

쇄기형 산란체에 의해 산란된 전자파에 대한 쌍적분 방정식 해석
Analysis of dual integral equation formulated
for EM waves scattered by wedges

김 세 운
나 정 응
신 상 영

한국과학기술원
전기및 전자공학과

Abstract

New dual integral equation for electromagnetic field scattered by an arbitrary dielectric wedge is formulated. In order to check the validity and physical meaning of the formulated equation, it is applied to the well-known case which is the diffraction by a perfectly conducting wedge.

1. 서 론

임의의 물체에 의해 산란되는 전자파를 계산하는 문제는 산란체의 경계조건을 만족하도록 파동 방정식을 푸는 고전적인 수학문제의 하나로, 산란체가 변수분리 가능한 극히 제한된 구조일 경우만 정확한 해가 알려져 있다[1]. 따라서 일반적인 구조에 대해 적용 가능한 방법으로, 파동 방정식을 정확히 풀지 않고 광학적인 근사법을 확장한 기하 광학적 회절이론[2](Geometrical Theory of Diffraction)과 전자계산기를 이용한 수치해석 방법이 주로 사용되고 있다[3]. 그러나 산란체가 쇠기형 유전체일 경우, 변수분리가 되지 않고 모서리 끝이 수학적으로 특이점이 되므로 아직 정확한 해가 알려져 있지 않으며, 앞 두 방법 역시 적용할 수 없다[4].

본 논문에서는 쇠기형 유전체에 의해 산란된 전자파를 계산하기 위하여 새로운 파수영역에서의 쌍적분 방정식을 유도하고[5,6], 이 방정식의 타당성을 살펴보기 위하여 쇠기형

유전체중의 특별한 경우로서 정확한 해가 알려진 쇠기형 완전도체에 대해 적용하여 보았다.

2. 쌍적분 방정식

그림 1과 같이 E-분극된 단위크기의 평면파 u_1 가 θ_1 의 각으로 쇠기형 유전체에 입사할 경우 전체 전계 u 는 다음과 같은 적분 방정식을 만족한다[5].

$$u(x, y) = u_1(x, y) + (k_d^2 - k_v^2) \iint_{S_d} dx' dy' u(x', y') \frac{1}{4} H_0^{(1)}(k_v \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}) \quad (1)$$

여기서 k_d 와 k_v 는 유전체 내부(S_d)와 외부영역(S_v)에서의 파수를 의미하고, $H_0^{(1)}$ 은 1종의 Hankel 함수이다. 여기서 유전체 내부전계에 대해 푸리에 변환(연산자 F)을 취한 값을 A 라고 정의하면[6],

$$A(\alpha, \beta) = F[H(x \sin \theta_d - y \cos \theta_d)H(y)u(x, y)] \quad (2)$$

으로 H 는 Heaviside 계단함수이다. 식(2)를 식(1)에 이용하여 convolution을 쓰면 식(1)을 다음과 같은 식으로 바꿀 수 있다.

$$u(x, y) = u_1(x, y) + H(x \sin \theta_d - y \cos \theta_d)H(y)u(x, y) - F^{-1}[K(\alpha, \beta)A(\alpha, \beta)] \quad (3)$$

여기서 K 는 다음과 같이 정의한다.

$$K(\alpha, \beta) = \frac{\alpha^2 + \beta^2 - k_d^2}{\alpha^2 + \beta^2 - k_v^2} \quad (4)$$

식(2)의 양면에 프리에 역변환을 취하며, 식(3)과 함께 A 를 $B(\alpha, \beta) / (\alpha^2 + \beta^2 - k_d^2)$ 으로 변환하여 정리하면 다음과 같은 쌍적분 방정식을 얻을 수 있다.

$$u(x, y) = \begin{cases} F^{-1} \left[\frac{B(\alpha, \beta)}{\alpha^2 + \beta^2 - k_d^2} \right], & S_d \\ u_i(x, y) - F^{-1} \left[\frac{B(\alpha, \beta)}{\alpha^2 + \beta^2 - k_v^2} \right], & S_v \end{cases} \quad (5.a)$$

$$F^{-1} \left[\frac{B(\alpha, \beta)}{\alpha^2 + \beta^2 - k_d^2} \right] = 0, \quad S_v \quad (6.a)$$

$$u_i(x, y) - F^{-1} \left[\frac{B(\alpha, \beta)}{\alpha^2 + \beta^2 - k_v^2} \right] = 0, \quad S_d \quad (6.b)$$

윗 식에서 $B(\alpha, \beta)$ 는 다음과 같은 선적분으로 주어짐을 보일 수 있다[6].

$$B(\alpha, \beta) = - \int_0^\infty d\rho e^{-i\alpha\rho} [i\beta u(\rho, 2\pi) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} u(\rho, 2\pi)] + \int_0^\infty d\rho e^{-i(\alpha \cos \theta_d + \beta \sin \theta_d)\rho} [i(\alpha \sin \theta_d - \beta \cos \theta_d)u(\rho, \theta_d) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} u(\rho, \theta_d)] \quad (7)$$

이 경우 전계를 (x, y) 좌표가 아니고 (ρ, θ) 좌표로 표시하였다. 따라서 임의의 쇠기형 유전체에 의해 산란된 전계는, 식(6,a)와 (6,b)를 풀어서 $B(\alpha, \beta)$ 또는 $A(\alpha, \beta)$ 를 계산하고, 이를 식(5,a)와 (5,b)에 대입함으로써 전영역에서 정확한 값을 구할 수 있다.

