하계학술회의
논문85-3-4

Lyapunov 식을 이용한 최적 출력피이드백 제어계의 설계

The Design of Optimal Output Feedback Control Systems Using Lyapunov Equations

임 화 영 광운 대학
배 영 철* 광운 대학

I. 서 론

2차형 평가함수를 최소화시키는 선형 연속시간 제어계와 이산시간 제어계의 최적 출력피이드백 이득정수를 Lyapunov식을 이용하여 구하도록 하였으며 Lyapunov의 선형 행렬방정식의 해법을 개선 하였다.

II. 이론적 배경

1) 연속시간 제어계

선형 시불변형계를

$$\dot{X} = A X + B U \quad ----(1)$$

$$Y = C X \quad ----(2)$$

로 나타내고, 출력피이드백 제어인

$$U = -F Y \quad ----(3)$$

를 적용하여 평가함수

$$J = E\left\{ \tfrac{1}{2}\int_0^\infty (X'QX + U'RU)\right\} dt \quad ----(4)$$

여기서 Q: 준정치 가중행렬, R: 정치 가중행렬

를 최소화시키는 이득행렬 F를 구한다.

Levine와 Athans[1]는 이득정수 F 계산을 위한 다음과 같은 앨고리즘을 제시하였다.

$$A_o \triangleq A - B F C \quad ----(5)$$

$$Q_o \triangleq -\left[Q + C'F'R F C\right] \quad ----(6)$$

로 나타내면 최적 이득정수 F는

$$F = R^{-1} B' K L C' \left(C L C'\right)^{-1} \quad ----(7)$$

로 되며, K와 L은 다음 식의 해이다.

$$A_o'K + K A_o = Q_o \quad ----(8)$$

$$A_o L + L A_o' = -X_o \quad ----(9)$$

여기서 X_o: 초기상태의 공분산 이다.

식(5)~식(9)를 반복 계산하여 수렴해가는 F를 구한다. 평가함수는

$$J = \tfrac{1}{2}\, tr\, K X_o \quad ----(10)$$

로 구해진다.

2) 이산시간 제어계

선형 시불변형계의 관계식을

$$X(k+1) = A X(k) + B U(k) \quad ----(11)$$

$$Y(k) = C X(k) \quad ----(12)$$

로 나타내고 출력피이드백 제어인

$$U(k) = -F Y(k) \quad ----(13)$$

를 적용하여

$$J = E\left\{ \tfrac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} (X(k)QX(k) + U(k)RU(k))\right\} \quad ----(14)$$

를 최소화시키는 F를 구하는 앨고리즘은 다음과 같다.

$$A_o = A - B F C \quad ----(15)$$

$$Q_o = -\left[Q + C'F'R F C\right] \quad ----(16)$$

로 표시하면 이득정수는

$$F = \left[R + B'K B\right]^{-1} B' K A L C' \left[C L C'\right]^{-1} \quad ----(17)$$

로 되며 K와 L은 다음 관계식에서 구한다.

$$A_o'K A_o - K = Q_o \quad ----(18)$$

$$A_o L A_o' - L = -X_o \quad ----(19)$$

식(15)~식(19)을 반복 적용하여 수렴해가는 F를 구한다.

또한

$$J = \tfrac{1}{2}\, tr\, K X_o \quad ----(20)$$

가 된다.

III. Lyapunov 선형 행렬 방정식의 해법

1) 연속시간 제어계

$$A_o'K + K A_o = Q_o \quad ----(8)$$

에서 K 행렬을 구하기 위하여 먼저 A 의 직고 변환 행렬 Z를 써서 A 행렬을 Upper Schur 형으로 변환시킨다.

$$\hat{A} = Z' A_0 Z = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} & \cdots & \hat{A}_{1p} \\ & A_{22} & \cdots & A_{2p} \\ & & & \vdots \\ & & & A_{pp} \end{bmatrix} \qquad ----(21)$$

같은 변환 행렬을 적용하여

$$\hat{Q} = Z' Q_0 Z \qquad ----(22)$$

$$\hat{K} = Z' K Z \qquad ----(23)$$

로 표시하면 식(8)은

$$\hat{A}' \hat{K} + \hat{K} \hat{A} = \hat{Q} \qquad ----(24)$$

로 된다.

