하계학술대회
논문86-5-10

직교함수에 의한 분포정수계의 파라메타동정에 관한 고찰

Considerations of Parameter Identification of DPS by Orthogonal Functions

안 두 수 성균관대 전기과 교 수
배 종 일 성균관대 전기과 대학원
박 영 욱* 성균관대 전기과 대학원

1. 서 론

상태공간에 존재하는 물체의 물리적 현상은 공간위치와 시간함수로 표현되므로 편미분방정식으로 모델화되어 열 공정, 송전선로와 선 진동등과 같은 분포정수계로 표현된다.[5]

최근에 Block-Pulse, Walsh, Haar함수등의 직교함수가 시스템 이론에 널리 응용되고있다.[1,3]
이러한 직교함수와 적분에 대한 Operational Matrix를 이용하면 계의 파라메타동정이나 상태 추정등의 문제가 간단한 대수방정식만으로 해결되는 잇점이 있다.[1]
그러나, 고차계의 경우 적분 Operational Matrix의 반복적인 곱으로 인한 누적오차가 발생되는 단점 이있다.[2]

본 연구에서는 대표적인 직교함수인 Block-Pulse함수, Walsh함수, Haar함수에 의한 분포정수계의 파라메타동정에 관하여 비교 고찰하며 또한 OSOMRI(One-Shot Operational Matrix for Repeated Integration)를 적용함으로써 반복적분에 대한 누적 오차를 감소시켜 진값에 더욱 근접 됨을 보이고자한다.

2. 본 론

1) 직교함수의 일반적 특성

직교함수의 대표적인 함수로 Block-Pulse함수, Walsh 함수, Haar함수를 들 수 있다.
Block-Pulse함수는 세부구간 i번째에서만 단위크기를 갖는다.[3]

$$\Phi_{Bi}(t) = \begin{cases} 1 & (i-1)/m \le t < i/m \\ 0 & \text{나머지 구간} \end{cases} \qquad (1)$$

$$i = 1, 2, \ldots\ldots, m$$

Walsh함수는 주기가 1, 1/2, 1/4, 1/8, ..., $2^{(1-k)}$를 갖는 단위함수인 Rademacher함수로 부터 유도된다.[10]

$$\Phi_{Wn}(t) = \prod_{i=1}^{m} b_i R_i(t) \qquad (2)$$

$$n = b_m 2^m + b_{m-1} 2^{m-1} + \ldots\ldots + b_0 2^0 \ (b_i = 0, 1)$$ [7]

Haar함수는 식(3)으로 표시된다.

$$\Phi_{H2^pn}(t) = \begin{cases} \sqrt{2^p} & n/2^p < t < (n+1/2)/2^p \\ -\sqrt{2^p} & (n+1/2)/2^p < t < (n+1)/2^p \\ 0 & \text{나머지 구간} \end{cases}$$

$$p = 1, 2, \ldots \qquad n = 0, 1, \ldots\ldots, 2^p - 1 \qquad (3)$$

2) Operational Matrix

직교함수의 중요한 이점은 적분을 대수연산으로

변경할수 있는데 있다. 즉 $\Phi(t)$의 적분은 식(4)로 변경된다.

$$\int_0^t \Phi(t)\, dt = P\,\Phi(t) \qquad (4)$$

이때 P를 Operational Matrix라 한다.[8]

Block-Pulse함수에서는 식(5)로 표시된다.[3]

$$P_{Bm} = (1/m)[(1/2)I + \sum_{r=1}^{m-1} \nabla^r] \qquad (5)$$

I는 unit matrix이며 ∇는 delay matrix이다.

$$\nabla = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & & & & & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (6)$$

