하계학술회의
논문85-2-3

가변이득을 갖는 이산형 적응관측자 구성에 관한 연구
(On a Configuration of a Discrete Adaptive Observer with Adjustable Gain)

장 세 훈 한 양 대 학 교
김 성 덕 한 양 대 학 교
김 도 일 한 양 대 학 교

1. 서 론

플랜트의 파라미터 및 상태를 동시에 추정할 수 있는 적응 관측자에 관해서는 Carroll 과 Lindroff (1)에 의해 최초로 제안된 이후, 적응 속도등에 관하여 많은 사람들에 의하여 연구가 진행되고 있다 2-3).

특히 Kreisselmeier (4)는 식별 과정과 상태추정 과정을 분리하여 적응 관측자를 구성할 수 있는 파라미터형 관측자를 제안하였으며, KOpysOv (5)는 추정속도 및 식별 정도를 높일 수 있는 알고리즘을 제시하였다.

이에 본 논문에서는 Kreisselmeier의 파라미터형 구조를 갖는 이산형 적응 관측자를 구성하되, 적응 알고리즘은 KOpysOv의 방법을 사용하였다.
그러나, 이 경우에는 수렴 속도를 빠르게하기 위하여 적응 이득을 작게 주어야하나, 과도 상태가 너무 커질뿐 만 아니라 관측 잡음이 부가된 경우에는 만족할 만한 식별치를 얻지 못하였다. 이와같은 문제를 해결하기 위하여 일정한 상수 이득이 아닌 시간에 따라 변하는 가변 이득을 사용하였다.
이렇게 함으로써 적응 추정속도가 빠르며 관측 잡음의 영향을 줄일 수 있는 적응 관측자를 구성할 수 있었다.

이러한 적응 관측자가 올바르게 구성되었는 지를 보기 위하여 디지틀 전산기 시뮬레이숀 하여 보았다.

2. 본 론

다음과 같은 선형 시불변 이산시간 시스템을 생각한다.

$$X(k+1) = A X(k) + b u(k)$$
$$y(k) = c^T X(k) \qquad (1)$$

여기서 $X(k)$ 는 n차 상태변수벡터, $u(k)$, $y(k)$ 는 스칼라 입출력이다. 또한 시스템이 가제어, 가관측하며, 행렬 A는 안정 즉 A의 고유치들이 단위원내에 존재한다고 가정한다.

이제 다음과 같은 안정한 행렬 F를 시스템에 도입하자.

$$F = \left[f \,\middle|\, \begin{matrix} I_{n-1} \\ \hline 0 \end{matrix} \right], \quad f = [f_1 f_2 \cdots f_n]$$

그러면 미지 시스템 식(1)은 다음식으로 등가 표현된다.

$$X(k+1) = F X(k) + \alpha^T w(k)$$
$$\alpha^T = [a-f,\ b] \qquad (2)$$
$$w^T(k) = [y(k),\ u(k)]$$

여기서 α 는 식별해야할 미지 파라미터들로 선형조합된 벡터이며, $w(k)$ 는 알고있는 입출력 벡터이다.
결국 α 를 추정함으로써 a, b를 구할 수 있으므로 문제는 이 α 를 추정하는 가조정 적응 알고리즘을 구하면 된다.

식(2)의 해를 구하면

$$X(k) = P(k)\alpha + F^k X(0)$$
$$y(k) = z(k)^T \alpha + c^T F^k X(0) \qquad (3)$$

여기서

$$P(k) = \begin{bmatrix} c^T \\ c^T F \\ \vdots \\ c^T F^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} z(k)^T \\ z(k)^T \bar{F} \\ \vdots \\ z(k)^T \bar{F}^{n-1} \end{bmatrix}$$

이며, 2n차원 벡터 $z(k)$ 는 주어진 입출력 정보를 사용하는 다음과 같은 필터의 상태들을 나타낸다.

$$z(k+1) = \bar{F}^T z(k) + \bar{c}\, w(k), \quad z(0)=0 \qquad (4)$$

여기서

$$\bar{F} = \begin{bmatrix} F^T & 0 \\ 0 & F^T \end{bmatrix}, \quad \bar{c} = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}$$

