

7. 對流 - 擴散方程式에 의한 流出水文曲線의 解析

東國大學校 工科大學 教授
東國大學校 大學院 卒業

南 宣 祐
朴 翔 雨

대류 - 확산 방정식에 의한 유출수문곡선의 해석,
 (Analysis of outflow Hydrograph
 by the Convection - diffusion equation,)

동국대학교 대학원 박 상우*
 동국대학교 공과대학 교수 남 선우

1. 서론

하천의 상류에 발생한 홍수파가 하류의 도시들을 통과할때 최대 수위와 통과 소요시간등을 예측하는 것은 치수면에서 매우 필요하며, 이를 위한 공학적수단의 하나로서 홍수추적기법이 이용된다. 홍수추적은 연속 방정식으로 부터 저류 방정식을 이용한 수문학적 추적과 비정상류에 대한 연속방정식과 운동량 방정식을 푸는 수리학적 추적으로 크게 분류 될 수 있다. 수문학적 추적중에서 유입과 유출만의 관계로 계수 K 와 X 를 결정하는 Muskingum 방법이 주로 이용되는데, 이방법의 단점은 마찰과 같은 동역학적인 영향을 포함을 시키지 않은 것이다. 그러나 이런 단점은 유출현상을 Kinematic wave 로 가정한 대류-확산 방정식으로 개선할 수 있다.

Cunge 는 Muskingum 방법에서의 계수 K 와 X 를 Kinematic Wave 의 속도인 매개변수 W 의 함수로 수정하고, 유한차분식을 근거로 하여 선형 대류-확산 방정식의 해에 근접한 Muskingum-Cunge 방법을 제안하였다.

따라서 본 연구에서는 Muskingum 방법에서의 계수결정을 광측된 유입·유출에만 의존하지 않고, 하폭과 하상경사의 변화에 따른 저류모사로 인한 홍수파의 감소인자의 도입, 평균치를 통한 첨두유량의 도입, 추적구간의 길이, 홍수첨두의 유하시간등을 직접연관시킨 Muskingum-Cunge방법에 남한강의 저류인 평창강의 자료를 적용하여 유출수문곡선을 구하고, 실측자료와 비교 검토 및 오차의 산정으로 실제 하천에 대한 Muskingum-Cunge 방법의 적합성 여부를 확립하고자 한다.

2. 홍수추적의 이론

2-1. 지배공식의 유도

개수로의 점진적으로 변하는 흐름을 지배하는 공식은 연속방정식과 운동량 방정식이라 할 수 있다.

$$\text{연속방정식: } \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = q$$

$$\text{운동량방정식: } \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right) = Ag \left(s - \frac{\partial y}{\partial x} - S_f \right) + \rho V^2$$

여기서, A = 하천의 단면적, Q = 유량
 g = 중력가속도, s = 하상경사

$\frac{\partial y}{\partial x}$ = 수면경사, S_f = 마찰경사(에너지 경사)

ρ = 수로의 단위길이당 측면유입량, V = 유속

식(2-2)를 지표면에서의 흐름(Overland flow)에서와 같이 Kinematic wave로 간주하고, 마찰경사 S_f 를 Stricker-Manning의 공식에 적용하면 다음과 같다.

$$s - \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{Q^2 \cdot n^2}{A^2 \cdot R^{4/3}} = 0 \quad (2-3)$$

여기서 R = 동수반경, n = Manning의 조도계수.

식(2-3)을 Q 에 관하여 정리하여 식(2-1)에 대입하면 Kinematic Wave의 지배공식을 아래와 같이 변수 A (또는 y) 만을 갖는 방정식이 된다.

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{n} A \cdot R^{2/3} \left(s - \frac{\partial y}{\partial x} \right)^{1/2} \right] = \rho \quad (2-4)$$

2-2. 데류-확산 방정식

홍수 터에 대한 홍수의 연구는 하천의 총유량을 수로안쪽에 대한 유량 Q_c (inbank flow)와 홍수 터위의 유량 Q_f (flood over flood plain)로 나누어 설명할 수 있다.

