

비최소 위상 다변수 계통에 대한 극점배치 자기동조 제어기
Pole-Placement Self-Tuning Controllers for Nonminimum
Phase Multivariable Systems

이 상 호 광운대학 전자공학과 교수
양 태 규* " 대학원
박 종 우 " 대학원

1. 서 론

자기동조 제어는 정확한 계통 모델의 지식이 없이도 쉽게 실행할 수 있기 때문에 제어 분야에서 많은 관심을 가져왔다.

자기동조 제어 연구는 여러가지 접근 방법으로 할 수 있다. 최소 변화 제어에 바탕을 둔 자기동조 이론이 Astrom[1]에 의해 제기된 이후로, 확장된 최소 변화 제어는 Clarke와 Gawthrop[2]에 의해 제안되었다. 그리고 극점 영점 배치에 기초한 자기동조 제어가 Astrom과 Wittenmark[4]에 의해 스킨라 계통에 적용되어 왔다.

다변수 계통에 Borison[6]이 최소 변화 자기동조 조절기를 확장하였다. 또한 Koivo[7]는 수종 오차를 제거하기 위해 적분기를 추가하였다.

이러한 일련의 방법들에 의해 계통에 모델을 접속하게 되면 수렴이 어떤 시간 내에 가능해지지만 계통의 제로들이 삭제되기 때문에 계통은 최소 위상을 가져야만 한다. 그러나 실제 계통에 있어서는 비최소 위상을 갖는 경우가 적지 않다.

이 문제를 해결하기 위해 극점 영점 배치에 바탕을 둔 자기동조 제어가 연구되어왔다.

본 논문에서는 비최소 위상 다변수 계통에서 극점 배치를 기초로한 자기동조 제어기를 설계한다.

계통의 제로들이 삭제되지 않게 극점 배치를 하고, 온라인으로 하중 행렬을 선택한다.

그리고 적분기를 사용하지 않고 수종 오차를 제거하고 비간섭(decoupling)을 할 수 있는 제어기를 설계한다.

또한 매개변수 추정용 확장된 순환 최소 차승법(recursive extended least squares)을 이용한다.

2. 극점배치 제어기

2.1 제어기 구조

다중 입출력 계통을 다음과 같이 선형 차분 방정식으로 표현하자.

$$A(z^{-1})y(t) = B(z^{-1})u(t-k) + C(z^{-1})v(t) \quad (1)$$

여기서, $u(t)$ 는 $nx1$ 입력 벡터, $y(t)$ 는 $nx1$ 출력 벡터, $v(t)$ 는 관측할 수 없는 백색 잡음이며 $E[v(t)v^T(t)] = r$, k 는 계통의 지연 시간, z^{-1} 는 지연 연산자이다. $A(z^{-1})$, $B(z^{-1})$ 와 $C(z^{-1})$ 은 다음과 같은 다항식 행렬이다.

$$\begin{aligned} A(z^{-1}) &= I + A_1 z^{-1} + \dots + A_{n_a} z^{-n_a} \\ B(z^{-1}) &= B_0 + B_1 z^{-1} + \dots + B_{n_b} z^{-n_b} \\ C(z^{-1}) &= I + C_1 z^{-1} + \dots + C_{n_c} z^{-n_c} \end{aligned}$$

여기서, A_i , B_i 와 C_i 는 nxn 정방 행렬, B_0 는 정칙 행렬, $\det C(a)$ 의 근은 단위 원 밖에 존재한다.

비용 함수(cost function)를 다음과 같이 선택하면

$$J = E \left(\|P(z^{-1})y(t+k) - R(z^{-1})w(t)\|^2 + \|Q(z^{-1})u(t)\|^2 \right) \quad (2)$$

여기서, $w(t)$ 는 기준 입력 벡터, P , Q 와 R 은 nxn 하중 행렬이고, $\|X\|^2 = X^T X$ 을 나타낸다.

자기동조 제어기는 과거의 입출력 값을 가지고 미래 출력을 예측함으로써 유도된다. 다음과 같은 등식을 정의하자.

$$C(z^{-1}) = A(z^{-1})F(z^{-1}) + z^{-k}G(z^{-1}) \quad (3)$$

$$\begin{aligned} F(z) &= F_0 + F_1 z^{-1} + \dots + F_{k-1} z^{-(k-1)} \\ G(z) &= G_0 + G_1 z^{-1} + \dots + G_{n_g} z^{-n_g}, n_g = n_a - 1 \end{aligned}$$

$A(\theta)$ 는 정칙이므로 다항식 행렬 $F(z^{-1})$ 와 $G(z^{-1})$ 은 유일한 값을 갖는다.

