二度数 Gamma 分布 Model에 依한 波高 및 期의 Simulation

嶺南工業専門学校
尹 海 植

1. 緒 論

여러 水文現象이 Gamma 分布에 類似하다는 것은 一般的으로 알려져 있으나[1,8], 실제의 適用에 있어서 不完全 Gamma 函数(Incomplete Gamma Function) 表[2]를 使用하는 難点이 있어 지금까지 一般化되지 못하였다.

그래서 Kadoya 및 Nagao[3] 氏는 二変数 指数分布를 適用하여 Gamma 分布를 解決하는 研究를 하였고, W.F.Kibble[4] 氏는 Gamma 型의 二変数分布를 그 多項式 或은 Bessel 函数에 依해 나타낸 바 있다.

아울러 最近에 널리 研究, 利用되는 模擬発生技法(Simulation Technique)의 発達로 水文量을 確率分布型, 特히 Gamma 分布型에 基礎로 함이 重要視되었다.[5,6]

따라서 本 論文에서는 波高 및 周期의 確率分布型이 二変数 Gamma 分布型에 適合한가를 検定하고, Gamma 分布型과 Monte Carlo 技法을 基礎로 한 Gamma Model에 依하여 波高 및 周期를 Simulation하여, 模擬発生 資料와 観測資料의 基本 통계치를 比較하여 波高 및 周期의 模擬発生 Model로서 Gamma Model의

適用이 可能한가를 檢討하려고 한다.

Ⅱ. 二変数 Gamma 分布型 分析

本 論文에서 分析에 使用된 資料는 우리나라 東海岸의 主要港의 하나인 湖港의 1966年1月부터 1972年 12月까지 観測된 全体 波群中에서 月別 最大値의 最大疲高 (H_{max}), 1/10波高 ($H1/10$), 1/3波高 ($H1/3$), 平均波高 (H_{mean}) 및 最大周期 (T_{max}), 1/10 周期 ($T1/10$), 1/3周期 ($T1/3$), 平均周期 (T_{mean})를 選定하였다.[7]

Gamma 分布 (Γ - 分布)란 K. Pearson의 Type - Ⅲ 分布라고도 하는데 그 母数에 따라서 正規分布에 가까운 型으로 부터 非対称分布에 이르는 매우 広範囲한 型을 나타내므로 그 応用面이 대단히 有効한 分布型이다.

一般的으로 母数 α 의 Gamma 函数는 다음과 같이 表示된다.

$$\Gamma(\alpha) = \int_{0}^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2-1)$$

이 式에서 α가 陽의 整数인 경우 $(\alpha) = (\alpha-1)$이 되나, 整数가 아닌 경우에는 級数展開나 数値積分에 依해 求해야 한다.
따라서 위 (2-1)式의 α 代身에 $(p+1)$을 代入하여 0에서 $u\sqrt{p+1}$ 까지 積分하면,

$$I(u,p) = \frac{1}{\Gamma(p+1)} \int_{0}^{u\sqrt{p+1}} x^{p} e^{-x} dx \cdots\cdots\cdots \quad (2-2)$$

이 된다. 이 式을 不完全 Gamma 函数 (Incomplete Gamma Function)라 하며, K. Pearson[2]에 의해 소개되었고, 그 性質은 確率分布

函数(Probability Mass Function)이다. K. Pearson은 I(u,p)의 값을 容易하게 찾을 수 있도록 不完全 Gamma 函数表[2]를 만들었다. 連続変量 x에 대한 Gamma 確率密度函数는

$$f(x) = \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta} \quad \cdots\cdots (2-3)$$

이 되며 이 式에서는 変数 α, β가 두개이므로 이것을 二変数 Gamma 分布의 確率密度函数라 한다. 여기서 変数 x는 $0 \leq x \leq \infty$이며, $x < 0$에 対해서는 $f(x) = 0$이다.