이때 전체 시스템에 대한 수로와 홍수 터의 흐름을 식(2-1)과 식(2-3)으로 나타내면 다음과 같다.

$$\text{수로에 대하여: } \frac{\partial A_c}{\partial t} + \frac{\partial Q_c}{\partial x} = g^* \quad (2-5)$$

$$s - \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{Q_c^2 \cdot n_c^2}{A_c^2 \cdot R_c^{4/3}} = 0 \quad (2-6)$$

$$\text{홍수 터에 대하여: } \sigma \frac{\partial A_f}{\partial t} + \frac{\partial Q_f}{\partial x} = -\rho + g^* \quad (2-7)$$

$$C^2 \left(s - \frac{\partial y}{\partial x} \right) - \frac{Q_f^2 \cdot n_f^2}{A_f \cdot R_f^{4/3}} = 0 \quad (2-8)$$

여기서 g^* = 홍수 터에서 수로까지의 단위길이당 측면유입량

σ = 홍수 터에 대한 수로의 굴곡율

첨자 c 와 f = 각각 수로와 홍수 터를 나타냄.

식(2-5)와 식(2-7)을 합하면

$$\text{여기서 } \frac{\partial A_f}{\partial t} = \frac{B_c}{B_c} \quad (2-9)$$

B_c 와 B_f = 각각 수로와 홍수 터가 물에 잠긴 폭

또한 식(2-6)과 식(2-8)을 각각 Q_c 와 Q_f 에 관하여 정리하여 총유량 Q 를 구하고 n 에 관하여 미분하면 아래와 같다.

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \left[\frac{R_c^{2/3}}{n_c} \left(1 + \frac{2}{3} \frac{A_c}{R_c} \frac{\partial R_c}{\partial A_c} \right) + \frac{\sigma^{3/2}}{n_f} \frac{\partial}{\partial A_c} (A_f R_f^{2/3}) \right] \left(S - \frac{\partial H_c}{\partial x} \right)^{1/2} \frac{\partial A_c}{\partial t} - \frac{1}{5} Q \left(S - \frac{\partial H_c}{\partial x} \right)^{-1} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{B_c} \frac{\partial A_c}{\partial t} \right) \quad (2-10)$$

식(2-9)와 식(2-10)사이에서 $\partial H_c / \partial t$ 를 소거하고 수로의 폭에 대한 수로길이의 비가 매우 크다고 가정하면 식(2-11)과 같다.

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + w \left(1 - \frac{1}{5} \frac{\partial H_c}{\partial x} \right)^{3/2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - q \right) = -\frac{1}{5} Q \left(S - \frac{\partial H_c}{\partial x} \right)^{-1} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{\lambda B_c} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - q \right) \right] \quad (2-11)$$

여기서

$$w = \frac{Q}{\lambda (Q_c n_c)^{2/3} B_c^{2/3} S^{3/2} \left(1 + \frac{2}{3} \frac{A_c}{R_c} \frac{\partial R_c}{\partial A_c} + \theta \right)} \quad (2-12)$$

$$\lambda = 1 + \sigma \frac{B_c}{B_f} \quad (2-13)$$

$$\theta = \sigma^{3/2} \frac{A_f R_f^{2/3}}{n_f} \left[\frac{A_c}{A_f} \frac{E_f}{B_c} \left(1 + \frac{2}{3} \frac{A_f}{R_f} \frac{\partial R_f}{\partial A_f} \right) - \left(1 + \frac{2}{3} \frac{A_c}{R_c} \frac{\partial R_c}{\partial A_c} \right) \right] \times \left[\frac{A_c R_c^{2/3}}{n_c} + \sigma^{3/2} \frac{A_f R_f^{2/3}}{n_f} \right]^{-1} \quad (2-14)$$

식(2-11)에서 q 가 일정하고 $|\partial H_c / \partial x|$ 가 작고 λ 가 작다고 할때, 식(2-11)은 다음과 같은 대류-확산식으로 표현된다.

