하계학술대회
논문86-5-7

Walsh-Wiener 프로세스에 의한 Stochastic Dynamic System에 관한연구

A Study of Stochastic Dynamic System for Walsh-Wiener Process

*배 종 일 성균관 대학교 전기공학과
안 두 수 성균관 대학교 전기공학과
이 만 형 부 산 대학교 정밀공학과

1. 서 론

다이내믹 시스템 해석에 있어서 Walsh함수는 아주 유용한 도구로 사용되고 있다.[1-6]
유한 랜덤 Walsh급수의 형태는 샘플링된 함수와 같은 프로세스라 할 수 있으며 무한 랜덤 Walsh 급수는 백색잡음으로 수렴되며 그 적분은 Wiener 프로세스가 된다.
본 연구에서는 유한 Walsh급수로서 Walsh-Wiener 프로세스를 유도하여 컴퓨터로 시뮬레이션하였고, 이를 실제 추계 다이내믹 시스템에 인가 하였을 경우에 대한 시뮬레이션 결과를 보였다.

2. Walsh 급수와 Walsh-Wiener 프로세스

백색잡음은 수학적으로 표현 가능하나 실제 물리계에서는 존재하지 않는다.
백색잡음을 모델링하는데 있어서는 잡음 스펙트럼이 전 주파수대에 관하여 평활해야만 하나 해석적 관점에서 볼때 컴퓨터의 제한된 용량 때문에 이는 불가능하다. 따라서 샘플링점들의 유한한 수에서 잡음의 거동을 나타내기로 한다.
다음 식으로 주어지는 샘플링 함수를 가지고 잡음 프로세스를 구성하여 보자.

$$N_t=\sum_{k=0}^{2^n-1}C_k\phi_k(t), \quad t\in[0,1) \tag{2-1}$$

여기서 $\{\phi_k\}, k=0,1,2,\ldots,2^n-1$은 2수로 배열된 Walsh 함수이고 $\{C_k\}$, $k=0,1,2,\ldots, 2^n-1$은 상호 독립적으로 균등하게 분포된 랜덤변수로 평균이 0 분산이 σ^2이며, n은 유한한 양의 정수이다.
식(2-1)에 대한 적분 프로세스는 다음과 같다.

$$M_t=\int_0^t N\tau\, d\tau=\sum_{k=0}^{2^n-1}C_k\ J_k\ (t) \tag{2-2}$$

여기서 $J_k(t)$는

$$J_k(t)=\int_0^t\phi_i(\tau)\phi_j(\tau)d\tau=\int_0^t\phi_k(\tau)d\tau \tag{2-3}$$

$0\leq i<2^n$, $0\leq j<2^n$ 이며 $i\neq j$일때 $J_k(t)$는 상호 직교함수이다.
Walsh 급수에서 얻어진 $J_K(t)$는 Haar 함수와 같이 Hilbert 공간에서 완전하다.
Fine[1]에 의하여 Walsh함수의 적분 식(2-3)은 다음식으로 주어진다.

$$J_k(t)=2^m\ J_1(2^m\ t) \tag{2-4}$$

여기서 $k=2^m+\ell$, $\ell\leq 2^m-1$, $m>1$이다.
한편 식(2-1)과 식(2-2)에서 기대값을 택하면

$$E[N_t]=E[M_t]=0, \quad t\in[0,1) \tag{2-5}$$

이 된다.

만약 t_1, t_2가 구간 [$P/2^n$, $(P+1)/2^n$], $P=0,1,2,\ldots,2^n-1$ 사이에 있다면 이때 Autocorrelation함수 $R_n(t_1,t_2)$와 $R_m(t_1,t_2)$는 다음과 같이 주어진다.

$$R_N(t_1,t_2)=E[N_{t1},N_{t2}]=\sigma^2\sum_{k=0}^{2^n-1}\phi_k(t_1)\,\phi_k(t_2)$$
$$=\begin{cases}\sigma^2\,2^n, & t_2\ [P/2^n,(P+1)/2^n]\\ 0, & t_2\ [P/2^n,(P+1)/2^n]\end{cases} \tag{2-6}$$

$$R_M(t_1,t_2)=E[M_{t1},M_{t2}]$$
$$=\sigma^2\{t_1t_2+\Sigma J_{2m}(t_2)\,\Sigma\,\phi_\ell(t_1)\,\phi_\ell(t_2)\} \tag{2-7}$$

$t_j=j/2^n$, $j=0,1,2,\ldots,2^n-1$과 세분구간 [$P/2^n$, $(P+1)/2^n$], $P=0,1,2,\ldots,2^n-1$의 샘플점들에서 $t=t_j$라두면 M_j는 M_t가 된다.