Walsh함수는 식(7)로, Haar함수는 식(8)으로 표시된다.[7,8]

$$P_{Wm} = \left[\begin{array}{c|c} P(m/2) & -1/2m\, I(m/2) \\ \hline 1/2m\, I(m/2) & 0(m/2) \end{array}\right] \qquad (7)$$

$$P_{Hm} = \left[\begin{array}{c|c} P(m/2) & -1/\sqrt{2}(\sqrt{2}/4)^{\log_2 m} H(m/2) \\ \hline 1/\sqrt{2}(\sqrt{2}/4)^{\log_2 m} H(m/2) & 0(m/2) \end{array}\right] \qquad (8)$$

$$P_1 = 1/2$$

세가지 직교함수는 함수의 특성뿐만 아니라, Operational Matrix사이에도 밀접한 관계를 갖는다. 즉,

$$P = (1/m)\, F\, P_B F^T \qquad (9)$$

나타내지며 Walsh함수의 경우 $W = W^T$ 이므로

$$P = (1/m)\, W\, P_B\, W \qquad (10)$$

표시된다.

n승의 적분이 되는 경우에 식(4)는 식(11)로 나타내진다.

$$\underbrace{\int_0^t\int_0^t \cdots \int_0^t}_{n회} \Phi(t)\, \underbrace{dt \cdots dt}_{n회} = P^n \Phi(t) \qquad (11)$$

즉, 식(9)의 관계식은 식(12)으로 표현된다.

$$P^n = (1/m)\, F P_B^n F^T \qquad (12)$$

3) OSOMRI

n승이된 Operational Matrix P^n가 적용된 식(11)을 계산시, 적분오차가 더욱 누적된 현상이 나타나고 이것은 System의 Analysis나 Synthesis에서 커다란 오차를 발생시킨다. 이 오차를 감쇄시키기 위해 식(12)의 P_B의 n승을 S_{Bn}(OSOMRI)의 단일항으로 유도할 수 있다.[2]

즉, 식(12)는 식(13)으로 나타낸다.

$$S_n = (1/m)\, F S_{Bn} F^T \qquad (13)$$

식(13)의 S 은 식(14)로 표현할수 있다.

$$S_{Bj} = \frac{1}{m^j}\left[\frac{1}{(j+1)!} I + \sum_{r=1}^{m-1}\left\{\sum_{g=0}^{j-1} \frac{r^{g+1} - (r-1)^{g+1}}{(g+1)!(j-g)!}\right\}\nabla^r\right] \qquad (14)$$

4) 분포정수계에 OSOMRI의 적용

2계 편미분방정식으로 모델화된 분포정수계를 식(15)로 표시하자.

$$a_2(\partial^2 y(x,t)/\partial t^2) + a_1 \partial^2 y(x,t)/\partial x^2 = u(x,t) \qquad (15)$$

식(15)를 t와 x에 대하여 각각 2회씩 적분하여 적분방정식 식(16)으로 표시할수있다.

$$\begin{aligned} & a_2\int_0^x\int_0^x y(x,t)dxdx + a_1\int_0^t\int_0^t y(x,t)dtdt \\ & - \int_0^x\int_0^x\int_0^t \sigma(x)dtdxdx + \int_0^x\int_0^t\int_0^t v(t)dtdtdx \\ & - a_2\int_0^x\int_0^x y(x,0)dxdx - a_1\int_0^t\int_0^t y(0,t)dtdt \\ & = \int_0^x\int_0^x\int_0^t\int_0^t u(x,t)dtdtdxdx \end{aligned} \qquad (17)$$

여기서 $\sigma(x)$와, $v(t)$는 식(18)~식(19)이다.

$$\sigma(x) = -a_2[\partial y(x,t)/\partial t]_{t=0} \qquad (18)$$

$$v(t) = -a_1[\partial y(x,t)/\partial x]_{x=0} \qquad (19)$$

초기및 경계조건은 식(20)~식(23)로 표현된다.