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + w \frac{\partial Q}{\partial x} = Q \frac{\partial}{\partial x} \left(a \frac{\partial Q}{\partial x} \right) + \frac{a Q}{5} \frac{d}{dx} \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{3}{5} a_c \left(\frac{\partial Q}{\partial x} \right)^2 + w q \quad (2-15)$$

여기서

$$a = (2 \lambda B_c S)^{-1} \quad (2-16)$$

식(2-15)에서의 w 와 a 는 각각 유량 Q 의 대류속도와 확산을 나타낸다.

2-3. 대류-확산 방정식의 해

식(2-15)에서 우측항이 좌측항보다 상당히 작다고 하면 아래와같이 1차원 모델로 쓸수있다.

$$\frac{\partial Q_1}{\partial t} + w_1 \frac{\partial Q_1}{\partial x} = 0 \quad (2-17)$$

여기서

$$w_1 = w(\theta_1, x)$$

$$\theta_1 = Q \text{에 대한 1차원 모델}$$

식(2-17)은 속도 w_1 으로 이동하는 Kinematic Wave 를 나타낸다. 이런 파의 첨두유량은 수로도 geometry 에 의한 영향을 받지 않으나, w_1 이 하도길이 x 와 유량 θ_1 의 함수이므로 w_1 의 변화는 하도의 Kinematic Wave 대한 유출수문곡선의 현상에 직접적인 영향을 준다. 그러나 식(2-15)의 우측항은 실제로 Kinematic Wave 의 해를 수정시키고, 첨가되는 소유량 Q_1 을 알기 위하여 식(2-15)로 부터 다음과 같은 2차식 모델을 발췌할 수 있다.

$$\frac{\partial Q_2}{\partial t} + w_1 \frac{\partial Q_2}{\partial x} + w_2 \frac{\partial Q_2}{\partial x} = \theta_1 \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(a_1 \frac{\partial Q_2}{\partial x} + \frac{a_1}{5} \frac{d}{dx} \frac{\partial Q_2}{\partial x} \right) \right] + \frac{3}{5} a_{1c} \left(\frac{\partial Q_2}{\partial x} \right)^2 + w_1 q \quad (2-18)$$

$$Q_2 = \int_0^x q dx + \frac{Q_1}{w_1} \frac{d}{dt} \left(\frac{\alpha}{w_1} \frac{dQ_1}{dt} \right) + \frac{3}{5} \frac{\alpha_c}{w_1} \left(\frac{dQ_1}{dt} \right)^2 \quad (2-19)$$

여기서, $\alpha =$ 감소 매개변수

$$= \frac{1}{2 B_c} \left[\frac{1}{L} \int_0^L \frac{\lambda}{S^{1/3}} dx \right]^{-3} \int_0^x \left(\frac{\lambda}{S} \right)^2 dx \quad (2-20)$$

$\bar{w} =$ 평균 대류속도, $\frac{\lambda}{B_c} =$ 평균 수로폭, $L =$ 하도의 길이

2-4. Muskingum-Cunge 방법

하도의 상류에서의 유입량을 Q_j , 유출량을 Q_{j+1} 하면 식(2-21)과 식(2-22)의 관계에서

Muskingum 방정식은 식(2-23)과 같이 표현된다.

$$ds/dt = Q_j - Q_{j+1} \quad (2-21)$$

$$S = K[XQ_j + (1-X)Q_{j+1}] \quad (2-22)$$

$$K \frac{d}{dt} [XQ_j + (1-X)Q_{j+1}] = Q_j - Q_{j+1} \quad (2-23)$$

여기서 S = 저류량, K = 저류상수, X = 유입·유출량의 상대적 중요성을 나타내는 상수

Muskingum-Cunge 방법에서는 저류에 의한 측면유입량을 계산에 포함하게 되므로, 식 (2-23)을 유한차분명으로 바꾸어 쓰면 다음과 같다. (그림 1. 참조)

$$\begin{aligned} \frac{K}{\Delta t} [XQ_j^{n+1} + (1-X)Q_{j+1}^{n+1} - XQ_j^n - (1-X)Q_{j+1}^n] \\ = \frac{1}{2} (Q_j^{n+1} - Q_{j+1}^{n+1} + Q_j^n - Q_{j+1}^n) \end{aligned} \quad (2-24)$$