또 $t_{j+1}-t_j=2^{-n}$ 이므로

$$M_j=2^{-n}\,\Sigma\,S_k$$
$$M_t=2^{-n}\,\Sigma\,S_k+S_j\,(t-t_j) \tag{2-8}$$

여기서 랜덤변수 S_k, $k=0,1,2,\ldots,2^n-1$은 직교한다.

따라서 프로세스 M_t는 $E[M_t]=0, t\in[0,1)$를 가진 연속 샘플함수이다.

계수$\{C_k\},\{S_k\}, k=0,1,2,\ldots,2^n-1$을 Gaussian 랜덤변수 라면 증분 $\triangle M_j=M_{j+1}-M_j$는 독립이고 상호분산 $E[\triangle M_j, \triangle M_k]$는

$$E[\triangle M_j,\triangle M_k]=\begin{cases}2^{-n}\,\sigma, & k=j\\ 0, & k\neq j\end{cases} \tag{2-9}$$

이다.

여기서 E는 수학적 기대값을 나타내고 있다.

Autocorrelation함수 $Rn(t_1,t_2)$와 $Rm(t_1,t_2)$의 식(2-6), (2-7)에서 2^n-1 보다 작은 q와 γ을 택하면 $t=q/2^n$, $S=r/2^n$두면 식(2-7)은 다음과 같게 된다.

$$R_M(t,s)=E[M_t,M_s]=\sigma^2\min(t,s) \tag{2-10}$$

S와 t을 샘플포인트하여 t<s인 s와t을 샘플포인트로 택하면 식(2-10)은 항상 만족된다.

t < s인 s와 t을 구간 [0,1)내에서 샘플링점을 선택하면

$$E[M_t,M_s]=\begin{cases}\sigma^2\min(t,s), & i\neq j\\ \sigma^2\min(t,s)-e(t,s), & i=j\end{cases} \tag{2-11}$$

식(2-11)내에 포함되어 있는 $i,j=0,1,2,\ldots,2^n-1$ 이고

$$e(t,s)=2^n\sigma^2(\min(t,s)-t_j)(t_{j+1}-\max(t,s)) \tag{2-12}$$

$t_j=j/2^n$이고 오차함수 $e(t,s)$는 양이고 $0\leqq e(t,s)\leqq\sigma^2/2^{n+2}$이다.

식(2-11)의 결과에 의하여 랜덤변수$\{M_k\}$의 시어켄스는 넓은 의미의 마팅겔(Martingale)이다.

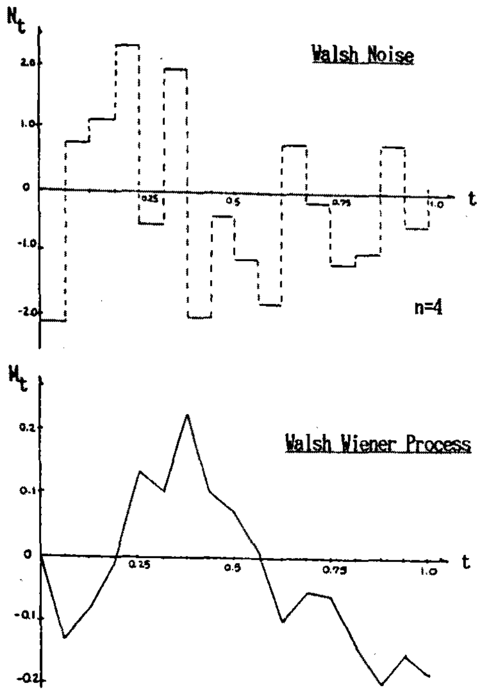
만약 계수$\{C_k\}, k=0,1,2,\ldots,2^n-1$가 가우시안 랜덤변수이면 그때 프로세스 $\{M_k\}$는 마팅겔이 된다.[7]

따라서 $\{M_k\}$는 Walsh-Wiener 프로세스가 된다.