$\hat{A}$ 행렬의 대각 부분 행렬 (block diagonal matrix)는 (1x1) 혹은 (2x2) 차수를 가진다.

이차수에 맞추어 $\hat{K}$와 $\hat{Q}$를 (nx1) 혹은 (nx2) 열 벡터로 나타내어

$$\hat{Q} = [\hat{Q}_1 \ \hat{Q}_2 \ --- \ \hat{Q}_p] \qquad ----(25)$$

$$\hat{K} = [\hat{K}_1 \ \hat{K}_2 \ --- \ \hat{K}_p] \qquad ----(26)$$

표시하면 처음요소에서

$$\hat{A}' \hat{K}_1 + \hat{K}_1 \hat{A}_{11} = \hat{Q}_1 \qquad ----(27)$$

로 됨을 알수있다.

$\hat{A}_{11}$ 이 (1x1) 행렬인 경우는 $\hat{A}_{11} \doteq \hat{a}_{11}$ 로 표시하면

$$\hat{K}_1 = [\hat{A}' - \hat{a}_{11} I]^{-1} \hat{Q}_1 \qquad ----(28)$$

로 구할수 있으며, $\hat{A}_{11}$이 (2X2) 행렬일 경우는 세분하여

$$\hat{A}_{11} \doteq \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad \hat{K}_1 \doteq [\hat{K}^1 \ \hat{K}^2], \ \hat{Q}_1 \doteq [\hat{Q}^1 \ \hat{Q}^2] \ ---(29)$$

표시하고 식(27) 에 적용하여

$$\begin{bmatrix} \hat{K}^1 \\ \hat{K}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{A}'+\hat{a}_{22} I & -\hat{a}_{21} I \\ -\hat{a}_{12} I & \hat{A}'+\hat{a}_{11} I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\hat{A}'^2+(\hat{a}_{11}+\hat{a}_{22})\hat{A}'+(\hat{a}_{11}\hat{a}_{22}-\hat{a}_{12}\hat{a}_{21})I]^{-1} \hat{Q}^1 \\ [\hat{A}'^2+(\hat{a}_{11}+\hat{a}_{22})\hat{A}'+(\hat{a}_{11}\hat{a}_{22}-\hat{a}_{12}\hat{a}_{21})I]^{-1} \hat{Q}^2 \end{bmatrix} \qquad ----(30)$$

로 정리할수 있다. 식(28)과 식(30)의 역행렬은 계산하지 않고, Lower schur 형을 이용하여, 전진 대입법으로 쉽게 해를 구할수 있다.

다음 $\hat{K}_2$ 계산은 계산된 $\hat{K}_1$를 대입하고 대칭성을 이용하여 차수를 줄이고 같은 방법으로 구한다.

이와같이 K 까지 계산하며 최종K는

$$K = Z \hat{K} Z' \qquad ----(31)$$

로 역변환하여 얻어진

$$A_0 L + L A_0' = - X_0 \qquad ----(9)$$

의 계산은 직고 변환 Z 행렬과, $T = \begin{bmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & \end{bmatrix}$ 안 행렬로 변환하여

$$T \hat{A} T T \hat{L} T + T \hat{L} T T \hat{A} T = - T \hat{X}_0 T$$

$$\tilde{A}' \tilde{L} + \tilde{L} \tilde{A} = - \tilde{X}_0 \qquad ----(32)$$

로 표시하면 식(24)와 같은 꼴이 되므로 같은 방법으로 계산하고

$$L = Z T \tilde{L} T Z \qquad ----(33)$$

로 역변환 하여 구한다.