変数 α, β는 EX, VAR, S 및 K로 부터 다음과 같이 구하며, β는 Scale Parameter이다.

$$\left.\begin{aligned} EX &= \alpha\beta \\ VAR &= \alpha\beta^2 \\ S &= 2/\sqrt{\alpha} \\ K &= 3+6\sqrt{\alpha} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (2-4)$$

EX : 平均値(Mean), VAR : 分散(Variance),
S : 歪 度(Skewness), K : 尖度(Kurtosis).

使用資料를 級間(Class Interval) 1.0으로 해서 各 級間의 観測度数(Observed Frequency), 相対度数(Relative Frequency), 累積相対度数(Cumulative Rel. Freq.)를 求하고, 観測値의 平均値와 分散으로 부터 α, β를 求한 다음에, $p(=\alpha-1)$, $u(=x/\beta/\sqrt{\alpha})$를 算定하여 不完全 Gamma 函数表에서 I(u,p)를 찾아서 超過確

率(Exceedance Probability)과 期待度数(Expected Freg.)를 Table 2-1과 같이 求했으며, 観測値로 부터 求한 相対度数를 Histogram으로 하고, 여기에 Gamma分布의 理論的 曲線을 Fig. 2-1과 같이 그려서 比較해 보면 観測値와 理論的으로 求한 期待値가 大体的으로 서로 잘 一致하고 있으나, 그 適合性을 確実하게 検定하기 위하여 χ^2-Test와 Smirnov-Kolmogorov Test에 依해 Table 2-1과 같이 행하였다. 検定을 施行한 結果 Table 2-1에서 보는 바와 같이 波高 및 周期의 分布型은 Gamma分布型이 適合하다는 仮説이 有意性 0.05 및 0.01 level 에서 인정되었다.

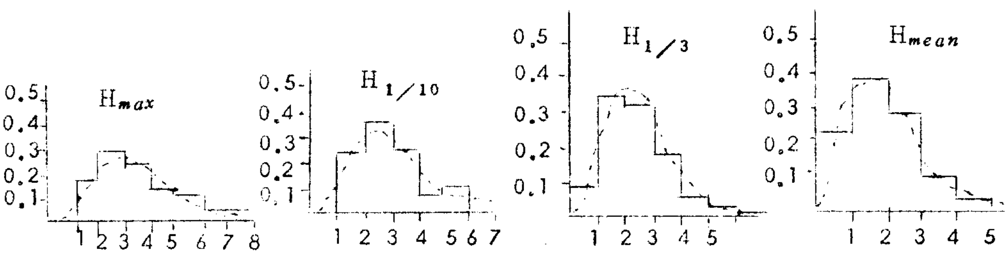

Fig. 2-1. Comparison of observed and theoretical probability distribution

Fig. 2-1. The tables for the test of goodness of fit

H_{max} $\alpha\beta = 3.4277$, $\alpha\beta^2 = 2.1989$, $\beta = 0.6415$, $\alpha = 5.3432$, $\sqrt{\alpha} = 2.3115$, $P = 4.3432$

Class Interval	Frequency	Rel. Freq.	Cum. Rel. Freq	u	$I(u,p)$	Exceedance Probability	Exp. Freq.	χ^2-Test	S.K-Test
0 ~ 1	1	0.012	0.012	0.674	0.014	0.014	1.18	0.027	0.022
1 ~ 2	14	0.166	0.178	1.349	0.161	0.147	12.35	0.220	0.017
2 ~ 3	24	0.286	0.464	2.023	0.438	0.277	23.27	0.023	0.026
3 ~ 4	20	0.238	0.702	2.698	0.695	0.257	21.59	0.117	0.007
4 ~ 5	11	0.131	0.833	3.372	0.858	0.163	13.69	0.529	0.025
5 ~ 6	10	0.119	0.952	4.046	0.941	0.083	6.97	1.317	0.011
6 ~ 7	2	0.024	0.976	4.721	0.978	0.037	3.11	0.396	0.002
7 ~ 8	2	0.024	1.000	5.395	0.992	0.014	1.18	0.570	0.008
Σ	84	1.000						3.199	0.026
							Critical value	$\chi^2_{0.05} = 11.07$ $\chi^2_{0.01} = 15.09$	$\Delta_{0.05} = 0.148$ $\Delta_{0.01} = 0.178$

Ⅲ. Gamma Model에 依한 Simulation

1. Gamma Model

波高 및 周期가 二変数 Gamma分布에 適合하다는 結果로 부터 Simulation을 為한 Gamma Model을 設定하고자 한다.

