하계학술회의
논문85-3-1

# Nevanlinna-Pick 기법을 사용한 필터의 설계

# A Filter Design by Nevanlinna-Pick Method

최 종 호　　서울대학교 공과대학
황 진 권*　　제어계측 공학과

## 1. 서론

필터의 특성은 주파수 영역에서 크기(magnitude)와 위상으로 결정되며 설계자가 원하는 크기와 위상을 갖도록 필터를 설계하는데에는 여러가지 방법이 있다.

예를 들면 Butterworth, Chebychev 및 Elliptic 필터는 크기를 중요시하여 설계된 필터이고 Bessel 필터는 위상을 중요시한 필터이다. [1]

일반적으로 필터 설계에서는 위상보다는 크기에 중점을 두고 설계하는 데, 여기서는 위상과 크기가 모두 가능한 한 설계자가 원하는 특성을 갖도록 하는 방법에 대해 기술하겠다.

여기서 사용하는 기법은 복소수 평면상의 몇개의 점에서 원하는 복소수 값을 갖는 함수를 구하는 Nevanlinna-Pick의 정리를 이용하여, 원하는 필터의 크기와 위상을 갖는 필터의 전달함수를 구하고 이 함수를 실계수 함수로 수정하여 안정한(stable) 필터를 찾아내는 것이다.

## 2. Nevanlinna-Pick 정리

Nevanlinna-Pick 문제에 의한 복소함수 보간법을 알아보자. [2]、[3]、[4]、[5]

복소함수 $f(s)$가 $Re\ s \ge 0$ 에서 해석적이고 $|f(j\omega)|<1,\ \forall\omega$ 이면 SBR(strongly bounded real) 함수라고 정의한다. [2]

다음과 같은 조건을 만족하는 복소수 $\alpha_i, \beta_i$ 에 대하여

$$Re\ \alpha_i > 0,\ |\beta_i| < 1,\ i=1,\dots,n,$$

아래의 식을 만족시키는 SBR함수 $f(s)$를 구하는 것이 Nevanlinna-Pick 문제이다.

Nevanlinna-Pick 문제가 풀리기 위한 조건은 다음과 같이 정의되는 행렬 P(이를 Pick 행렬이라 한다)에 대해서

$$P=\begin{bmatrix} \dfrac{1-\beta_1\bar\beta_1}{\alpha_1+\bar\alpha_1} & \cdots\cdots & \dfrac{1-\beta_1\bar\beta_n}{\alpha_1+\bar\alpha_n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \dfrac{1-\beta_n\bar\beta_1}{\alpha_n+\bar\alpha_1} & \cdots\cdots & \dfrac{1-\beta_n\bar\beta_n}{\alpha_n+\bar\alpha_n} \end{bmatrix} \tag{1}$$

P가 Positive definite 이면 된다.

해를 구하기 위해 우선 다음과 같이 정의되는 Fenyves수열 $\beta$ 를 사용한다.

$$\beta_{i,1}=\beta_i\ ,\qquad i=1,\dots,n,$$

$$\beta_{i,j+1}=\frac{(\alpha_i+\bar\alpha_j)\ (\beta_{i,j}-\beta_{j,j})}{(\alpha_i-\alpha_j)\ (1-\bar\beta_{j,j}\beta_{i,j})}\ ,\ 1\le j\le i-1\le n-1. \tag{2}$$

(1)식의 P가 Postive definite 되기 위한 필요 충분 조건은 $|\beta_{i,j}|<1$이다.

Neranlinna-Pick 문제의 해 $f(s)$는 Fenyves 수열의 $\beta_{i,j}$와 임의의 초기 SBR 함수로부터 순차적으로 구할 수 있다.

$$f_j(s)=\frac{(s-\alpha_j)f_{j+1}(s)+\beta_{j,j}(s+\bar\alpha_j)}{s+\bar\alpha_j+\bar\beta_{j,j}\ (s-\alpha_j)f_{j+1}(s)} \tag{3}$$

$$j=n,\ n-1,\ \dots,\ 1,$$

$$f(s)=f_1(s)\ .$$

여기서 $f_{n+1}(s)$는 임의의 SBR 함수이며 최종적으로 구한 $f(s)=f_1(s)$가 Nevanlinna-Pick 문제의 해가 된다.

### 3. 필터의 설계

Nevanlinna-Pick 의 정리를 사용하여 필터를 설계하는 방법에 대하여 알아보자.

Nevanlinna-Pick 의 정리에 의해 보간법으로 구한 함수는 연속이어서 인접한 두점 사이의 함수값은 큰 차이 없이 변해 나가므로, 원하는 필터의 함수에서 여러 점을 샘플하여 이 점들이 Pick 행렬을 Positive definite 하게 하는 범위내에서 필터 H(jw)를 구하면, 샘플점에서 원하는 필터의 값과 일치하거나 가능한한 원하는 값을 갖고 연속이므로 전 주파수 영역에서 원하는 필터와 근사적으로 일치하는 필터를 구할 수 있다

이것을 이용하여 필터를 설계하자.

