# 유한 요소법에 의한
# 海水흐름의 數値解析〔2〕

울산공과대학 김 성 득

## 1. 序 論

平面 2次元 場에서의 流體問題를 취급함에 있어서는 보통 海岸에서의 海水흐름이 그 대상으로 되고있다. 潮汐이나 洪水 流入등에 의한 海水의 水位變動 및 흐름상태를 지배하는 방정식으로는 보통 淺水方程式(Shallow Water Eq) 혹은 Navier-Stokes Eq. 등으로 알려져 있으며 이들에 관한 수치해석 技法, 즉 差分方法 혹은 有限要素方法 등은 지난 70年代에 상당한 진보를 보여왔다. 差分方法은 實際 여러곳에서 적용되어 왔으나 有限要素方法은 그 技法上 差分方法보다 경계 조건의 적합성 및 解의 안정성 등이 一般的으로 좋은 것으로 알려져 있으나 아직은 그 利用이 초기단계에 불과하며 그 理論 및 algorism 등에 관한 硏究는 상당한 진척을 이루고 있으나 實際 Computer Program을 작성한 例는 많지 않다. 北海(North Sea)나 Massachusetts港등 몇몇 적용된 論文은 있으나 이들은 대단히 넓은 区域에의 적용으로 우리나라와 같은 소규모 海岸에서는 그것이 적용된 例가 없다.

本 硏究는 本 硏究題目(1)(U. I. T. Report Vol. II, No 2, 1980)의 結果에 바닥 마찰 저항, 표면 마찰 저항 및 기압변동 조건등을 포함시킨, 보다 一般的인 淺水方程式의 解를 위한 Computer Program을 작성하고 이를 우리나라 海岸에 적용해 보고자 한다.

## 2. 기본 방정식

2 次元 場의 海水흐름을 지배하는 기본 방정식은 다음과 같은 두개의 淺水方程式과 연속 방정식으로 주어진다.

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = f\,v - \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Pa}{\rho}\right) - \frac{1}{\rho}\,\tau_x\Big|_b + \frac{1}{\rho}\,\tau_x\Big|_s \\
&\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\,f\,v - \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{Pa}{\rho}\right) - \frac{1}{\rho}\,\tau_y\Big|_b + \frac{1}{\rho}\,\tau_y\Big|_s
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\varphi u) + \frac{\partial}{\partial y}(\varphi v) = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \ (2)$$

여기서 u, v ; z 方向에 대해서는 평균치를 취한 X, y 方向의 유속성분 ( Vi )

$\varphi = gh$ ; geopotential

g ; 중력 가속도

h ; 수심

f ; Coriolis Parameter

$\rho$ ; 해수 밀도

Pa ; 대기압

$\tau_i\Big|_s = \dfrac{\gamma}{\rho}\dfrac{W_i}{h}\,(W_x^2 + W_y^2)^{\frac{1}{2}}$ ; 표면 마찰력

$\tau_i\Big|_b = -\left(\dfrac{g}{c^2}\right)\rho\,\dfrac{V_i}{h}\,(u^2 + v^2)^{\frac{1}{2}}$ ; 바닥 마찰력

Wi ; 풍속

$\gamma$ ; 공기 밀도 ( $\rho a$ ) 와 관련한 parameter

C ; Chezy 계수

3 . 경계조건 및 초기조건

경계조건은 ① 육지경계에서는 $(V_i)n = 0$ 으로 ② 수면경계에서는 $\varphi = \bar{\varphi}$ 로 주며 초기조건은 평균 해수면에서 시작한다.

4 . 유한 요소 방정식

모든 요소에 대해서 미지수 u, v, $\varphi$ 에 대한 보간함수 $\phi$ 를 갈게 취하여 Galerkin의 weak formulation 방법에 의하여 유한요소 방정식을 만들면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} M & \cdot & \cdot \\ \cdot & M & \cdot \\ \cdot & \cdot & M \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}^N \\ \dot{v}^N \\ \dot{\varphi}^N \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K, & -fM, & G_1 \\ fM, & K, & G_2 \\ -C_1, & -C_2, & O \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u^N \\ v^N \\ \varphi^N \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} F \\ F \\ F \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad \cdots\cdots \ (3)$$

여기서

$$M = \int \phi^T \phi \, dA , \qquad G_i = g \int \phi^T \phi_{,i} \, dA$$

$$K = \int \phi^T \phi_{,x} \, u \, dA + \int \phi^T \phi_{,y} \, v \, dA + \left(\frac{g}{C^2}\right) \int \phi^T \frac{(u^2 + v^2)}{h} \phi \, dA$$

$$F = \int \phi^T \left(\frac{Pa}{\rho}\right)_{,i} dA + \left(\frac{\gamma}{\rho}\right) \int \phi^T \frac{W_i}{H} (W_x^2 + W_y^2)^{\frac{1}{2}} \, dA$$

$$C_i = \int \phi_{,i}^T \varphi \phi \, dA , \qquad F_H = \int \varphi \, \overline{V_n} \, \phi^T \, dA$$

그리고

$$(\ )_{,i} = \frac{\partial}{\partial x_i} , \quad (\dot{\ }) = \frac{\partial}{\partial t} , \quad x_1 = x , \quad x_2 = y$$

## 5. Time Integration

time-extrapolated Crank-Nicolson 方法을 使用하여 공간 도함수 및 비선형 advective 項들을 다음 (4)式과 같이하여 準線型化하고 이를 上記 (3)式에 대입하면 각각의 時間位에서 淺水方程式은 雙으로 되어지고 한 주어진 時間位에서 한번 iteration을 하고난 다음의 각각의 方程式들의 解는 같은 時間位에서 같은 iteration에 대한 다른 두개의 方程式을 풀기위해 使用되어 진다.

$$V_i^{N+\frac{1}{2}} = V_i^{*} = \frac{3}{2}V^N - \frac{1}{2}V^{N-1} + O(\Delta t^2)$$

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} = \frac{1}{\Delta t}(\varphi_i^{N+1} - \varphi_i^N) \qquad \cdots\cdots\cdots (4)$$

$$\varphi_j = \frac{1}{2}(\varphi_j^{N+1} + \varphi_j^N)$$

## 6. 적용 例

本 論文에 소개한다.