

이 민 수*

한양대학교 전자통신과

김 흥 수

한양대학교 전자통신과

장 재 성

제주대학교 통신공학과

이 상 섭

한양대학교 전자통신과

Abstract

In this paper, it is argued about the method to calculate impulse responses of multimode optical fibers using finite element method. For this purpose, impulse responses are calculated with propagation constant which is obtained by using the finite element method for each mode. Also it is compared with the result obtained by using WKB method and its validity is verified on the practical optical fibers experimental base.

1. 서 론

광대역 통신매체인 광섬유의 전파특성을 해석하는 데는 임펄스 응답특성이 매우 중요하다. 이러한 임펄스 응답을 구하기 위한 여러가지 방법이 제시 되었으나 이 연구에서는 Rayleigh-Ritz방법을 근거로한 유한요소법을 집속형 다중모드 광섬유에 적용하여 계산법을 제시한다. 이 방법에 의하면 기존의 방법들보다 컴퓨터계산시간

을 줄일 수 있으며, 전형적인 멱함수족 굴절률분포가 아닌 이와 약간 변이된 굴절률 분포를 갖는 실제적인 광섬유에 대해서도 계산이 가능하다는 장점이 있다.

본 연구에서는 코어내 굴절률분포를 N등 분하여 각 점에서의 굴절률 값을 직접입력 데이터 값으로 하여 임펄스 응답을 구하고 이 결과와 WKB법에 의한 결과와도 비교하며 또 실험을 통하여 이 결과가 잘 일치함을 보인다.

2. 수치해석적 방법

코어내의 전자계에 대한식은 다음과 같다

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + [W^2 \epsilon(r) \mu_0 - \beta^2 - \frac{m^2}{r^2}] R = 0 \quad (1)$$

$$R(a) = R_{clad}(a) \quad (2)$$

$$\left[\frac{dR}{dr} \right]_{r=a} = \left[\frac{dR_{clad}}{dr} \right]_{r=a} \quad (3)$$

비균일 광섬유에서 전파되는 전자계의 변분법 공식은 경계조건식(2)(3)에 의하여 미분방정식(1)을 풀면 다음과 같은식을 얻을 수 있다. [3]

$$I[R] = \int_0^a \left[\left(\frac{dR}{dr} \right)^2 + \frac{m^2}{r^2} R^2 \right] r dr - \int_0^a [k^2 n(r) - \beta^2] R^2 r dr - \int_0^a \beta^2 R^2(a) \quad (4)$$

$$W = (\beta^2 - k^2 n_{clad}^2)^{1/2} a \quad (5)$$

$$\alpha_\beta = \frac{W k_m^2(W)}{k_m(W)} \quad (6)$$

여기서 $R(r)$: 횡전자기계

n_{clad} : 클래딩의 굴절률 분포 β : 전파상수

a : 코어의 반경 m : 방위각 모드수

k_m : m 차수의 2종 modified Bessel 함수

변분법 문제를 풀기 위해서는 일반적으로

Rayleigh-Ritz 방법을 사용하고 있으나 본

연구에서는 다음 두 가지 이유 때문에 유한

요소법을 사용한다. 첫째는 컴퓨터 프로그램

과 계산이 Rayleigh-Ritz 방법보다 더 간편하고,

둘째는 코어의 W 점에서 간섭현미경으로

측정한 굴절율을 직접 입력데이터로 사용할

수 있는 장점이 있다.

1-D 유한요소법에서 $r=0$ 에서 $r=a$ 까지의

영역을 N 개의 원소로 나누고 (그림 1), $r = r_i$

일때의 $R(r)$ 의 값을 다음과 같이 표현했다.

