水理構造物에 의한 開水路 斷面縮小에 따른 흐름현상

flow phenomena at channel constriction by hydraulic structures

漢陽大學校 大學院 趙 容畯*
漢陽大學校 土木工學科 敎授 尹 泰勳

1. 서론

자연하천에 橋脚과 같은 수리구조물을 설치하게 된 경우 하천흐름단면은 감소하게 되고 이로 인해 교각설치부의 하류쪽으로는 증가된 유속으로 인한 세굴현상이 상류쪽으로는 배수현상이 발생하게 되어 하천제방과 같은 인근 구조물의 안전성을 위험하게 된다. 따라서 교각설계시 이로 인해 야기되는 흐름현상을 미리 예측하는 것이 필요하다. 이에 본 연구에서는 2次元 부정류의 운동량 방정식과 연속방정식을 적용하여 유한 차분법 (finite difference method)을 이용한 수치모형을 정립하여 단면축소부에서의 흐름현상에 대한 해석을 시도하고자 한다.

2. 지배 방정식

실제 흐름은 3次元으로 해석하는 것이 가장 이상적이나 연직방향의 가속도가 중력 가속도에 비해 작아 무시할 수 있는 경우, 즉 河床조도에 의한 난류혼합으로 인해 연직방향으로 균일한 유속분포를 갖는 경우 기본 방정식을 깊이에 대한 평균변량으로 표시하면 2次元 해석이 가능한 것으로 알려져 있으며 깊이에 대해 적분을 취한 기본 방정식은 아래와 같다.

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial[(h+\eta)\hat{u}]}{\partial x} + \frac{\partial[(h+\eta)\hat{v}]}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + \hat{u}\frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + \hat{v}\frac{\partial \hat{u}}{\partial y} + g\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\tau_{bx}}{\rho(h+\eta)} - \frac{1}{\rho(h+\eta)}\left[\frac{\partial}{\partial x}((h+\eta)T_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y}((h+\eta)T_{xy})\right] = 0$$

$$\frac{\partial \hat{v}}{\partial t} + \hat{u}\frac{\partial \hat{v}}{\partial x} + \hat{v}\frac{\partial \hat{v}}{\partial y} + g\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\tau_{by}}{\rho(h+\eta)} - \frac{1}{\rho(h+\eta)}\left[\frac{\partial}{\partial x}((h+\eta)T_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y}((h+\eta)T_{yy})\right] = 0$$

$$\hat{u} = \frac{1}{(h+\eta)}\int_{-h}^{\eta} u\,dz \quad , \quad \hat{v} = \frac{1}{(h+\eta)}\int_{-h}^{\eta} v\,dz$$

여기서 u는 x방향 유속성분, v는 y방향 유속성분, h는 평균수면에서 바닥까지의 수심, η는 평균수면으로 부터의 수표면 변위 $\tau_{bx} \cdot \tau_{by}$는 하상마찰응력 $T_{xx} \cdot T_{yx} \cdot T_{xy}$는 유효전단응력을 말한다.
여기서 유효전단응력이라 함은 유체의 점성에 의한 전단응력 난류유속변동성분에 의한 Reynolds 응력, 3次元 흐름을 2次元으로 해석하는 데서 오는 부가적인 전단효과등을 포함한다.
하상마찰응력은 Dronker[16]에 의해 (4)식과 같이 표현된다.

$$\tau_{bx} = \rho f_r \hat{u} (\hat{u}^2 + \hat{v}^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\tau_{by} = \rho f_r \hat{v} (\hat{u}^2 + \hat{v}^2)^{\frac{1}{2}}$$

$f_r = g/c^2$ 이고 c는 chezy 계수.

이상의 방정식을 수치모형화 하는데 있어서 가장 큰 어려움의 하나는 유효전단응력을 수심에 대한 평균값으로 표현하는 문제이다.

이에 관해서는 Kuipers와 Vreugdenhil[10]이 제안한 속도의 공간평균과정을 통해 유효전단응력을 수치모형에 음성적으로 도입하여 해결하는 방법과 유효전단응력을 수심에 대한 평균값으로 직접 표현하는 방법들이 있다.
Kuipers와 Vreugdenhil이 제안한 방법은 유효전단응력을 수치모형에 양성적으로 포함시키지 않고 매 시간구간마다 속도의 공간적 평균과정을 통해 유속을 연화(smoothing)함으로써 수치모형내에 유효전단응력을 인위적으로 모의발생시키는 것으로 수식으로 표현하면 아래와 같다.