2) 이산시간 제어게

연속시간 제어계와 같은 표기법의 변환을 적용한다.

$$A_0' K A_0 - K = Q_0 \qquad ----(18)$$

을 Z행렬을 써서 변환한다.

$$\hat{A}' \hat{K} \hat{A} - \hat{K} = \hat{Q} \qquad ----(34)$$

따라서, 처음요소는

$$\hat{A}' \hat{K}_1 \hat{A}_{11} - \hat{K}_1 = \hat{Q}_1 \qquad ----(35)$$

가 되므로 $\hat{A}_{11}$ 이 (1x1) 일 경우는,

$$\hat{K}_1 = [\hat{a}_{11} \hat{A}' - I]^{-1} Q_1 \qquad ----(36)$$

$\hat{A}_{11}$ 이 (2X2) 일때는 식(35)는

$$\begin{bmatrix} \hat{K}^1 \\ \hat{K}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{a}_{22} A - I' & -a_{21} A \\ -a_{12} A' & a_{11} A' - I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\hat{a}_{11}\hat{a}_{22}-\hat{a}_{12}\hat{a}_{21})A'^2 - (\hat{a}_{11}+\hat{a}_{22})A' + I \ \hat{Q}^1 \\ (\hat{a}_{11}\hat{a}_{22}-\hat{a}_{12}\hat{a}_{21})A'^2 - (\hat{a}_{11}+\hat{a}_{22})A' + I \ \hat{Q}^2 \end{bmatrix}$$

$$----(37)$$

로 정의 할 수 있다.

또한 식(19)도 Z와 T행렬을 써서 식(24)와 같은 꼴로 변환하고 같은 앨고리즘을 적용하여 계산한다.

IV. 결 론

시불변형 선형제어계의 출력피이드 백 이득정수를 Lyapunov식을 이용하여 구하는 방법을 소개하였으며 연속시간계와 이산시간계의 Lyapunov 선형 행렬방정식을 상호 유사한 앨고리즘으로 계산할 수 있도록 하였다.

이 앨고리즘은 역행렬을 쓰지않고 열벡터단위로 순차적으로 계산할 수 있도록 하므로서 전산기의 계산시간과 기억용량을 감소시키고 정확한 해가 계산되도록 하였다.

참 고 문 헌

(1) W.S. Levine and M. Athans, "On the Determination of the Optimal Constant Output Feedback Gains for Linear Multivariable Systems", IEEE Trans. Autmat. Cont.,

Vol. AC-15, No. 1, PP. 44-48, Feb. 1970.

(2) D.L. Kleinamn and P.K. Rao, "Extensions to the Bartels-Stewart Algorithm for Linear Matrix Equations", IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. AC-23, No. 1, PP. 85-87, Feb. 1978.

(3) E.J. Davison and N.S. Rau, "The Optimal Output Feedback Control of a Synchronous Machine", IEEE Trans. Power App. Syst., Vol. PAS-90, PP. 2123-2134, Sept. /Oct. 1971.

(4) S.S Choi and H.R. Sirrisena, "Computation of Optimal Output Feedback Gains for Linear Multvariable Systems", IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. AC-19, PP. 257-258, 1974.

(5) G. Srinivasan, S. Elangovan, and N.D. Rao, "Stabilization of a power System Through Output Feedback", Proc. IEEE, Vol. 64, No. 3, PP. 370-371, Mar. 1976.

(6) H. Kimura, "A Further Result on the Problem of Pole Assignment by Output Feedback", IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. AC-22, PP. 458-463, 1977.

(7) E.J. Davison and P. Wong, "A Robust Conjugate-Gradient Algorithm which Minimizes L-Functions", Automatica, Vol. 11, pp. 297-308, 1975.

(8) B.S. Garbow et al., Matrix Figensystem Routines-EISPACK Guide Extension, Berlin: Srping-Berlag, 1977.

(9) J. O'reilly, "Optimal Low-Order Feedback Controllers for Linear Discrete-Time Systems", Control and Dynamic Systems, Academic Press, Vol-16, PP. 335-367, 1980.