[6]에서

$$\tilde{F}(z^{-1})G(z^{-1}) = \tilde{G}(z^{-1})F(z^{-1}) \quad (4)$$

여기서, $\det \tilde{F}(z^{-1}) = \det F(z^{-1})$ 와 $\tilde{F}(\theta) = F_0$. 다항식 행렬 $\tilde{F}(z^{-1})$ 와 $G(z^{-1})$ 은 항상 값을 갖지만 유일한 값을 갖지 않는다.

다시 다음과 같은 등식을 정의하자.

$$\tilde{C}(z^{-1}) = F(z^{-1})A(z^{-1}) + z^{-k}G(z^{-1}) \quad (5)$$

(3)-(5)에서

$$\tilde{F}(z^{-1})C(z^{-1}) = \tilde{C}(z^{-1})F(z^{-1}) \quad (6)$$

여기서, $\det \tilde{C}(z^{-1}) = \det C(z^{-1})$
(1)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$A(z^{-1})y(t+k) = B(z^{-1})u(t) + C(z^{-1})v(t+k) \quad (7)$$

(6), (7)에서 k단계 앞의 출력은

$$y(t+k) = \tilde{C}^{-1}(z^{-1}) \{ \tilde{G}(z^{-1})y(t) + \tilde{F}(z^{-1})B(z^{-1})u(t) + F_0 v(t+k) + \dots + F_{k-1} v(t+1) \} \quad (8)$$

최적 k단계 앞의 예측은

$$\hat{y}^*(t+k/t) = \tilde{C}^{-1}(z^{-1}) \{ \tilde{G}(z^{-1})y(t) + \tilde{F}(z^{-1})B(z^{-1})u(t) \} \quad (9)$$

그러므로 예측 오차는

$$e(t+k) = y(t+k) - \hat{y}^*(t+k/t) = F_0 v(t+k) + \dots + F_{k-1} v(t+1) \quad (10)$$

(10)을 (2)에 대입하여 $\partial L / \partial u(t) = 0$ 는

$$P(z^{-1})y^*(t+k/t) - R(z^{-1})w(t) + Q(z^{-1})u(t) = 0 \quad (11)$$

여기서, $Q(z^{-1}) = (B_0^{-1})^T (Q(\theta))^T Q'(z^{-1})$

(9)을 (11)에 대입하면

$$Ly(t) - R(z^{-1})w(t) + Hu(t) = 0 \quad (12)$$

여기서, $L = P(z^{-1})\tilde{C}^{-1}(z^{-1})\tilde{G}(z^{-1})$
 $H = P(z^{-1})\tilde{C}^{-1}(z^{-1})\tilde{F}(z^{-1})B(z^{-1}) + Q(z^{-1})$

제어기의 블록 선도는 그림 1.과 같다.

2.2 극점 배치

극점 배치를 하기 위한 페루우프 계통 방정식을 유도하자.
(12)와 (1)에서

$$Ay(t) = z^{-k}B[-H^{-1}(Ly(t) - Rw(t)) + Cv(t)] \quad (13)$$

(5), (6)와 (13)에서 페루우프 계통 방정식은

$$(P + QB^{-1}A)y(t) = Rw(t-k) + (PF + QB^{-1}C)v(t) \quad (14)$$

원하는 페루우프 계통의 극점을 갖는 다항식 행렬 $T(z^{-1})$ 를 정의하자.

$$T(z^{-1}) = I + T_1 z^{-1} + \dots + T_{nc} z^{-nc} \quad (15)$$

여기서, T_i 는 대각 행렬

다음 등식을 정의하면

$$A(z^{-1})\tilde{B}(z^{-1}) = B(z^{-1})\tilde{A}(z^{-1}) \quad (16)$$

여기서, $\det \tilde{B}(a) = \det B(a)$ 그리고 $\tilde{B}(\theta) = B_0$,
 \tilde{A} 의 차수는 na , \tilde{B} 의 차수는 nb
다변수 계통을 비간섭하고 추종 오차를 제거 하기 위하여 하중 행렬 P , Q 와 R 를 다음과 같이 선택한다.

$$P(z^{-1})\tilde{B}(z^{-1}) + Q(z^{-1})\tilde{A}(z^{-1}) = T(z^{-1}) \quad (17)$$

$$R(z^{-1}) = T(z^{-1})\tilde{B}^{-1}(z^{-1}) \quad (18)$$

여기서, P , Q 와 T 의 차수는 각각 $np = na - 1$,
 $ng = nb - 1$, $nt < na + np - 1$

3. 매개변수 추정

일반적으로 사용되는 임의의 고정 잡음 모델을 추정 잡음 모델로 바꾸어 확장된 순환 최소 자승법(RELS) 알고리즘을 이용하여 매개변수 추정을 한다.