3. 쇠기형 완전도체의 경우 해에 대한 두가지 표현식

그림 1에서 유전체의 유전상수 ϵ_d 가 무한대일 경우 산란체는 완전도체를 의미하는데, 쇠기형 완전도체에 의해 산란되는 전계는 변수분리 방법으로 구할 수 있으며 다음과 같은 급수식으로 주어진다[1].

$$u(\rho, \theta) = - \frac{4}{t} \sum_{m=1}^{\infty} (-i)^m \frac{J_m(k_v \rho)}{t} \sin \frac{m(\theta - \theta_d)}{t} \sin \frac{m(\theta \perp \theta_d)}{t} \quad (8)$$

여기서 t 와 θ' 는 각각 다음과 같다.

$$t = \frac{2\pi - \theta_d}{\pi}, \quad (9.a)$$

$$\theta' = \pi + \theta_i \quad (9.b)$$

식(8)에서 θ 에 θ_d 또는 2π 를 대입하면 u 가 0이므로, $\frac{\partial u}{\partial \theta}$ 를 계산하여 식(7)에 대입하면 $B(\alpha, \beta)$ 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$B(\alpha, \beta) = - \frac{4}{t} \sum_{m=1}^{\infty} (-i)^m \frac{\sin \frac{m(\theta' - \theta_d)}{t}}{t} [(-1)^m e^{i \frac{m}{t} \cos^{-1}(\frac{\alpha}{k_v})} - e^{-i \frac{m}{t} \cos^{-1}(\frac{\alpha \cos \theta_d + \beta \sin \theta_d}{k_v})}] \quad (8)$$

식(8)를 식(5,a)에 대입하면 k_d 가 무한대이므로 S_d 영역에서는 u 가 0이고, S_v 영역에서는 (ρ, θ) 좌표로 쓰면 다음과 같이 표시된다.

$$u(\rho, \theta) = e^{ik_v \rho \cos(\theta - \theta_i)} - \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} d\beta \frac{B(\alpha, \beta)}{\alpha^2 + \beta^2 - k_v^2} e^{i(\alpha x + \beta y)}$$

윗 식에서 β 에 대해 contour 적분을 취하고, α 를 $k_v \cos \omega$ 로 치환하면, 그림 2와 같은 p-경로의 적분으로 바뀐다.

$$u(\rho, \theta) = e^{ik_v \rho \cos(\theta - \theta_i)} - \frac{1}{4\pi i} \int_P d\omega D(\omega) e^{ik_v \rho \cos(\omega - \theta)} \quad (9)$$

여기서 모서리 회절 패턴 D 는

$$D(\omega) = \frac{1}{t} \left[\cot \left(\frac{\omega - \theta_i}{2t} \right) - \cot \left(\frac{\omega - 2\pi + \theta_i}{2t} \right) - \cot \left(\frac{\omega - \theta_i - 2\pi}{2t} \right) + \cot \left(\frac{\omega - 2\theta_d + \theta_i}{2t} \right) \right] \quad (10)$$

으로 Kantorovich-Lehedev 변환으로 구한 해와 일치함을 알 수 있다[1].

4. 쌍적분 방정식의 유용성

식(8)에 구한 B 는 식(5)를 만족시킴을 살펴 보았다. 이를 식(6,a)에 대입하면 역시 k_d 가 무한대이므로 S_v 영역에서는 0을 만족함을 알 수 있다. B 를 식(6,b)에 대입하면 식(9)와 (10)과 같은 표현식을 S_d 영역에서 얻을 수 있다. 그러나 S_d 영역을 $0 \leq \theta \leq \theta_d$ 의 범위

로 취하면, 식(8)의 급수해에서 보듯이 전개 u 가 2π 의 주기함수가 아니므로 식(7)에서 우변의 첫째 적분항에 $u(\rho, 2\pi)$, $\frac{\partial}{\partial \theta} u(\rho, 2\pi)$ 대신에 $u(\rho, 0)$, $\frac{\partial}{\partial \theta} u(\rho, 0)$ 를 대입해야 한다. 이 관계를 이용하면 식(6, b)의 해는 식(9)와 같은 형태로 $D(\omega)$ 가 식(10)과는 다른 다음과 같이 주어진다.

$$D(\omega) = \frac{1}{t} \left[\cot\left(\frac{\omega - 2\pi - \theta}{2t}\right) - \cot\left(\frac{\omega - 2\pi - 2\pi + \theta}{2t}\right) - \cot\left(\frac{\omega - \theta}{2t}\right) + \cot\left(\frac{\omega - 2\theta}{2t}\right) \right] \quad (11)$$

식(11)을 식(9)에 대입하여 Pole 에 대해 contour 적분하면 식(6, b)를 만족함을 보일 수 있다. 이는 t 가 (9, a)와 같이 주어지기 때문이다.