Markov Model을 사용하는 Wilson-Hilferty[9]와 Matalas[10]의 提案 外에도 Moran[11]의 多変量 解析法 等이 Gamma分布를 하는 水文量의 Simulation으로 알려져 있으나, 실제로 使用이 까다롭고 実用하기에 많은 難点이 있기 때문에 Gamma分布의 変量을 直接 模擬発生하는 Monte Carlo Technique 에 依해 Gamma Model을 다음과 같이 設定하도록 한다.

앞의 (2-3)式으로 나타나는 二変数 Gamma分布로 부터 直接 積分에 의한 確率分布函数를 求하기가 어려우므로, Gamma変量을 바로 発生시켜 주는 即, 다음과 같은 数学的 Model에 依한 Erlang 変量을 発生시킴으로서 Erlang Gamma分布의 変量을 模擬発生시킬 수 있다.[12)]

$$X = \sum_{i=1}^{\alpha} x_i = -\beta \sum_{i=1}^{\alpha} \log \gamma_i \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3-1)$$

FORTRAN PROGRAM으로 使用할 수 있도록 다시 고쳐쓰면 위 式은

$$X = -\beta \left(\log \prod_{i=1}^{\alpha} \gamma_i \right) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3-2)$$

과 같으며 여기서 γ_i는 (0,1) 사이의 均等分布의 乱数이고

Fig. 3-1은 그 Flow Chart이다.

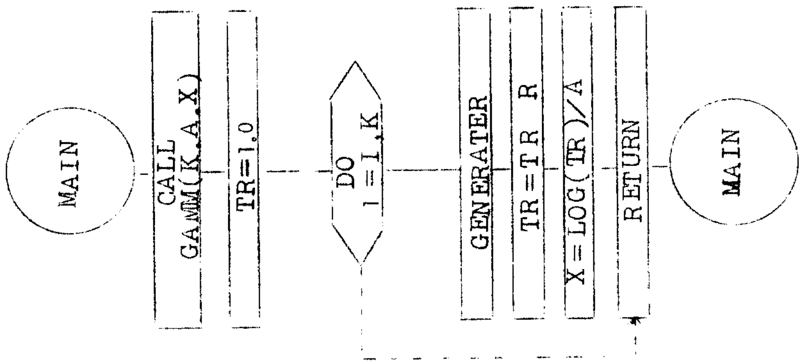

Fig. 3-1. Generation of Gamma variates flow chart

2. Simulation 및 그 結果의 檢討

Gamma Model에 의하여 Gamma分布의 特性을 갖는 波高 및 周期를 Simulation하여 그 資料와 觀測値와의 適合性을 檢討하기 위하여 Table 3-1과 같이 각각의 平均値(Mean), 標準偏差(Standard Deviation), 歪度(Skewness), 尖度(Kurtosis)를 求하여 比較해 본 結果 波高·周期가 모두 平均値에서는 1%內外, 標準偏差에서는 5%미만으로 나타나므로 良好한 것으로 생각되며, 歪度·尖度에서는 約20%~80%의 差異가 있으나 一,二差 Moment를 重視하는 Simulation의 性質로 볼 때 大体的으로 適合한 것으로 생각된다.