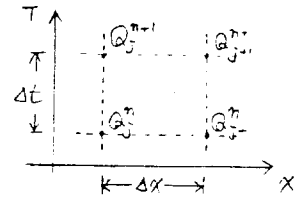


그림 1. 유한차분법

여기서 Δt = 홍수파가 소구간 ΔX 를 통과하는 시간
따라서 하도 끝부분에서 방법에 의한 유출수문곡선은 다음과 같다.

$$Q_{j+1}^{n+1} = C_1 Q_j^n + C_2 Q_{j+1}^{n+1} + C_3 Q_{j+1}^n + C_4 \quad (2-25)$$

여기서

$$C_1 = \frac{KX + 0.5\Delta t}{K(1-X) + 0.5\Delta t}$$

$$C_2 = \frac{0.5\Delta t - KX}{K(1-X) + 0.5\Delta t}$$

$$C_3 = \frac{K(1-X) - 0.5\Delta t}{K(1-X) + 0.5\Delta t}$$

$$C_4 = \frac{g \cdot \Delta t \cdot \Delta X}{K(1-X) + 0.5\Delta t}$$

(2-26)

2-5. 매개변수 K와 X에 대한 식의 유도

식(2-15)를 선형 대류-확산 방정식으로 취하면

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + w \frac{\partial Q}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} \quad (2-27)$$

여기서 $\mu = \frac{\alpha(Q_0)}{L} \bar{Q}_0$ (2-28)

또한 식(2-21)과 식 (2-22)식을 변형시키면

$$ds/dt = Q(\alpha, t) - Q(\alpha + \Delta X, t) \quad (2-29)$$

$$S = K[XQ(\alpha, t) + (1-X)Q(\alpha + \Delta X, t)] \quad (2-30)$$

여기서 t = 시간좌표, α = 공간좌표.

$Q(\alpha + \Delta X, t)$ 를 α 에 대하여 Taylor 급수로 전개한 후, 시간도함수를 취한 식(2-30)에 대입하면 다음과 같다.

$$ds/dt = -\frac{\partial Q}{\partial x} \Delta X - \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} \quad (2-31)$$

$$\text{그러므로 } \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\Delta X}{K} \frac{\partial Q}{\partial x} = \left[\Delta X(1-X)w - \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta X}{K} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} \quad (2-32)$$

식(2-27), (2-28)와 식(2-32)으로부터 K와 X는 다음과 같다

$$K = \frac{\Delta X}{\omega} \quad (2-33)$$

$$X = \frac{1}{2} - \frac{\alpha \cdot \bar{Q}_p}{L \cdot \omega \cdot \Delta X} \quad (2-34)$$

$$[\because \mu = (\frac{1}{2} - X) \omega \cdot \Delta X]$$

2-6. Muskingum-Cunge 방법에서의 매개변수의 산정
앞에서와 같은 이론을 적용하여 다음과 같은 Muskingum-Cunge 방법에 의한 홍수추적을 할 수 있다.

(1) 식(2-20)가 같은 감소인자 α 를 다음과 같이 구한다.

기암 최대홍수에 대하여

$$\alpha = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{L_m} \sum_{m=1}^M \frac{P_m}{S_m^{1/3}} \right]^{-3} \cdot \sum_{m=1}^M \left(\frac{P_m}{L_m S_m} \right)^2$$

홍수 터에 미치지 않는 홍수에 대하여

$$\alpha = \frac{1}{2 B_c} \left[\frac{1}{L_m} \sum_{m=1}^M \frac{L_m}{S_m^{1/3}} \right]^{-3} \cdot \sum_{m=1}^M \left(\frac{L_m}{S_m^2} \right)$$

여기서 $L_m =$ 소구간 길이

$S_m =$ 소구간의 하상경사

$P_m =$ 소구간의 홍수 터와 수로의 면적합.