이를 물리적으로 살펴 보면, 그림 3에서 보듯이 경계면 $\theta = \theta_d$ 에서는 전계가 연속이지만 다른 경계면 $\theta = 0$ 에서는 $\theta = 2\pi$ 인 경우와 그 값이 다르다. 그런데 $\theta_d \leq \theta \leq 2\pi$ 로 제한하여 산란체 외부영역 S_v 의 각을 표시하고 내부영역을 $0 \leq \theta \leq \theta_d$ 로 표시하므로 경계면 $\theta=0$ 로 부터 연속이 되기 위해서는 θ 대신 $\theta = \theta + 2\pi$ 를 대입해야 한다. 이는 Sommerfeld 가 쇄기형 완전도체의 문제를 풀 경우에 사용한 다중 sheet 의 개념과 일치하는 것이다[7].

5. 결 론

임의의 쇄기형 산란체에 의해 산란되는 전자파를 파수 영역의 쌍적분 방정식으로 표시하였는데, 그 극한의 경우로 완전도체일 경우 성립함을 살펴 보았다. 따라서 변수분리가 되지 않는 유전체인 경우에 대해서도 쌍적분 방정식을 풀 경우 다중 sheet 개념이 필요함을 알 수 있다.

참 고 문 헌

- [1] J.J. Bowman, T.B.A. Senior, and P.L.E. Uslenghi (ed.), Electromagnetic and acoustic scattering by a simple shapes, Ch. 1 and 6., North Holland Pub., 1969.
- [2] G.L. James, The geometrical theory of diffraction, Inst. of Elect. Eng. Press, 1976.
- [3] D.S. Jones, Methods in EM waves propagation, Clarendon Press, 1979.
- [4] L. Lewin and I. Sreenivasiah, "Diffraction by a dielectric wedge," Scien. Rep., no. 47, Univ. of Colorado, 1979.
- [5] C.S. Joo, J.W. Ra, and S.Y. Shin, "Scattering by right angle dielectric wedge," IEEE Trans., AP-32, pp. 61-69, 1984.
- [6] S.Y. Kim, J.W. Ra, and S.Y. Shin, "Edge diffraction by dielectric wedge of arbitrary angle," Electron. Lett., vol. 19, pp. 851-853, 1983.
- [7] A. Sommerfeld, Optics (Lect. on Theoretical Physics, vol. 4), Ch. 5, Academic Press, 1964.

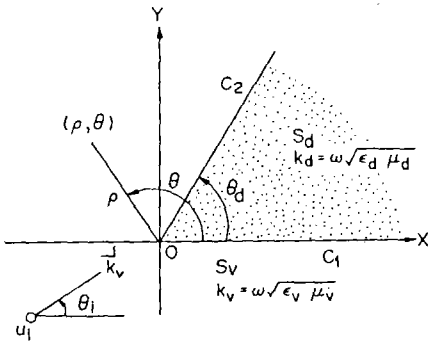


그림 1. E-분극된 평면파 입사경우 쇄기형 유전체 구조

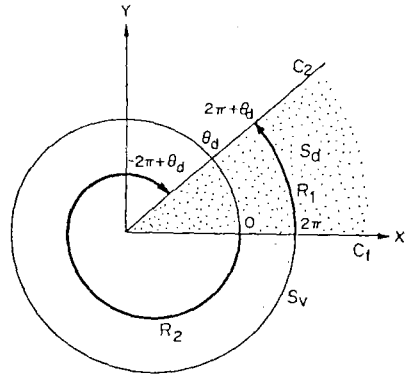


그림 3. 유전체 내부와 외부영역에 대한 각의 표시 및 다중 sheet 개념도

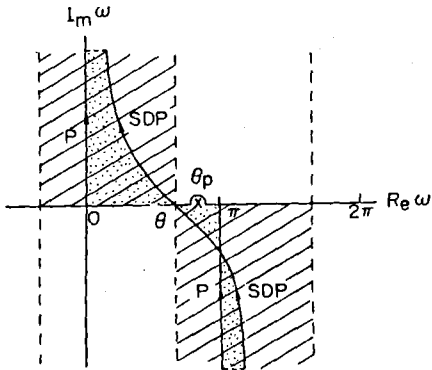


그림 2. 2차원 역 프리에 변환에 대한 복소 ω 평면상의 적분경로 적분경로 특이점 및 SDP