 앞의 증명 과정에서 사용한 기호를 그대로 사용하여, 왼쪽부터 더해 나간 수요량의 합이 전체수요량의 절반이 되는 수요지를 (수요지 k, $k \geq 1$)라고 하면 다음의 식 (10)이 성립된다.

$$\sum_{i=1}^{k} w_i = \sum_{i=k+1}^{n} w_i \tag{10}$$

식 (10)과 <성질 2>의 증명 과정으로부터 다음의 <성질 2-1>이 성립됨을 쉽게 알 수 있다.

<성질 2-1> 모든 수요지들이 일직선상에 존재할 때, 직각 좌표의 x 좌표(가로 좌표)에 모든 수요지들을 위치시키고, 맨 좌측 수요지부터 오른쪽으로 진행하면서 해당 수요지들의 수요량을 더해나갈 경우, 그 값이 전체 수요량의 절반과 일치하는 지점이 존재하는 경우, 그 수요지와 다음 수요지를 연결하는 선분상의 모든 지점이 가중기하중위점이 된다.

앞의 <성질 2>를 이용하여 가중기하중위점과 무게중심점의 차이를 알 수 있는 간단한 사례를 다음과 같이 만들 수 있다.

먼저 일직선상에 3곳의 수요지가 있고, 평면상의 각 수요지의 좌표와 수요량이 다음과 같다고 하자.

수요지 1: 좌표 (0, 0), 수요량 40,

수요지 2: 좌표 (1, 0), 수요량 20,

수요지 3: 좌표 (10, 0), 수요량 40.

이 경우 가중기하중위점은 <성질 2>에 의해 좌표 (1, 0)임을 알 수 있고, 그 때의 총수송비용은 400 (=1*40+9*40)이 된다. 한편, 무게중심점은 (4.2, 0)이 되고, 설비가 그 곳에 위치할 때의 총수송비용은 460 (=40*4.2+20*3.2+40*5.8)이 됨을 알 수 있다.

한편, 정n각형($n \geq 3$)에서는 기하중위점과 무게중심점이 일치하게 되는데 그것을 수요지와 수요량의 개념을 대입하면, 다음의 <성질 3>과 같이 표현할 수 있다.

<성질 3> 수요지들이 정n각형($n \geq 3$)의 꼭짓점들에 위치하고, 각 수요지들의 수요량이 모두 동일하다면, 가중기하중위점과 무게중심점은 일치한다.

<증명> 각 꼭짓점(수요지)에서의 수요량이 동일하므로 그 값을 1이라고 하자. 그러면 가중기하중위점은 기하중위점과 동일하다.

먼저 정3각형인 경우를 살펴보자. 일반적으로 임의의 3각형에서 각 꼭지점에 이르는 거리의 합이 가장 작은 지점(Fermat point: 삼각형의 기하중심점)을 구하는 문제를 페르마 삼각형 문제(Fermat triangle problem)라고 하는데, 페르마 점을 찾는 많은 방법들이 연구되어 왔다. 그 가운데 기하학적으로 삼각형의 모든 내각이

120°보다 작은 경우, 페르마 점은 주어진 삼각형의 각 꼭짓점과 연결하는 선분들이 이루는 각도가 120°가 되는 내부 점임을 보인 연구[15]가 있다. 정3각형에서는 이 지점이 무게중심점이므로 두 지점은 동일하게 된다.

다음으로, 정n각형에서 n이 3보다 큰 홀수인 경우를 살펴보자. 이 경우, 어느 한 꼭짓점에서 대변의 중심을 지나는 직선을 그으면(이후 이 직선을 중선이라 칭하자), 그 정n각형은 이러한 중선에 대하여 좌우 대칭이 되고, 중선상에 위치하지 않은 어느 지점도 기하중위점이 될 수 없다는 것을 보일 것이다.

n이 3보다 큰 홀수인 정n각형의 중선 위에 위치하지 않는 임의의 내부의 p 지점에서 각 꼭지점에 이르는 거리의 합은 다음의 식 (11)과 같이 된다.

$$TC(p) = \sum_{i=1}^{n} d(1,i) \tag{11}$$

$TC(p)$ 함수는 p 지점에 대한 볼록(convex)함수이므로[11] 어느 한 지점에서만 최소값을 갖게 된다, 그런데 중선의 특성상 중선에 대칭적인 지점 p' 도 $TC(p)$와 동일한 값을 갖게 된다. 이는 n이 3보다 큰 홀수인 정n각형에서 기하중위점의 위치는 중선 위에 존재해야 함을 말해준다. 따라서 각 꼭짓점에서 출발한 중선이 교차하는 지점이 무게중심점이자 기하중위점이 된다.

정n각형에서 n이 4 이상의 짝수인 경우는 더욱 쉽게 증명할 수 있다. 이 경우 각 꼭짓점에서 대각선을 그으면 한 지점에서 만나는데 그 지점이 해당 정n각형의 무게중심점이자 기하중위점이 된다. 무게중심점 이외의 지점에서 각각의 꼭짓점에 이르는 선분의 길이의 총합은 무게중심점에서 각각의 꼭짓점에 이르는 선분의 길이의 총합의 값보다 크게 된다. 그 이유는 무게중심점에서 대칭하는 꼭짓점을 연결하는 선분은 직선이 되나 다른 지점에서 대칭하는 꼭짓점을 연결하는 선분은 꺽은 선이 되기 때문이다. □

위의 <성질 3>의 증명과정의 마지막 부분에서 다음의 <성질 4>가 성립되는 것을 쉽게 알 수 있다.