필터 함수 $H(jw)=|H(jw)|\,\underline{/H(jw)}$ 에서 크기 $|H(jw)|$는 우함수이고 위상 $\underline{/H(jw)}$는 기함수이므로, 설계하고자 하는 필터가 $\omega$ 에서 $\beta\ \ =H(jw\ )$ 의 값을 갖는 2n개의 점을 주파수 영역에서 0을 기준으로 좌우 대칭이 되게 정하자.

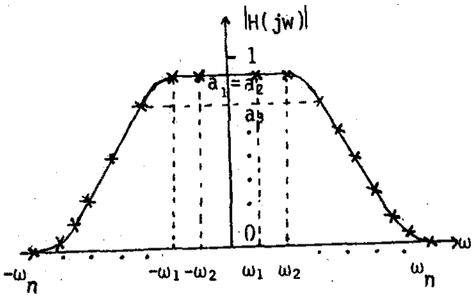


그림 1

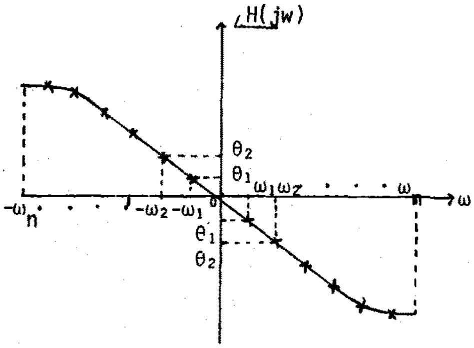


그림 2

그림1과 그림2는 샘플하는 예를 보여준 것이다.

이때 $\alpha$ 를 아래와 같이 정의하면

$$\alpha_i = \varepsilon + \omega_i, \quad (0<\varepsilon<<1) \qquad (4.a)$$

$$\alpha_{2_i} = \varepsilon - \omega_i = \bar{\alpha}_i, \quad i=1,\ldots,n, \qquad (4.b)$$

$$i=1,\ldots,n.$$

각 $\alpha i$ 에 대하여 $H(\alpha i)$는 다음과 같다.

$$\beta_{i,1} = H(\alpha_i) \simeq a_i e^{-j\theta_i} \simeq H(jw_i) \qquad (5.a)$$

$$\alpha_{2_i,1} = H(\alpha_{2_i}) = H(\bar{\alpha}_i) = \bar{\beta}_{i,1} \simeq a_i e^{j\theta_i} = H(-jw_i) \qquad (5.b)$$

$$i=1,\ldots,n,$$

Nevanlinna-Pick 정리를 이용하기 위해 원하는 필터의 크기를 1보다 작은 값으로 정규화 시키고 $Re\ \alpha_i > 0$ 이 되도록 $\varepsilon$은 아주 작게 잡아 $H(jw_i) \simeq H(\alpha_i)$, $H(-jw_i)\ H(\alpha_{2_i})$ 이 되도록 한다.

그런데 $\beta_{i,j} = H(\alpha_i)$가 만족시키는 함수 $H(s)$가 있을 필요 충분 조건은 $|\beta_{i,j}| < 1$이므로 (1)식으로부터 $\beta_{i,j}$이 있어야 하는 범위을 구할 수 있다. (2)식에서 각 $i(i=1,\ldots,n)$에 대해 $\beta_{i,1},\ldots,\beta_{i,i}$까지 순차적으로 구해 나가므로, 반대로 $|\beta_{i,i}| < 1$이 되기 위한 $\beta_{i,i-1}$가 존재할 단위 원 내의 구역을 구할 수 있으며 이로부터 $\beta_{i,i-1}$가 이 구역에 있으려면 $\beta_{i,i-2}$가 존재할 수 있는 단위 원 내의 구역을 구할 수 있고, 이런 방식으로 하면 최종적으로 $|\beta_{i,j}|<1$, $j=1,\ldots,i$ 를 만족시키기 위한 $\beta i,1$의 존재할 단위 원 내의 구역을 구할 수 있다. 즉, (1)식으로 부터

$$\beta_{i,j} = \frac{A_{i,j}\beta_{i,j} + \beta_{i,j+1}}{A_{i,j} + \bar{\beta}_{j,j}\,\beta_{i,j+1}}\ , \qquad (6)$$

$$A_{i,j} = \frac{\alpha_i + \bar{\alpha}_j}{\alpha_i - \alpha_i}\ , \quad 1 \le j \le i-1 \le n-1$$

이 된다. $\beta_{i,j+1}$ 가 $|\beta_{i,j+2}|<1$ 만족되는 단위 원 내의 어떤 구역에 있다면 (6)식에서 $\beta_{i,j+1}$ 이 그 구역에 있을 때 $\beta_{i,j}$ 의 존재할 구역이 나오고, 이 구역과 단위 원 내의 공통 부분이 $\beta_{i,j}$가 존재할 구역이 된다. 같은 방법으로 계속해서 $\beta_{i,j}$ 까지 존재할 구역을 순차적으로 구한다.