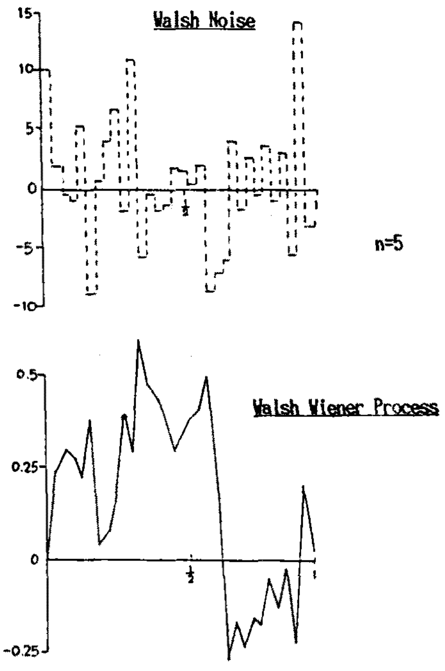
3. 시뮬레이션 결과.

3-1 Walsh 잡음과 Walsh-Wiener 프로세스의 시뮬레이션

Walsh함수를 사용하여 Walsh잡음과 Walsh-Wiener 프로세스의 컴퓨터 시뮬레이션 결과는 n=4, n=5인 경우에 대하여 그림1과 그림2에서 보여주고 있다.



그 림 1.



그 림 2.

3-2 추계 다이내믹 시스템에 인가된 Walsh-Wiener 프로세스.

다음과 같은 단순한 추계 다이내믹 시스템의 방정식은

$$\dot{x}(t)=-2x(t)+U(t)+G(t)W(t),\quad x(0)=4 \qquad (3\text{-}1)$$

이고 식 (3-2)를 통하여 관측된다고 하자.

$$y(t)=x(t)+H(t)V(t),\quad y(0)=0 \qquad (3\text{-}2)$$

여기서 W(t)와 V(t)는 Walsh-Wiener 프로세스이다.

이때 Wonham[8,9,10]의 분리정리를 이용하여 최적 제어를 행하는 경우를 생각 해 보기로 한다.

만약 주어진 다이내믹 시스템에 대한 수행성능지수는 다음과 같다.

$$J(u)=\min_{u\in U}\int_0^T [x(t)^T Qx(t)+U(t)^T RU(t)]dt \qquad (3\text{-}3)$$

이때 $\{y(s),\ s\leqq t\}$에 의하여 주어지는 선형최소자승 추정량 $\hat{x}(t)$는

$$\dot{\hat{x}}(t)=(-2-p(t))\,\hat{x}(t)+U(t)+P(t)y(t) \qquad (3\text{-}4)$$

의 해로 주어지며 최적제어칙은

$$U^*(t)=-R^{-1}(t)L(t)\hat{x}(t) \qquad (3\text{-}5)$$

로서 구해진다.

식(3-4)와 식(3-5)의 P(t),L(t)는 다음의 Riccati 방정식의 해로서 구할 수가 있다.

$$\dot{P}(t)=-4P(t)+G^2(t)-[P(t)+G(t)H(t)][H^2(t)]^{-1}[P(t)+G(t)H(t)] \qquad (3\text{-}6)$$

$$-\dot{L}(t)=-4L(t)+Q(t)-L^2(t)R^{-1}(t) \qquad (3\text{-}7)$$

식(3-6)의 마지막 항중 G(t)H(t)는 Walsh-Wiener 프로세스가 서로 종속일때 나타나며, G(t)H(t)의 값은 각각 $1/\sigma$이다.

그림3에서는 Wonham의 분리원리에 의하여 최적 제어칙 $U^*(t)$를 구하는 예를 도식하여 주고있다.