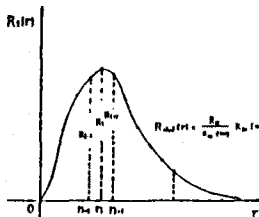
$$R_i = R(r_i) \quad (7)$$

과 원소에 대한 $R(r)$ 의 함수는 다음과 같다

$$R(r) = \sum_{i=0}^N R_i \psi_i(r) \quad (8)$$

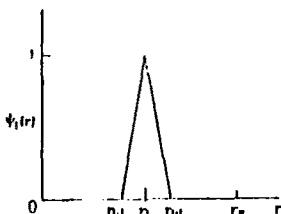
이때 $\psi_i(r)$ 은 다음조건을 만족하는 r 에 대한

선형함수이다. (그림 2)



[그림 1]

전자계 $R(r)$ 의 분포



[그림 2]

Sampling 함수 $\psi_i(r)$

$$\psi_i(r) = \begin{cases} 0 & 0 \leq r \leq r_{i-1} \\ (r - r_{i-1}) / (r_i - r_{i-1}) & r_{i-1} \leq r \leq r_i \\ (r_{i+1} - r) / (r_{i+1} - r_i) & r_i \leq r \leq r_{i+1} \\ 0 & r_{i+1} \leq r \leq r_N \end{cases} \quad (9)$$

functional I 가 모든 R_i 의 매개변수들에

대해 변화하지 않기 위해서는 모든 i 에 대해 다음 조건이 성립되어야 한다.

$$\frac{1 \partial I}{2 \partial R_0} = \int_0^{r_1} \left(\frac{dR}{dr} \frac{d\psi_0}{dr} + \frac{m^2}{r^2} R \psi_0 \right) r dr - \int_0^{r_1} [k^2 n^2(r) - \beta^2] R \psi_0 r dr = 0 \quad (10)$$

$$\frac{1 \partial I}{2 \partial R_i} = \int_{r_{i-1}}^{r_{i+1}} \left(\frac{dR}{dr} \frac{d\psi_i}{dr} + \frac{m^2}{r^2} R \psi_i \right) r dr - \int_{r_{i-1}}^{r_{i+1}} [k^2 n^2(r) - \beta^2] R \psi_i r dr = 0 \quad (11)$$

$(i=1, 2, \dots, N-1)$

$$\frac{1 \partial I}{2 \partial R_N} = \int_{r_{N-1}}^{r_N} \left(\frac{dR}{dr} \frac{d\psi_N}{dr} + \frac{m^2}{r^2} R \psi_N \right) r dr - \int_{r_{N-1}}^{r_N} [k^2 n^2(r) - \beta^2] R \psi_N r dr - \alpha_\beta R_N = 0 \quad (12)$$

임의의 함수 $\psi_i(r)$ 을 이용하여 굴절률 분포

$R(r)$ 을 다음과 같이 표시한다.

$$R(r) = \left[\sum_{i=0}^N R_i \psi_i(r) \right]^{1/2} \quad (13)$$

R_i ; $r = r_i$ 일때의 굴절율

식(8)과(13)을 식(10)-(12)에 대입하면 $(N+1)$

차수의 선형방정식을 얻는다.

$$\frac{1 \partial I}{2 \partial R_0} = S_{00} R_0 + S_{01} R_1 = 0 \quad (14)$$

$$\frac{1 \partial I}{2 \partial R_i} = S_{i,i-1} R_{i-1} + S_{i,i} R_i + S_{i,i+1} R_{i+1} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, N-1) \quad (15)$$

$$\frac{1 \partial I}{2 \partial R_N} = S_{N,N-1} R_{N-1} + S_{N,N} R_N = 0 \quad (16)$$

식(14)-(16)에서 S_{ij} 는 $(N+1) \times (N+1)$ 행렬의

원소들인데 다음과 같다.