$$\hat{u}^*_{j,k} = \hat{u}_{j,k}(1-\alpha) + \frac{\alpha}{4}(\hat{u}_{j-1,k} + \hat{u}_{j,k-1} + \hat{u}_{j,k+1} + \hat{u}_{j+1,k})$$

$$\hat{v}^*_{j,k} = \hat{v}_{j,k}(1-\alpha) + \frac{\alpha}{4}(\hat{v}_{j-1,k} + \hat{v}_{j,k-1} + \hat{v}_{j,k+1} + \hat{v}_{j+1,k})$$

여기서 $\hat{u}^*_{j,k}$, $\hat{v}^*_{j,k}$는 공간평균된 유속이고, α는 가중인자, $j \cdot k$는 공간격자점 번호이다.
이상과 같은 인위적 점성형태의 에너지 감쇠과정을 통해 수치모형의 불안정성의 성장을 억제하는 방편이 될 수도 있으나 이 방법의 단점은 매 시간구간마다 연화되는 양중 실제 유효전단응력을 재현하는 데 기여하는 양과 수치모형의 불안정성의 성장을 억제하는 데 기여하는 부분을 個別的으로 해석할 수 없다는 것이고 적절한 가중인자를 결정하는 데 어려움이 따른다.
따라서 본논문에서는 유효전단응력을 Boussinesq 渦動粘性係數로 도입하여 수심평균값으로 표현했다.

$$\frac{1}{\rho(h+\eta)}\left[\frac{\partial}{\partial x}((h+\eta)T_{xx})+\frac{\partial}{\partial y}((h+\eta)T_{xy})\right]=\epsilon\left(\frac{\partial^2\hat{u}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\hat{u}}{\partial y^2}\right)$$

$$\frac{1}{\rho(h+\eta)}\left[\frac{\partial}{\partial x}((h+\eta)T_{xy})+\frac{\partial}{\partial y}((h+\eta)T_{yy})\right]=\epsilon\left(\frac{\partial^2\hat{v}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\hat{v}}{\partial y^2}\right)$$

여기서 $\epsilon=\alpha(\Delta x)^2/\Delta t$ 이고 Δx는 공간격자망의 크기 Δt 시간구간의 크기이고 α는 보정계수이다.

3. 유한차분 방정식

기본방정식 (1) ~ (3) 에 해당하는 유한차분식은 ~~每~~ 시간구간을 두개의 가상적인 부분으로 나누어 두번의 계산과정이 수행되는 ADI (alternating direction implicit)[8,9,11,12] 방법을 이용해 표현했다.

즉 $m\Delta t$에서 $(m+\frac{1}{2})\Delta t$ 까지의 구간에서는 기본방정식 (1) ~ (3) 에서 $\hat{u}$, η을 포함하는 항은 음성적으로 표현하고 $\hat{v}$를 포함하는 항은 양성적으로 표현한다.

반면에 $(m+\frac{1}{2})\Delta t$ 에서 $(m+1)\Delta t$ 까지의 구간에서는 $\hat{v}$, η를 포 항은 음성적으로 표현하고 $\hat{u}$를 포함하는 항은 양성적으로 표현된다.

또한 모든 격자점에서 $\hat{u}$, $\hat{v}$, η, h 가 정의되어야 하나 계산상의 편의와 경계조건의 대입을 용이하게 하기 위해 개개의 격자점에 상이한 값을 정의하는 Space-staggered mesh system 을 사용했다.

연속 방정식,

$$\frac{\partial\eta}{\partial t}:\quad\frac{\eta^{m+\frac{1}{2}}_{j,k}-\eta^{m}_{j,k}}{\frac{1}{2}\Delta t}$$

$$\frac{\partial[(h+\eta)\hat{u}]}{\partial x},\quad\frac{A\hat{u}^{m+\frac{1}{2}}_{j+\frac{1}{2},k}-B\hat{u}^{m+\frac{1}{2}}_{j-\frac{1}{2},k}}{\Delta x}$$

$$A=0.5(h_{j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}+h_{j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}+\eta^{m}_{j+1,k}+\eta^{m}_{j,k})$$

$$B=0.5(h_{j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}+h_{j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}+\eta^{m}_{j,k}+\eta^{m}_{j-1,k})$$

$$\frac{\partial[(h+\eta)\hat{v}]}{\partial y},\quad\frac{C\hat{v}^{m-1}_{j,k+\frac{1}{2}}-D\hat{v}^{m-1}_{j,k-\frac{1}{2}}}{\Delta y}$$

$$C=0.5(h_{j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}+h_{j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}+\eta^{m}_{j,k+1}+\eta^{m}_{j,k})$$

$$D=0.5(h_{j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}+h_{j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}+\eta^{m-1}_{j,k}+\eta^{m-1}_{j,k-1})$$