<성질 4> 임의의 볼록사각형에서 기하중위점의 위치는 마주보는 두 꼭짓점을 연결하는 대각선이 만나는 지점이 된다.

<성질 4>를 가지고 무게중심점과 기하중위점의 차이를 보이는 사례를 다음과 같이 만들 수 있다.

각각의 좌표가 (0, 0), (1, 0), (0, 1), (3, 3)인 네 곳의 지점을 생각해 보자. 이 경우 무게중심점은 (1, 1)이 되고, 기하중위점은 (0.5, 0.5)가 된다.

Ⅳ. 결론 및 추후 연구과제

본 연구에서는 유클리디안 거리에서 총수송비를 가장 작게하는 지점이 무게중심점이 아니라 가중기하중위점임을 보다 명확하게 인식시키고자 두 지점의 수학적 차이를 살펴보고, 가중기하중위점의 특성의 일부를 살펴보았다.

먼저, 수요지 가운데 한 곳의 수요량이 전체의 절반을 초과한다면, 그곳이 무게중심점과는 완전히 별개로 가중기하중위점이 됨을 보여주었고, 모든 수요지가 일직선상에 있는 특별한 경우의 가중기하중위점의 위치를 살펴보았다. 정n각형에서 각각의 꼭짓점에 수요량이 동일한 수요지들이 위치한 경우, 기하중위점이 무게중심점과 일치함을 알 수 있었고, 볼록사각형의 기하중위점도 살펴보았다.

오랜 전부터 삼각형의 기하중위점에 대한 수많은 연구가 진행되어 왔으나, 그나마 최근에 와서야 삼각형의 가중기하중위점에 대한 연구[16]가 진행되었음을 보면, 일반적인 다각형의 가중기하중위점의 특성을 찾는 것은 쉽지 않은 과제로 보인다.

그럼에도 불구하고 앞으로 다각형의 가중기하중위점의 특성에 대한 연구가 새롭게 지속되어 그 성과가 누적된다면, 그 과정에서 수학적인 다양한 성과를 얻을 수도 있고, 설비의 적절한 위치를 찾는 다양한 방법에서 손쉽게 이용되고 있는 무게중심법보다 더 나은 대안이 나올 수 있을 것이다.

참 고 문 헌

[1] 이상범, 류춘호, *현대 생산·운영관리(제5판)*, 명경사, 2015.

[2] 석상문, 이상욱, “물류 센터 위치설정 및 대리점 할당 모형에 대한 휴리스틱 해법,” 한국콘텐츠학회논문지, 제10권, 제9호, pp.107-116, 2010.

[3] L. J. Krajewski, L. P. Ritzman, and M. K. Malhotra, *Operations Management(8th ed.)*, Pearson Prentice Hall, 2007.

[4] 유성렬, *생산운영관리*, 이프레스, 2012.

[5] W. J. Stevenson, *Production/Operations Management(5th ed.)*, IRWIN, 1996.

[6] 심현철, *공급망 관점의 생산운영관리*, 형지사, 2015.

[7] 김연성, 김채복, 정승환, 주상호 (공역), *전략적 운영관리*(F. R. Jacobs and R. B. Chase, *Operations and Supply mangement : The Core*, McGraw-Hill, 2008, 번역본), 한경사, 2009.

[8] 김태웅, *서비스기업의 운영관리*, 신영사, 2005

[9] A. Klose and A. Drexl, “Facility Location Models for Distribution System Design,” European Journal of Operational Research, Vol.162, pp.4-29, 2005.

[10] M. B. Cohen, Y. T. Lee, G. Miller, J. Pachocki, and A. Sidford, “Geometric Median in Nearly Linear Time,” Proceedings of the forty-eighth annual ACM symposium on Theory of Computing, pp.9-21, 2016.

[11] G. O. Wesolowsky, “The Weber Problem: History and Perspectives,” Location Science, Vol.1, No.1, pp.5-23, 1993.

[12] T. Drezner and Z. Drezner, “A Note on Applying the Gravity Rule to the Airline Hub Problem,” Journal of Regional Science, Vol.41, No.1, pp.67-73, 2001.

[13] S. Khosravi and M. R. A. Jokar, "Facility and Hub Location Model based on Gravity Rule," Computer & Industrial Engineering, Vol.109, pp.28-38, 2017.

[14] http://www.shmula.com/ditribution-center-location-optimizing-your-logistics-network/9312/, 2018.12.10.

[15] P. G. Spain, “The Fermat point of a Triangle,” Mathematical Magazin, Vol.69, No.2, pp.131-133, 1996.

[16] Y. Shen and J. Tolosa, “The Weighted Fermat Triangle Problem,” International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, Vol.2008, http://dx.doi.org/10.1155/2008/283846

저 자 소 개

손 진 현(Jinhyeon Sohn) 정회원

▪ 1986년 2월 : 서울대학교 수학과 (이학사)
▪ 1991년 2월 : KAIST 산업공학과(공학석사)
▪ 1997년 2월 : KAIST 산업공학과(공학박사)
▪ 1997년 3월 ~ 현재 : 선문대학교 경영학과 교수

<관심분야> : 수송망설계, Network 이론, 생산관리