$$S_{00} = \left(\frac{1}{2} - \frac{U^2}{12N^2} \right) + (5 - 3\beta_0 - 2\beta_1) \frac{V^2}{120N^2 \Delta} \quad (17)$$

$$S_{01} = -\left(\frac{1}{2} + \frac{U^2}{12N^2} \right) + (5 - 2\beta_0 - 3\beta_1) \frac{V^2}{120N^2 \Delta} \quad (18)$$

$$S_{i,i} = \left[4m^2 \beta_i r_i - 2(m^2 - 1) - \frac{2U^2}{3N^2} \right] + (4c_i - 3c_{i-1} - 3c_{i+1} - 7\beta_2) \frac{V^2}{120N^2 \Delta} \quad (19)$$

$$S_{i,i-1} = \left[(i-1)m^2 \beta_{i-1} \frac{1}{r_{i-1}} + (i+1)m^2 \beta_i \frac{1}{r_i} - 2i(m^2 - 1) - \frac{3iU^2}{3N^2} \right] + [4c_i - (5i-2)\beta_{i-1} - 3c_i \beta_i - (5i+2)\beta_{i+1}] \frac{V^2}{120N^2 \Delta}$$

$$(i = 2, 3, \dots, N-1) \quad (20)$$

$$S_{i,i+1} = S_{i+1,i} = [(i+\frac{1}{2})(m^2-1) - i(i+1)m^2 \frac{z_{i+1}}{z_i} - \frac{(i+1)u^2}{N^2/12N^2}] + [5(2i+1) - (5i+2)g_i - (5i+3)g_{i+1}] / 12cN^2\Delta$$

$$(i = 1, 2, \dots, N-1) \quad (21)$$

$$S_{N,N} = [(N+1)m^2 \frac{z_N}{z_{N-1}} - (N-\frac{1}{2})(m^2+1) + m(m+1) + \frac{Wk_{m+1}(W)}{k_m(W)} - \frac{(4N+1)u^2}{12N^2}] + [5(4N+1) - (5N-1)g_{N-1} - 3(5N+1)g_N] / 12cN^2\Delta \quad (22)$$

$$\text{여기서 } g_i = \frac{n_i^2}{n_{i,core}^2} \quad (i = 0, 1, 2, \dots, N) \quad (23)$$

$$n_{i,core} = \text{Max}[n(r)] \quad (24)$$

$$\Delta = \frac{(n_{i,core} - n_{i,rad})}{2n_{i,core}^2} \quad (25)$$

$$u^2 = (k^2 n_{i,core}^2 - \beta^2) a^2 \quad (26)$$

$$v^2 = k^2 n_{i,core}^2 a^2 \Delta = u^2 + w^2 \quad (27)$$

식(14)-(16)의 해가 존재하기 위해서는

다음조건을 만족해야 한다.

$$\det(S_{i,j}) = 0 \quad (28)$$

이 방정식은 비균일 광섬유의 전파상수를 결정한다.

축대칭 광섬유의 전파상수 β 는 아래와 같은 식으로 표현된다.

$$\beta^2 = \frac{\int_0^\infty k^2 n(r) \Phi^2(r) r dr - \int_0^\infty [(\frac{d\Phi}{dr})^2 + \frac{m^2}{r^2} \Phi^2] r dr}{\int_0^\infty \Phi^2(r) r dr} \quad (29)$$

$\Phi(r)$ 은 광섬유의 전계인데 다음과 같다.

$$\Phi(r) = \begin{cases} R(r) & (0 \leq r \leq a) \\ \frac{R(a)}{k_m(W)} k_m(Wr/a) & (a \leq r) \end{cases} \quad (30)$$

β^2 은 R 의 미소변화에 대하여 정류값을 나타내므로 (29) 식을 전파상수의 변분표현이라고 한다. 그러므로 $\frac{d\beta}{dk}$ 는 (29) 식을 k 에 대해 미분함으로써 얻어진다.

$$\frac{d\beta}{dk} = \frac{1}{2\beta} \frac{\int_0^\infty \frac{d(k^2 n^2)}{dk} \Phi^2(r) r dr}{\int_0^\infty \Phi^2(r) r dr} \quad (31)$$