(2) 유입수문곡선의 첨두에서의 곡률을 다음 식으로 부터 산정한다.

$$\frac{d^2 Q_p}{dt^2} = \frac{Q_{p-1} + Q_{p+1} - 2Q_p}{(\delta t)^2}$$

$$\text{이때, } \delta t = t_p/2$$

$t_p =$ 홍수첨두의 유하시간

Q_{p-1} 과 $Q_{p+1} = Q_p$ 를 전후로 한 Δt 간격의 유량

(3) 감소유량 Q^* 를 구한다

$$Q^* = \frac{\alpha_p}{(L/t_p)^3} Q_p \left| \frac{d^2 Q_p}{dt^2} \right|$$

(4) 대류 속도 ω 를 구한다

$$\omega = \frac{1}{t_p} - \frac{2\alpha}{L} Q^*$$

(5) 만일 $Q^*/Q_p > 0.1$ 이면 Q_{new}^* 를 다시 계산하고, 따라서 ω 도 다시 계산한다.

$$Q_{new}^* = Q_p [1 - \exp(-Q^*/Q_p)]$$

(6) 평균 첨두유량을 구한다.

$$\begin{aligned} \bar{Q}_p &= \frac{1}{2} [Q_p + (Q_p - Q^*)] \\ &= Q_p - \frac{1}{2} Q^* \end{aligned}$$

(7) 식 (2-33)와 (2-34)로 부터 x 와 X 를 계산한다

2-7. 오차검정방법

$$\cdot \text{감소량의 오차(\%)} = \left(\frac{\text{실측첨두유량} - \text{예측첨두유량}}{\text{실측첨두유량}} \right) \times 100$$

$$\cdot \text{홍수첨두의 속도오차(\%)} = \left(\frac{\text{실측속도} - \text{예측속도}}{\text{실측속도}} \right) \times 100$$

$$\bullet \text{ 표준편차 (\%)} = \left(\frac{1}{2m+1} \sum_{n=1}^{2m+1} (\text{실측유량} - \text{예측유량})^2 \right)^{1/2} \times \frac{100}{\text{평균 실측유량}}$$

$$\bullet \text{ 평균편차 (\%)} = \left(\frac{\text{평균 실측유량} - \text{평균 예측유량}}{\text{평균 실측유량}} \right) \times 100$$

여기서 $2m+1$ = 유출수문곡선의 시간공간을 $2m$ 로 나눈 격정수

$$\text{평균유량 } \bar{Q}_m = \frac{1}{2m+1} \sum_{n=1}^{2m+1} (Q_1^{2m+1} + 4Q_2^{2m+1} + \dots + Q_{2m+1}^{2m+1})$$

3. 홍수추적의 결과

1983년 및 1984년의 평창강 수문 자료를 이용하여 Muskingum-Cunge 방법으로 홍수추적한 결과 표1과 같이 매개변수 및 첨두유량의 감소량을 얻었으며, 이에 따른 각각의 오차는 표2와 같다.

(표1) 홍수추적에 의한 각 매개변수와 감소량

Flood date	α ($\times 10^4$)	\bar{Q}_p (m^3/sec)	ω (m/sec)	Curvature (m^3/sec)
1983.7.24	0.67	276.83	1.79	-0.185×10^{-4}
1984.7.3	0.54	976.03	2.28	-0.762×10^{-4}

Flood date	K	ϵ	Δt (min)	Predicted attenuation (m^3/sec)	Recorded attenuation (m^3/sec)
1983.7.24	1.808	0.316	34.6	56.8	31.0
1984.7.3	1.454	0.29	30.1	178.8	144.0