따라서 식(3)에 대응하는 적응 관측자는 다음과 같이 구성할 수 있다.

$$\hat{x}(k) = P(k)\hat{\alpha}(k)$$
$$\hat{y}(k) = z(k)^T\hat{\alpha}(k) \qquad (5)$$

단, $\hat{a}(k)$, $\hat{b}(k)$ 는 미지 파라미터의 식별치이며, $\hat{x}(k)$, $\hat{y}(k)$ 는 각각 $x(k)$, $y(k)$ 의 추정치를 나타낸다. 그러므로 식(3)과 식(5)로 부터 시스템과 식별모델 사이의 추정오차는 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} e(k) &= \hat{y}(k) - y(k) \\ &= z(k)^T\xi(k) + f(k) \end{aligned} \qquad (6)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{e}(k) &= \hat{x}(k) - x(k) \\ &= P(k)\xi(k) - F^K x(0) \\ &= \begin{bmatrix} c^T \\ c^T F \\ \vdots \\ c^T F^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} z_k^T \\ z_k^T F \\ \vdots \\ z_k^T F^{n-1} \end{bmatrix} \xi(k) - F^K x(0) \end{aligned} \qquad (7)$$

여기서

$$\xi^T(k) = [\hat{a}(k) - a,\ \hat{b}(k) - b]$$
$$f(k) = -c^T F^k x(0)$$

이제 남은 문제는 $K \to \infty$ 로 감에 따라 $\hat{a}(k) \to a$, $\hat{b}(k) \to b$ 및 $\hat{x}(k) \to x(k)$ 가 되도록 하고, 수렴특성도 양호하게 되는 적응 알고리즘을 결정하는 것으로 귀결된다. 이를 위하여 다음과 같은 2n차 벡터 $\mathcal{E}(k)$ 를 도입하자.

$$\mathcal{E}(k+1) = -\beta z(k)z(k)^T R(k)^{-1}\mathcal{E}(k) + \beta e(k)z(k) \qquad \beta > 0,\ \mathcal{E}(0) = 0 \qquad (8)$$

여기서 $R(k)$ 는

$$R(k+1) = \gamma R(k) + \beta z(k)z(k)^T, \quad 0 < \gamma < 1,\ R_0 > 0 \qquad (9)$$

로 정의되는 2n x 2n 대칭행렬이다.

파라미터 적응 알고리즘을 결정하기 위하여 다음과 같은 가정을 한다.

1) 행렬 A 및 행렬 F는 안정하며 $0 < \gamma < 1$, $\beta > 0$, $R_0 > 0$ 이다.

2) 입력 U(K)는 유한하고, 충분한 주파수 성분을 포함하고 있다.

즉, 행렬 A와 행렬 F가 안정하고, 입력이 유한하므로, 식(4)의 해 $z(k)$ 가 유한하고 식(9)에서 $0 < \gamma < 1$ 이므로 $R(k)$ 도 유한하게 된다. 이상에서와 같은 가정으로 부터 $R(k)^{-1}$ 가 존재하며 이 역시 유한한 값이 된다.

결국 이들 조건에 의하여 파라미터 적응 알고리즘은 다음과 같이 된다.

$$\xi(k+1) - \xi(k) = \begin{bmatrix} \hat{a}(k-1) - \hat{a}(k) \\ \hat{b}(k-1) - \hat{b}(k) \end{bmatrix} = -R(k)^{-1}\mathcal{E}(k) \qquad (10)$$

이 때 $\lim_{k\to\infty}\xi(k) \to 0$, $\lim_{k\to\infty} e(k) \to 0$ 이 되며, 적응 수렴속도는 $\max\{\gamma, \lambda_m\}$ 에 의해 지배된다는 사실을 알 수 있다. 즉 γ, λ_m 를 작게 설정함으로서 적응 속도를 빠르게할 수 있다.