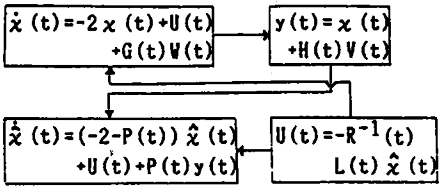
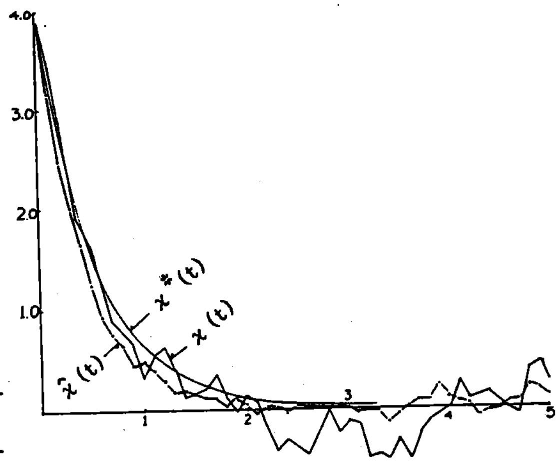
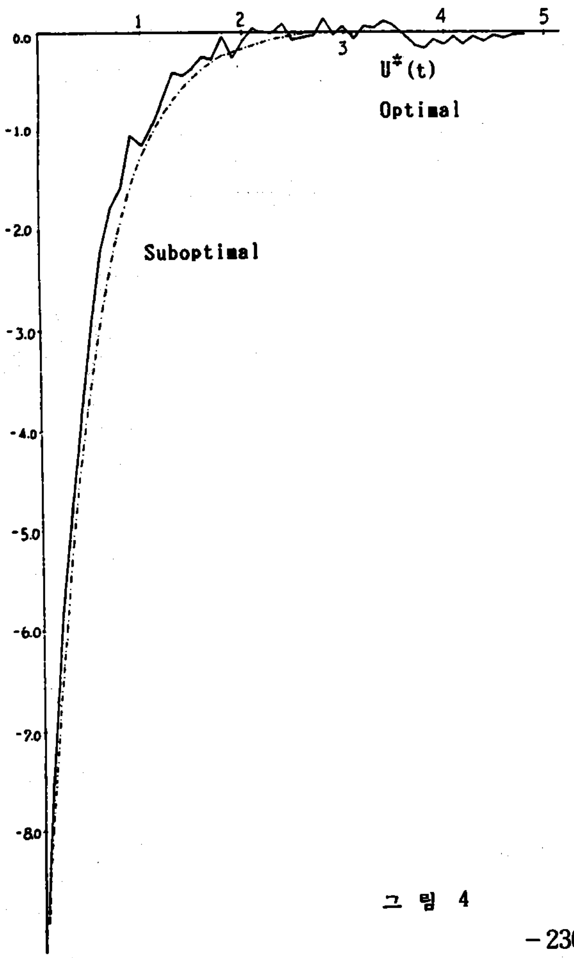


그림3. Wonham의 분리원리에 의한 최적제어칙을 구하기 위한 블록 다이어그램.

그림4는 $R(t)=Q(t)=1$ 일때 최적제어칙 $U^*(t)$의 궤적을 보여주고 있으며 그림5는 최적제어칙 $U^*(t)$을 공급 하였을 경우 최적상태궤적 $x^*(t)$, $\hat{x}(t)$, $x(t)$을 각각 보여주고 있다.



그 림 5



그 림 4

4. 결론

시스템 해석에 유용한 Walsh 함수를 이용하여 Walsh잡음과 Walsh-Wiener프로세스를 유도 하였고 Walsh-Wiener 프로세스 (M_k)의 시이켄스는 n의 값이 증가함에 따라 Wiener 프로세스에 접근하고 있음을 알 수 있다.

그림1과 그림2의 Walsh-Wiener 프로세스는 통계학적 χ^2와 t검정을 만족시켰다.

(3-1)절에 구한 Walsh-Wiener프로세스가 통계학적 성질을 만족하고 있으므로 실제 다이내믹시스템에 인가되어 구동될때 Wonham의 분리원리를 사용하여 최적제어칙을 구할 수 있음을 보였다.

REFERENCES

[1] N.J.Fine,"On the Walsh functions, "Trans.amer.Math.Soc., vol 65, PP. 372-414, 1949.

[2] --, "Fourier-Stieltjes series of Walsh function, "Trans. amer. Math. Soc., vol. 86, PP. 246-255, 1957.

[3] R.B Crittenden and V.L. Shapiro, "Sets of uniqueness on the group 2^{ω}," Ann. Math., vol. 81, no. 3, PP.550-564,1965.

[4] C. F. Chen and C. H. Hsiao, " Time domain analysis via Walsh functions, " Proc.IEE, vol. 122, PP. 565-570, 1975.

[5] --, "Design of Piecewise constant gains for Optimal control via Walsh functions,"IEEE Trans.Automat. Contr., vol. AC-20, PP. 596-603, 1975.

[6] M.S. Corrington, "Solution of differential and integral equations with Walsh functions, "IEEE Trans. Circuit Theory, vol. CT-20, PP. 470-475, 1973.

[7] J. L. Doob, Stochastic Processes. New York: Wiley, 1953.

[8] Wonham, W.M., " On the seperation theorem of stochastic control," SIAM J. Control 6, PP. 312-326.

[9] Wonham, W.M.," Optimal stochastic control," Automatic, PP. 113-118, 1969.

[10] Wonham, W.M.,"On a matrix Riccati equation of Stochastic control," SIAM J. Control vol.6 No.4, PP. 681-697,1968.