$$\begin{aligned} y(0,t) &= \sum_{i=0}^{r-1} c_i \phi_i(t) = C_r^T \Phi_r(t) \qquad (r \le N) \\ &= \sum_{i=0}^{r-1} c_i \Psi_M^T(x)\, E_{1,i+1} \Phi_N(t) \end{aligned} \qquad (20)$$

$$\begin{aligned} y(x,0) &= \sum_{i=0}^{q-1} b_i \psi_i(x) = b_q^T \Psi_q(x) \qquad (q \le M) \\ &= \sum_{i=0}^{q-1} b_i \Psi_M^T(x)\, E_{i+1,1} \Phi_N(t) \end{aligned} \qquad (21)$$

$$\begin{aligned} \sigma(x) &= \sum_{i=0}^{p-1} \sigma_i \psi_i(x) = \Psi_p^T(x)\, \sigma_p \qquad (p \le M) \\ &= \sum_{i=0}^{p-1} \sigma_i \Psi_M^T(x)\, E_{i+1,1} \Phi_N(t) \end{aligned} \qquad (22)$$

$$v(t) = \sum_{i=0}^{\tau-1} v_i \Phi_i(t) = V_\tau^T \Phi_\tau(t) \qquad (\tau \leq M)$$
$$= \sum_{i=0}^{\tau-1} v_i \Phi_M^T(x)\, E_{1,i+1}\, \Phi_N(t) \qquad (23)$$

$E_{1,i+1}$ matrix는 1행 i + 1열만 1이고 나머지는 0인 matrix이다. Block-Pulse함수의 경우는 식(20)~식(23)의 $E_{1,i+1}$과 $E_{i+1,1}$가 $E_{M,i+1}$로 대치되어야한다. 식(18)~식(23)을 식(17)에 대입한후 정리하면 식(24)로 된다.

$$a_2 S_2^T Y_{MN} + a_1 Y_{MN} S_2 + \sum_{i=0}^{p-1} \sigma_i S_2^T E_{i+1,1} S_2$$
$$+ \sum_{i=0}^{\tau-1} v_i S^T E_{1,i+1} S_2 + \sum_{i=0}^{q-1} \bar{b}_i S_2^T E_{i,i+1} + \sum_{i=0}^{r-1} \bar{c}_i E_{1,i+1} S_2$$
$$= S_2^T U_{MN} S_2 \qquad (24)$$

$$\bar{b}_i = -a_2 b_i, \quad \bar{c}_i = -a_1 c_i$$

구하는 Parameter는 2개(a2,a1)이고 초기조건과 경계조건은 $(p + \tau + q + r)$개 이다.

식(24)를 식(25)로 표시할때 각 행렬은 식(26)~(28)으로 표시된다.

$$A\,\theta = h \qquad (25)$$

$$A = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c} (S_2^T Y_{MN})_1 & (Y_{MN} S_2)_1 & (S_2^T E_{1,1} S)_1 & \vdots & (S_2^T E_{p,1} S)_1 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (S_2^T Y_{MN})_{MN} & (Y_{MN} S_2)_{MN} & (S_2^T E_{1,1} S)_{MN} & \vdots & (S_2^T E_{p,1} S)_{MN} & \vdots \end{array}\right] \qquad (26)$$

$$\theta = \left[a_2 \; a_1 \; \sigma_0 \cdots \sigma_{p-1} \, v_0 \cdots v_{\tau-1} \, \bar{b}_0 \cdots \bar{b}_{q-1} \, \bar{c}_0 \cdots \bar{c}_{r-1}\right] \qquad (27)$$

$$h = \begin{bmatrix} (S_2^T U_{MN} S_2)_1 \\ \vdots \\ (S_2^T U_{MN} S_2)_{MN} \end{bmatrix} \qquad (28)$$

따라서 $\theta = (A^T A)^{-1} A^T h$ 로 얻어진다.