$y(t)$ 를 다음과 같이 정의 한다.

$$y_i(t) = x(t)\theta_i + v_i(t) \quad (19)$$

여기서, $x(t) = [-y^T(t-1), -y^T(t-2), \dots, u^T(t-k), u^T(t-k-1), \dots, v^T(t-1), v^T(t-2), \dots]$

$$\theta = [\theta_1, \dots, \theta_n] = [A_1, A_2, \dots, B_0,$$

$$B_1, \dots, C_1, C_2, \dots]^T$$

$$\theta_i = [A_{i1}^1, \dots, A_{in}^1, A_{i1}^2, \dots, A_{in}^2, \dots, B_{i1}^0, \dots, B_{in}^0, B_{i1}^1, \dots, B_{in}^1, \dots,$$

$$C_{i1}^1, \dots, C_{in}^1, C_{i1}^2, \dots, C_{in}^2, \dots]^T$$

$$i=1, \dots, n$$

RELS 알고리즘은 다음과 같다.

$$\hat{\theta}_i(t) = \hat{\theta}_i(t-1) + K(t)[y_i(t) - \hat{x}(t)\hat{\theta}_i(t-1)], \quad i=1, \dots, n$$

$$K(t) = P(t-1)\hat{x}^T(t) \{ \beta + \hat{x}(t)P(t-1)\hat{x}^T(t) \}^{-1}$$

$$P(t) = [P(t-1) - K(t)\hat{x}(t)P(t-1)] / \beta$$

여기서, β ($0.9 < \beta \leq 1$)는 망각 요소(forgetting factor)이다.

4. 자기동조 제어 알고리즘

1) 매개변수 추정 알고리즘을 이용하여 (1)의 다항식 행렬 A , B 와 C 의 매개변수 추정

- 2) (16), (17)와 (18)에서 하중 행렬 P, Q와 R을 결정
- 3) (3)-(6)에서 제어기 매개변수 \tilde{F} , \tilde{G} 와 \tilde{C} 를 결정
- 4) (12)에서 제어 $u(t)$ 를 계산
- 5) $t=t+1$ 그리고 1) - 5)를 반복 수행

5. 결 론

비최소 위상 다변수 계통에 극점배치 방법으로 자기동조 제어를 설계하였다.

제안된 제어기는 온라인에서 비용 함수의 하중 다항식 행렬을 update하고, 다변수 계통의 비간섭(decoupling) 자기 동조 제어를 실현하였다. 또한 적분기를 사용하지 않고 추종 오차를 제거시켰다.

참 고 문 헌

1. Astrom, K. J., and Wittenmark, B., "On Self-Tuning Regulators", Automatica, Vol.9, pp.185-199, 1973.
2. Clake, D.W., and Gawthrop, P. J., "Self-Tuning Controller", Proc. IEE, Vol.122, No.9, pp.929-934, 1975.
3. Clake, D. W., and Gawthrop, P. J., "Self-Tuning Control", Proc. IEE, Vol.126, No.6, pp.633-649, 1979
4. Astrom, K. J., and Wittenmark, B., "Self-Tuning Controllers based on Pole-zero Placement", Proc. IEE, Vol.127, No.3, pp.120-130, 1980.
5. Wellstead, M. S., et al, "Pole Assignment Self-Tuning Regulator", Proc. IEE, Vol.126, No.8, pp.781-787, 1979.
6. Borjson, U., "Self-Tuning Regulators for a Class of Multivariable Systems", Automatica, Vol.15, pp.209-215, 1979.
7. Koivo, H. N., "A Multivariable Self-Tuning Controller", Automatica, Vol.16, pp.351-366, 1980.
8. Lang, S. J., et al, "A Multivariable Generalized Self-Tuning Controller with Decoupling Design", IEEE Trans. Auto. Contr. Vol. AC-31, No.5, pp.474-477, 1986.
9. Harris, C. J., and Billings, S. A., ed., Self-Tuning and Adaptive Control: Theory and Applications, Peter Peregrinus, Ltd., 1981.

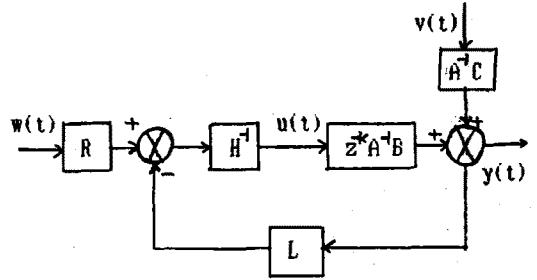


Fig. 1. Block diagram of controller

그림 1. 제어기의 블록 선도