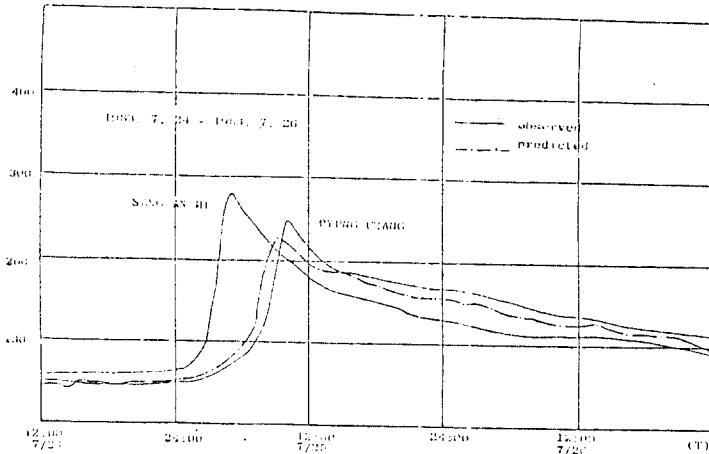
(표2) 홍수추적에 대한 오차

Flood date	\bar{Q}_p (m^3/sec)	ω (m/sec)	α_p ($\times 10^4$)	Recorded peak discharge (m^3/sec)	Error (%) in predicted discharge
1983.7.24	276.83	1.79	0.67	218.4	10.1
1984.7.3	976.03	2.28	0.54	914.1	7.1

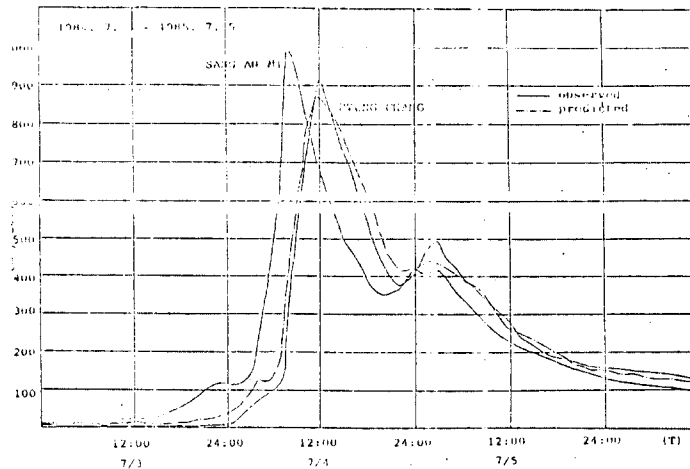
Flood date	Recorded speed (m/sec)	Error (%) in predicted (m/sec)	Ave. recorded discharge (m^3/sec)	Standard deviation (%)	mean deviation (%)
1983.7.24	1.84	-2.72	154	19.71	5.67
1984.7.3	2.30	-0.87	491	15.10	2.05

또한 관측부문 자료를 입력시켜 얻은 수문곡선은 그림 2와 그림 3과 같다.

그런데 관측 자료의 미비로 1983년 홍수의 추적을 지류의 영향을 고려하지 못했기 때문에 수문곡선의 오차가 상당히 크게 나타났다.



(그림 2) 1983년 7월 관측수문곡선 및 예측수문곡선



(그림 3) 1984년 7월 관측수문곡선 및 예측수문곡선

• 결론

- 1) 지류의 영향을 고려하지 않았을 경우 첨두유량과 첨두파의 유하시간의 예측에 있어서 다소의 오차 발생하였으며, 지류의 영향을 고려하였을 경우 비교적 정확한 결과를 얻을 수 있었다.
- 2) 첨두유량의 크기가 전반적으로 작게 나타 나는데, 이는 보다 정밀하고 많은 자료로 부터 매개변수를 산정한다면 결과는 개선되리라 본다.
- 3) 실측치와 예측치의 오차의 정도가 비교적 양호하므로 지류를 갖는 다른 하천에 대하여 매개변수의 계산착오, 수치적인 추적계산의 실책등을 주의한다면 홍수예경모에 대한 Muskingum-Cunge 방법의 적용 가능성이 크리라 사료된다.