Table 3-2. Statistics of Historical and Synthetic Wave Heights

Wave \ Basic Statistics		Mean		Standard Deviation		Skewness		Kurtosis	
H_{max}	Historical	3.4277		1.4829		0.6700		3.0608	
	Model	3.3921	1.04 %	1.4388	2.97 %	0.8124	21.25 %	3.8452	25.63 %
$H_{1/10}$	Historical	2.8910		1.2287		0.6475		3.0906	
	Model	2.8481	1.48 %	1.1903	3.13 %	0.7611	17.54 %	3.7092	20.01 %
$H_{1/3}$	Historical	2.3965		1.4029		0.6293		3.1954	
	Model	2.4179	0.89 %	1.1233	7.71 %	0.9774	55.32 %	4.5685	42.97 %
H_{mean}	Historical	1.8240		1.0061		0.3778		2.8052	
	Model	1.8104	0.75 %	1.0355	2.92 %	0.6448	70.67 %	4.2662	52.08 %
T_{max}	Historical	9.7489		2.5991		0.9802		4.9732	
	Model	9.7024	0.48 %	2.7144	4.44 %	1.0940	11.61 %	9.3728	88.47 %
$T_{1/10}$	Historical	12.2365		4.9038		1.9234		8.4214	
	model	12.1475	0.71 %	4.7733	2.66 %	0.6374	66.86 %	3.5165	58.24 %
$T_{1/3}$	Historical	10.7676		3.4628		1.8256		7.5843	
	Model	10.6284	1.29 %	3.3175	4.20 %	0.6233	65.86 %	3.8013	49.88 %
T_{mean}	Historical	7.5812		2.4971		0.4160		3.3965	
	Model	7.5517	0.39 %	2.4178	3.18 %	0.5937	42.72 %	3.4518	1.63 %

Ⅳ. 結　論

墨湖港의 波高 및 周期를 分析해 본 結果 다음과 같은 結論을 얻었다.

(1) 水文現象에 適合性을 나타내는 二変数 Gamma 分布는 波高 및 周期에 対해서도 適合한 것으로 思料된다.

(2) 二変性 Gamma 分布와 Monte-Carlo 技法에 基礎한 Gamma Model을 使用하여 Simulation 하여 観測値와 그 統計値를 比較하여 볼 때 平均値・標準偏差는 観測値에 近似하고, 歪度・尖度에서는 多少의 差異가 있으나 大体的으로 適合하다고 思料된다.

参考文献

(1) Chow, V.T.; Statistical and Probability Analysis of Hydrologic Data, Hand book of Applied Hydrology (1968).

(2) K. Pearson; Table of the Incomplete Γ - function computed by the Staff of the Department of Applied Statistics, University of London, University College(1965).

(3) Kadoya and Nagao; 二変数 Gamma 分布 및 이의 適用에 関한 研究 ①,②,③,④,⑤, 京都大学校 防災研究所 年報, 13 (1970).

(4) Kibble, W.F.; A Two-Variate Gamma Type Distribution,

SANKHYA(The Indian Journal of Statistics), Vol. 5 (1941).

(5) 李舜鐸 ; 河川流量의 模擬発生에 関한 推計学的 研究, 高麗大学校 大学院, 工学博士学位論文 (1974).

(6) 李曽錫 ; 二変数 Gamma 分布 및 이의 水工学에의 適用에 関한 研究, 嶺南大学校 大学院, 工学博士学位論文 (1976).

(7) 波浪観測統計, 建設部 (1973).

(8) Yevjevich, V.; Stochastic Processes in Hydrology, Water Resources Publications, Fort Collins, Colorado(1972).

(9) Fiering, M.B. and B.B. Jackson; SyntheticSStreamflows, American Geophysical Union, Washington. D.C.(1971).

(10) Matalas, N.C.; Mathematical Assesment of Synthetic Hydrology, Water Resources Research, Vol.3, No.9 (1967)

(11) Moran, P.A.P.; Simulalion and Evaluation of Complex Water Systems Operations, Water Resources Research, Vol.6, No.6(1970).

(12) Naylor, T.H. et alia; Computer Simulation Techniques, Jhon Wiley and Sons, Inc. N.Y(1966) pp.43-122.