운동량 방정식

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = \frac{\hat{u}^{n+\frac{1}{2}}_{j+\frac{1}{2},k} - \hat{u}^{n-\frac{1}{2}}_{j+\frac{1}{2},k}}{2\Delta t}$$

$$\frac{\partial(\hat{u}\hat{u})}{\partial x} = \frac{(\hat{u}^{n-\frac{1}{2}}_{j+1,k})^2 - (\hat{u}^{n-\frac{1}{2}}_{j,k})^2}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial(\hat{v}\hat{u})}{\partial y} = (\hat{u}^{n-\frac{1}{2}}_{j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} \cdot 0.5(\hat{v}^{n}_{j+1,k+\frac{1}{2}} + \hat{v}^{n}_{j,k+\frac{1}{2}}) - \hat{u}^{n-\frac{1}{2}}_{j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} \cdot 0.5(\hat{v}^{n}_{j+1,k+\frac{1}{2}} + \hat{v}^{n}_{j,k-\frac{1}{2}}))/\Delta y$$

$$g\frac{\partial \eta}{\partial x} = g \cdot (\eta^{n+\frac{1}{2}}_{j+1,k} - \eta^{n+\frac{1}{2}}_{j,k})/\Delta x$$

$$f\frac{\hat{u}(\hat{u}^2+\hat{v}^2)^{\frac{1}{2}}}{(h+\eta)} = f(\hat{u}^{n+\frac{1}{2}}_{j+\frac{1}{2},k} + \hat{u}^{n-\frac{1}{2}}_{j+\frac{1}{2},k})(|\hat{u}^{n-\frac{1}{2}}_{j+\frac{1}{2},k}| + 0.25|\hat{v}^{n}_{j,k-\frac{1}{2}} + \hat{v}^{n}_{j,k+\frac{1}{2}} + \hat{v}^{n}_{j+1,k-\frac{1}{2}} + \hat{v}^{n}_{j+1,k+\frac{1}{2}}|)/$$
$$(h_{j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} + h_{j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} + \eta^{n}_{j+1,k} + \eta^{n}_{j,k})$$

$$\varepsilon\left(\frac{\partial^2\hat{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\hat{u}}{\partial y^2}\right) = \varepsilon(\hat{u}^{n-\frac{1}{2}}_{j+\frac{3}{2},k} - \hat{u}^{n-\frac{1}{2}}_{j-\frac{1}{2},k} + \hat{u}^{n-\frac{1}{2}}_{j+\frac{1}{2},k+1} - \hat{u}^{n-\frac{1}{2}}_{j+\frac{1}{2},k-1} - 2\hat{u}^{n+\frac{1}{2}}_{j+\frac{1}{2},k} - 2\hat{u}^{n-\frac{1}{2}}_{j+\frac{1}{2},k})/\Delta x^2$$

x 방향을 따라 각 격자점에 연속방정식과 운동량 방정식을 적용함으로써 얻을 수 있는 방정식을 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} & 0 \\ 0 & X_{22} & X_{23} & X_{24} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{u}^{n+\frac{1}{2}}_{j-\frac{1}{2},k} \\ \eta^{n+\frac{1}{2}}_{j,k} \\ \hat{u}^{n+\frac{1}{2}}_{j+\frac{1}{2},k} \\ \eta^{n+\frac{1}{2}}_{j+1,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$$

이상과 같은 수치모형이 안전성을 갖기 위해서는 Courant NO.가 5보다는 작아야 하는 것으로 알려졌고[4]

즉 $\frac{\Delta t\sqrt{gh}}{\Delta x} < 5$

x, y 방향에 유한차분식을 적용할 경우 얻어지는 연립방정식의 행렬을 푸는 데는 Thomas algorithm을 이용한 Gauss Elimination이 이용된다.

4. 斷面縮小部의 水面해석

개수로에서 단면축소로 인한 수면변화를 해석하기 위해서 축소부 상하류에 築流가 일어나는 水路구간을 설정하여 본 모형을 적용했다.

실제 자연하천에서의 흐름은 부정류이므로 흐름상태를 해석하고자하는 유역에서의 수심과 유속을 동시에 측정하여 초기조건을 구하는 데는 상당한 무리가 따르므로 유속이 0인 정지상태(cold start)에서 계산을 시작했으며 하안에서의 경계조건으로는 하안에 수직한 유속성분과 평행한 유속성분이 다같이 0인 no-slip 조건을 대입했고 상하류의 경계에서는 水位만을 고정하여 等流수심을 대입했다.

공간격자점의 크기는 1m로 하였고 시간구간의 크기는 $\frac{\Delta t \cdot \sqrt{gh}}{\Delta x}$가 4를 넘지않도록 선택했다.

水路중심에서의 水位를 흐름방향에 따라 도시한 결과 그림 12, 13과 같은 결과를 보였다.