그러면 식(7)과 위의 적응 알고리즘으로 부터 다음 관계식이 유도된다.

$$\|\mathbf{e}(k)\| \leq M(k)\alpha_0^K + \lambda_m^K \|x(0)\| \qquad (11)$$

단 여기서 λ_m 는 행렬 F의 최대 고유치이며 $M(k)$ 는 유한한 값이다. 따라서 위의 가정 (1), (2)로 부터 $\lim_{k\to\infty}\mathbf{e}(k) \to 0$, $\lim_{k\to\infty}\xi(k) \to 0$ 이 되며 적응 속도는 $\max\{\gamma, \lambda_m\}$ 에 의해 지배된다.

그러나 γ 를 너무 작게해 줄경우 식(9)로 부터 알 수 있듯이 $R(k)^{-1}$ 값이 매우 크게되어 계산기에서 overflow가 생겨 계산상 불안정한 요인이 된다. 더군다나, 관측 잡음이 첨가된 경우에는 파라미터 식별정도까지 문제가 된다. 이제 출력 신호에 관측잡음이 혼입한 경우를 생각해 보자.

$$y(k) = c^T x(k) + \rho(k) \qquad (12)$$

여기서 $\rho(k)$ 는 정규 백색잡음이다.

이 경우, $\gamma < 1$ 일 때에는 미지계수 추정값이 참값으로 수렴되지 않으며, $\gamma = 1$ 인 경우에는 파라미터 추정치가 참값으로 수렴은 되지만, 수렴속도는 느리게된다. 즉 감쇄도가 중요한 과도시의 식별과정등 빠른 적응 속도를 필요로하는 경우에는 파라미터 γ 가 작아야하며, 정상시 관측잡음의 영향을 줄이고 파라미터 식별정도를 좋게하기 위해서는 1에 가까운 큰 이득 γ 가 바람직하다 그러나 일정한 상수 이득으로는 이 두경우를 모두 만족할 수 없다.

다시 말하면, 식별 초기에는 수렴 속도의 개선을 위하여 $\gamma(k)$ 을 1에 비해 작게 설정하고, 정상시 관측 잡음의 영향을 줄이기 위해서는 이득을 1에 가까운 값으로 정해주면 된다.

따라서 시간에 따라 변화하는 가변이득 $\gamma(k)$를 적절히 택함으로써 적응속도 개선뿐만 아니라 파라미터 식별 정도에 미치는 잡음의 영향을 경감 시킬 수 있다.

3. 결 론

본 논문에서는 Kopysov의 알고리즘을 이용한 파라미터형 관측자를 이산형으로 구성하였다.

그러나 출력신호에 관측 잡음이 포함될 때 상수 이득을 사용한 적응 관측자는 적응속도 및 파라미터 식별정도 개선을 동시에 만족할 수 없었다.

이에 과도 과정에서는 적응이득을 작게하고 정상시에는 관측잡음을 감소시키기 위하여 이득을 1에 가깝게하는 가변이득을 사용하였다.

이와같이 구성된 적응 관측자에 대하여 전산기 시뮬레이숀을 행하여 본 결과 적응 속도와 파라미터 식별정도에 있어서 양호한 결과를 얻을 수 있었다.

Reference

1. R.L.Carroll & D.P.Lindorf; " An Adaptive Observer for SISO Linear Systems", IEEE Trans. Auto. Contr. , Vol. AC-18, pp.428-435, Oct. 1973
2. L.Elgard & I.D.Landau & H.M.Silveira; "Adaptive State Estimation Using MRACS Techniques Convergence Analysis and Evolution", IEEE Trans. Auto. Contr., Vol. AC-25, No.6, Dec. 1980
3. K.S.Narendra & Y.H.Lin;"Stable Discrete Adaptive Control", IEEE Trans. Auto. Contr. Vol. AC-25-3, pp.456-461, 1980
4. G. Kreisselmeier;" Adaptive Observer with Exponential Rate of Convergence", IEEE Trans. Auto. Contr. Vol. AC-22, pp. 2-8, Feb. 1977
5. O.Yu. Kopysov & B.I.Prokopov;"Identification of Parameters of Nonlinear Systems by Adaptive Model Method", Automation and Remote Control, 39-12, pp.1803-1808, 1978