하계학술대회
논문86-5-9

일반화 된 Riccati 방정식의 해를 구하기 위한 알고리즘

Algorithm of the Generalized Eigenvalue Problem for Solving Ricatti Equation

이 채 희 서강대학교

1. 서 론

선형시 불변 시스템의 최적제어 문제를 해석하기 위해서는 Riccati 방정식의 해를 구해야 한다. 이러한 Riccati 방정식의 해를 구하는 알고리즘은 많이 있지만 그중에서 효율적이고 안정한 (stable) Schur 벡터를 이용한 알고리즘이 많이 사용된다.[1),2)] 특히 일반화된 상태방정식 (generalized state space equation) 으로 표시된 시스템에서는 일반화된 Riccati 방정식을 구해야한다.[8)]

이러한 경우는 일반화 된 고유치 (generlized) 를 원하는 순서대로 reordering 할 필요가 있다. matrix pencil $\lambda B-A$ ($A,B\in R^{2n\times 2n}$)가 주어졌을때 적당한 orthogonal 한 행열 Q,Z 를 구해서($Q,Z\in R^{2n\times 2n}$)QBZ는 상삼각행열 (upper triangular matrix). .QAZ 는 준상삼각행열 (Quasiupper triangular matri|x) 가 되고 왼쪽 윗 사분면의 일반화된 고유치가 stable 하다고하자. 이때 Z를 4개의 nxn 행열로 분해하면 다음과 같게된다.

$$Z = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \quad \text{여기서} \quad Z_{ij}\in R^{n\times n} \quad i,j=1,2$$

$\begin{bmatrix} Z_{11} \\ Z_{21} \end{bmatrix}$ 벡터 을 Schur Vector 라 하고 Riccati 방정식의 해 $P = Z_{21}\cdot Z_{11}^{-1}$로 된다.[2)]

만약 B가 nonsingular 인 경우 위의 경우 보통의 고유치 문제로 귀착되지만 B가 near singular 인 경우 $B^{-1}A$를 구하는 과정에서 문제가된다. 이러한 reordering 을 하는 알고리즘은 이미 발표가 되었지만[5)] 그중에서 문제가 되는 부분에 관해 언급하기로 한다.

2. Reordering

matrix Pencil $A-\lambda B$ 에 Moler-statement ward combination shift QZ 알고리즘을 사용하면 다음과 같은 결과를 얻는다.[4),6)]

$$Q_1(A-\lambda B)Z_1 = \widetilde{A}-\lambda\widetilde{B} = \begin{bmatrix} \widetilde{A}_{11} & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & \widetilde{A}_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{B}_{11} & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & \widetilde{B}_{nn} \end{bmatrix}$$

여기서 대각선 Pencil $\widetilde{A}_{ii}-\lambda\widetilde{B}_{ii}$($i=1,2,\ldots,n$)의 크기 d_i 는 1 또는 2가 되고 $\widetilde{B}_{ii}$는 상삼각행열, $\widetilde{A}_{ii}$는 준상삼각행열이 된다. 만약 $d_i=1$ 이면 일반화 된 고유치 (A_{ii} , B_{ii}) 는 실수이고 $d=2$ 이면 complex conjugate 인 고유치를 갖게된다.

이경우 일반적으로 왼쪽 윗사분면의 고유치가

모두 stable하지는 않으므로 stable한 고유치를 갖도록 하기 위해서는 결국 reordering 문제는 1 X 1 혹은 2 X 2의 연속적인 블럭을 바꾸어 주는 문제로 귀착 된다.

앞으로는 notation을 간단히 하기 위해 QZ 알고리즘을 사용해서 A- B가 이미 각각 준 상삼각 행열과 상삼각행열이 되었다고 가정하겠다.

이제 orthogonal한 행열 Q,Z를 구해서

$$Q\cdot\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}\cdot Z = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} \\ 0 & \hat{A}_{22} \end{bmatrix}$$

$$Q\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ 0 & B_{22} \end{bmatrix} Z = \begin{bmatrix} \hat{B}_{11} & \hat{B}_{12} \\ 0 & \hat{B}_{22} \end{bmatrix}$$

가 되었다고 하자. 여기서 $\Lambda(A_{11}, B_{11}) = \Lambda(\hat{A}_{22}, \hat{B}_{22})$ $\Lambda(A_{22}, B_{22}) = \Lambda(\hat{A}_{11}, \hat{B}_{11})$이고 d_1과 d_2는 1또는 2이다. 위의 조건을 만족시키는 Q,Z를 구한다면

$$Q_2 = \begin{bmatrix} I_{i-1} & 0 & 0 \\ 0 & Q & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-j} \end{bmatrix} \text{와 } Z = \begin{bmatrix} I_{i-1} & 0 & 0 \\ 0 & Z & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-j} \end{bmatrix} \text{은}$$

2n X 2n의 orthogonal한 행열이며 i번째와 i+1번째의 일반화된 고유치를 바꾸어 주게된다. 따라서reodering은 다음의 네경우를 고려해야한다.

case1. $d_1 = d_2 = 1$

case2. $d_1 = 1$, $d_2 = 2$

case3. $d_1 = 2$, $d_2 = 1$

case4. $d_1 = d_2 = 2$

위의 3경우는 이미 참고 문헌 5)에서 언급을 했으므로 생략하고 case4에 대해서 언급하고자 한다.