이런 구역내에 존재하는 점들 중에서 $\beta i,1$과 일치하는점이 없을 경우 유사한 점을 $\beta'_{i,j}$이라하면 $H(\alpha_i) \simeq \beta'_{i,1}$ 으로 본래의 원하는 특성과 약간 달라질 수도 있으나, 이러한 조건을 만족하는 SBR 함수는 존재한다.

이와 같은 과정을 통하여 구한 $\beta'_{i,1}$을 새로운 $\beta_{i,j}$로 놓고 정리하면,

$$H(\alpha_i) = \beta_{i,1}, \qquad (7.a)$$

$$H(\alpha_{2_i}) = H(\bar{\alpha}_i) = \beta_{2_i,1} = \bar{\beta}_{i,1}, \quad i=1,\ldots,n \qquad (7.b)$$

이 되며 문제는 (7)식을 만족시키는 실 함수를

구하는 것이다.

$\beta_{i,1}, i=1,\ldots,2n$ 에서 $\beta_{i,j}$, $1<i<2n$ 을 (2)식에서 구하면 (7)식을 만족시키는 $H(s)$는 Nevanlinna-Pick 정리에 의하여,

$$H_j(s) = \frac{(s-\alpha_j)\, H_{j+1}(s) + \beta_{j,j}(s+\overline{\alpha}_j)}{(s+\overline{\alpha}_j) + \overline{\beta}_{j,j}(s-\alpha_j)\, H_{j+1}(s)} \quad (8)$$

$$j=2n,\ 2n-1,\ldots,1,$$

여기서 $H_{2n+1}(s)$는 임의의 초기함수 이며 $H(s)=H_1(s)$로 구할 수 있다.

그러나 (8)식의 보간법으로 구한 함수 $H(s)$는 일반적으로 복소수 계수를 가진 함수이므로 실현 불가능한 필터이다. 이 허수 부분을 없애기 위해 $H(s)$를 실계수와 허수 계수를 가진 두 유리 실함수 $g(s)$, $h(s)$로 분리 한다.

$$H(s) = g(s) + jh(s).$$

$H(s)$가 $Re[s]>0$에서 해석적이므로 $g(s)$, $h(s)$도 $Re[s]$에서 해석적이다.

위와 같이 $H(s)=g(s) + jh(s)$로 나타나는 일반적인 유리복소 함수의 성질 하나를 검토해 보면 $H(a)=b$, $H(\overline{a})=\overline{b}$ 이면 $h(a)=h(\overline{a})=0$ 이고 $H(a) = g(a)=b$, $H(\overline{a}) = g(\overline{a})=\overline{b}$ 임을 쉽게 알 수 있다.

복소함수의 이 성질을 이용하면 (7)식에 의해 2n개의 점에 대한 $\alpha_1, \alpha_{2_i}$와 $\beta_i, \beta_{2_i}$에 대해서 다음 식이 성립된다.

$$H(\alpha_i)=g(\alpha_i) = \beta_i,\ h(\alpha_i)=0,$$

$$H(\alpha_{2_i})=g(\alpha_{2_i}) = \beta_{2_i},\ h(\alpha_{2_i})=0$$

$H(s)$와 $g(s)$는 연속 함수이므로 샘플구간을 크지 않게 잡으면 $H(j\omega)\simeq g(j\omega)$가 근사적으로 성립한다.

여기서 $g(s)$를 최종적으로 구하려고 하는 실 함수 필터로 놓는다.

이렇게 구한 필터 $g(s)$는 SBR 함수는 아니지만 $Re\ s>0$ 에서 해석적이므로 안정하다.

그러나, 이런 필터는 하나의 샘플 주파수에 대해 분모와 분자의 차수가 같이 2개씩 증가하므로 샘플 갯수가 많으면 점점 원하는 필터의 특성에 가까우나 큰 차수를 갖는 필터가 되는것이 단점이다.

## 4. 결론

복소수 평면에서의 함수 보간법으로 설계자가 원하는 위상과 크기를 갖는 필터를 설계하는 방법을 제시하였다. 이 설계 방법에 따른 필터 설계는 현재 연구중에 있으며 그 결과는 추후에 발표하겠다. 또한 이 방법을 따르면 필터의 차수가 커질수가 있는데, 필터의 차수를 줄이는 문제는 좀더 연구 되어야 할 과제이다.

## 참고 문헌

[1] D.E. Johnson, "Introkuction to filter theory," Prentice-Hall, INC., 1976.

[2] H.Kimura, "Robust stabilizability for a class of Transfer Functions" IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. AC-29, No.9, Sep., 1984.

[3] J.L.Walsh,"Interpolation and Approximation by Rational Function in the Complex Domain." American Math. Society, 1935.

[4] N.I.Akhizer, "The Class Moment Problem and Some Related Question in Analysis," Kemmer, Oliver & Boyd (trans.), 1965.

[5] Ph. Delsarte, Y.Genin, and Y.Kamp, "On the role of the Nevanlinna-Pick problem in circuit and system theory." Circuit Theory and Appl., Vol.9, pp.177-189, 1981.