3. 적 용 예

다음과 같은 분포정수계를 예로 들자.

$$a_2(\partial^2 y(x,t)/\partial t^2) + a_1(\partial^2 y(x,t)/\partial x^2) = u(x,t)$$

$$u(x,t) = xt + x$$

표1은 연속 적분에대 대하여 일반 Operational matrix를 이용한 결과이고, 표2는 새롭게 정의된 OSOMRI를 적용한 결과를 보여준다.

전개항	함 수	a_2	a_1
실 제		-1.	1.
4	Block-Pulse	-.264438542	.392442307
	Walsh	-.264438515	.392442278
	Haar	-.264438881	.392442597
8	Block-Pulse	-.786695375	.82320431
	Walsh	-.786695179	.823230235
	Haar	-.786695873	.82320705
16	Block-Pulse	-.954800084	.962715999
	Walsh	-.954800643	.962716461
	Haar	-.954803756	.962719074

표1. Operational matrix에 의한 파라메타 동정

전개항	함수	a_2	a_1
실 제		-1.	1.
4	Block-Pulse	-.626309058	.692694899
	Walsh	-.626308658	.692694448
	Haar	-.626308651	.692694537
8	Block-Pulse	-.922643712	.936929782
	Walsh	-.922643064	.936929323
	Haar	-.922646575	.936932303
16	Block-Pulse	-.982466502	.985770361
	Walsh	-.982455885	.98576401
	Haar	-.982470346	.985776434

표2. OSOMRI에 의한 파라메타 동정

4. 결 론

본 연구에서는 분포정수계의 파라메타 동정을 위하여 직교함수를 응용 하였으며 대표적인 Block-Pulse, Walsh, Haar 함수에 대한 각각의 결과에 대하여 비교 고찰하였다.

,교함수의 도입으로 분포정수계의 파라메타동정의 문제가 간단한 대수방정식으로 변환되는 편리한 점이 있으나, 직교함수의 적용 term 수 및 계의 차수에 비례하여 매트릭스의 차수가 커지는 난점도 지적되었다.

또한 고차계에서는 적분 operational matrix의 반복적인 곱을 이용하여야 했으며, 이로인한 원합수와의 누적오차를 줄이기 위해 OSOMRI(One-Shot Operational Matrix for Repeated Integraion)를 도입한 결과 적용예에서 본바와 같이 더욱 참값에 근접해 감을 알 수 있었다.

Reference

1) P.N. Paraskevopulos :" Distributed parameter system identification via Walsh fuctions", Int. J. Syst. Sci., Vol. 9, No. 1, pp75~83,1978

2) G. Parasada Rao :" Improved algorithms for parameter identificataion in continous systems via Walsh functions", IEE Proc., Vol.130, Pt. D, No. 1, pp9~16, Jan., 1983

3) K.R. Palanisamy :" System Identification via block-pulse functions", Int. J. Syst. Sci., Vol. 12, No. 5, pp643~647, 1981

4) Yen-Ping Shih :" Double Walsh series solution of first order partial differential equations ", Int. J. Syst. Sci., Vol. 9, No. 5, pp569~ 578, 1978

5) Michel P. Polis :"Parameter Identification in Distributed Systems : A Systhesizing Overview", Proc. IEEE, Vol. 64, No. 1, pp 45~61, Jan, 1976

6) 안두수외 2인 "월쉬 급수 전개에 의한 분포정수계의 해석에 관한 연구", 대한전기학회 논문집, 제35권, No. 3, pp95~101, 1986

7) J.E. Shore ; " On the application of Haar functions ", IEEE Tras. Communications, COM. 21, No. 3, pp. 209~216, 1973

8) C.F. Chen ;" Walsh operational matrices for fractional calculus and their application to distributed system", J. Franklin Inst., Vol. 303, pp267~, 1977

9) P.A. Orner :" A design procedure for a class of distributed parameter control systems", ASME.J. Basic Eng., ser.D, Vol. 93, pp86~93,1971

10) S.G. Tzafestas ;"Walsh series approach to lumped and distributed system identification", J. Franklin Inst., Vol. 35, pp 199~, 1978