이 경우 다음과 같이 된다.

$$QAZ = Q\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} Z = \begin{bmatrix} \hat{a}_{11} & \hat{a}_{12} & \hat{a}_{13} & \hat{a}_{14} \\ \hat{a}_{21} & \hat{a}_{22} & \hat{a}_{23} & \hat{a}_{24} \\ 0 & 0 & \hat{a}_{33} & \hat{a}_{34} \\ 0 & 0 & \hat{a}_{43} & \hat{a}_{44} \end{bmatrix} = \hat{A}$$

$$QBZ = Q\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ 0 & 0 & b_{33} & b_{34} \\ 0 & 0 & 0 & b_{44} \end{bmatrix} Z = \begin{bmatrix} \hat{b}_{11} & \hat{b}_{12} & \hat{b}_{13} & \hat{b}_{14} \\ 0 & \hat{b}_{22} & \hat{b}_{23} & \hat{b}_{24} \\ 0 & 0 & \hat{b}_{33} & \hat{b}_{34} \\ 0 & 0 & 0 & \hat{b}_{44} \end{bmatrix} = B$$

여기서

$\Lambda(A_{22}, B_{22}) = \Lambda(\hat{A}_{11}, \hat{B}_{11})$이 되어야 한다.

먼저 double shift 방법에 따라 Q_1, Q_2를 선택하고 Z_1, Z_2는 $Q_2Q_1BZ_1Z_2$가 상삼각행열이 되도록하면 QAZ와 QBZ ($Q=Q_2Q_1, Z=Z_1Z_2$)는 다음과 같은 형태가 된다.

$$QAZ = \begin{bmatrix} X & X & X & X \\ X & X & X & X \\ X_4 & X & X & X \\ X_3 & X_5 & X & X \end{bmatrix} \quad QBZ = \begin{bmatrix} X & X & X & X \\ 0 & X & X & X \\ 0 & 0 & X & X \\ 0 & 0 & 0 & X \end{bmatrix}$$

다음에 Q_3, Q_4, Q_5를 X_3, X_4, X_5가 0이 되도록 선택하고 Z_3, Z_4, Z_5를 QBZ ($Q=Q_5 \cdots Q_1, Z=Z_1 \cdots Z_5$)가 상삼각행열이 되도록 선택한다.

이 과정을 $\hat{a}_{32}=0$ 이 될때까지 반복한다.

이 방법은 $\hat{a}_{32} \neq 0$ 인 경우만 적용되는데 처음에는 $a_{32}=0$ 이므로 $a_{32} \neq 0$ 이 되도록 random shift[7]를 한 후에 QZ algorithm을 적용하면 된다.

위와 같이 double shift 방법에 따라 수행하면 $\Lambda(A_{11}, B_{11})$과 $\Lambda(A_{22}, B_{22})$ 들의 절대치 값이 다른 경우는 좋은 결과를 얻는다. discrete time system에서는 절대치가 같은 경우 즉 $\lambda_1, \lambda_2 = 6 \pm jw$ $\lambda_3, \lambda_4 = -6 \pm jw$ 인 경우 recording을 할 필요가 없으므로 문제가 없으나 continuous time system

에서는 반드시 reordering을 해야 한다. 절대치가 같은 경우에 일반적인 QZ algorithm을 적용하면 경우에 따라 reordering이 되지 않게된다. 따라서 확실하게 reordering을 수행하기 위해서는 double shift algorithm을 약간 수정할 필요가 있게된다. 즉 A의 가상의 0 번째 column에 a_{10}, a_{20}, a_{30} 를 설정할 때[4] a_{10}, a_{20}, a_{30}는 $(\sigma_1 I - AB^{-1})(\sigma_2 I - AB^{-1})$의 첫번째 column의 처음 세 element인데 일반적으로 σ_1과 σ_2 는 본래 (A_{22}, B_{22})의 일반화된 고유치를 사용하게 된다. 만약 (A_{11}, B_{11})과 (A_{22}, B_{22})의 고유치의 절대치가 같을 경우에는 σ_1과 σ_2를 (A_{11}, B_{11})의 일반화된 고유치를 사용하면 항상 reordering이 되게된다.

3. 결 론

본 고에서는 일반화된 고유치를 원하는 순서대로 reordering하는 경우 절대치가 같은 경우에도 적용할 수 있는 algorithm을 제시하였다.

이 algorithm은 orthogonal matrix만으로 transform을 하기 때문에 매우 안정되고 효율적이다.

4. 참 고 문 헌

1. A.J. Laub ; "A Schur Method for Solving Algebraic Riccati Equations", IEEE Trans., Automat. Contr., vol.AC-23, pp 913-921, 1978
2. T. Pappas,et al.; "On the Numerical Solution of the Discrete Time Algebraic Riccati Equation", IEEE Trans., Automat. Contr., vol. AC 25, pp 631-641, 1980
3. P.Van Dooren; "A Generalized Eigenvalue Approach for Solving Riccati Equation", SIAM J., Sci. Stat.Comt.,vol.2 pp 121-135, 1981
4. C.B.Moler & G.W.Stewart; "An Algorithm for Generalized Matrix Eigenvalue Problems", SIAM J., Num. Analy., vol.10, pp 241-256, 1973
5. 이정훈,이채희; "Riccati 방정식의 해를 구하기 위한 일반화된 고유치문제 해석" 대한전기학회 ,계측제어 연구회 추계 학술회의 논문집, pp 32-35 , 1984
6. R.C.Ward; "The Combination, Shift QZ Algorithm",SIAM J.,Num.Analy., vol.12, pp 835-853, 1975
7. G.W.Stewart; "Introduction to Matrix Computation", Academic Press,New York, 1973
8. 이채희; " 일반화된 상태모델로 주어진 시스템의 최적제어 문제해석", 전기학회 논문지, 제 33권 12호, 1984