식(8)(13)을 (29)식에 대입하여 계산하면

지연시간 τ 를 얻는다.

$$\tau = \frac{1}{c} \frac{d\beta}{dk} = \frac{k}{c} \frac{R^T U R}{\beta R^T T R} \quad (32)$$

$R = \{R_0, R_1, \dots, R_N\}^T$ 이고, T, U 는 $(W+1) \times (W+1)$

행렬인데 그 원소들은 다음과 같다.

$$\left. \begin{aligned} T_{00} &= 5 \\ T_{01} &= 5 \\ T_{ii} &= 40i \quad (i=1, 2, \dots, N-1) \\ T_{i,i+1} &= T_{i+1,i} = 5(2i+1) \quad (i=1, 2, \dots, N-1) \\ T_{NN} &= 5(4N-1) + 30N^2 [1/\epsilon_m(w) - 1] \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

$$\left. \begin{aligned} U_{00} &= 3n_c n_c + 2n_r n_r \\ U_{01} &= 2n_c n_c + 3n_r n_r \\ U_{ii} &= 3i^2 n_i n_i + (5i-2)n_{i-1} n_{i-1} + (5i+2)n_{i+1} n_{i+1} \\ &\quad (i=1, 2, \dots, N-1) \\ U_{i,i+1} &= U_{i+1,i} = (5i+2)n_i n_i + (5i+3)n_{i+1} n_{i+1} \\ &\quad (i=1, 2, \dots, N-1) \\ U_{NN} &= 30n_N n_N (5N-1) + (5N-2)n_{N-1} n_{N-1} \\ &\quad + 5c n_{i,rad} n_{i,rad} N^2 [1/\epsilon_m(w) - 1] \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

$$N_i = [d(k n_i)] / (dk) \quad (35)$$

$$\sum_m = \frac{k_m^2(w)}{k_{m-1}(w) k_{m+1}(w)} \quad (36)$$

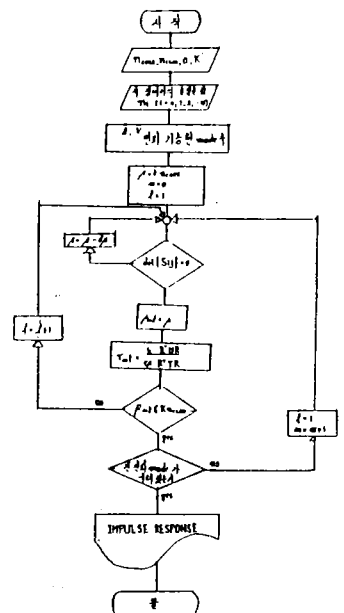
3. 해석 결과

(A) Flow Chart 해석

일반적으로 (28) 식을 해석적으로 푸는 것은 매우 곤란하므로 수치해석적 방법을 적용하여 계산한다. 이에 대한 플로차트는 다음과 같다.

[그림 3]

임펄스 응답 계산을 위한 플로차트

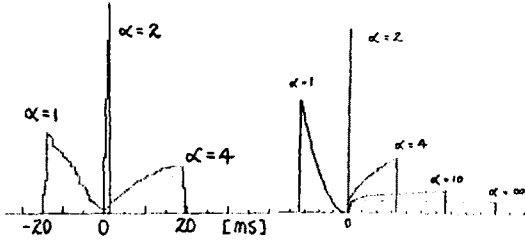


위에서 m 과 l 은 L_{pm} 모드수

m : 방위각모드수 l : 반경모드수

(B) 계산에 대한 고찰

수치해석적 방법과 컴퓨터 프로그램의 방법으로 계산한 α 승 굴절을 본포의 임펄스 응답을 그림(4)로 나타내었으며, 그리고 WKB 방법에 의해 분석적으로 얻은 α 승 굴절을 본포의 임펄스 응답을 그림(5)에 나타내었다.



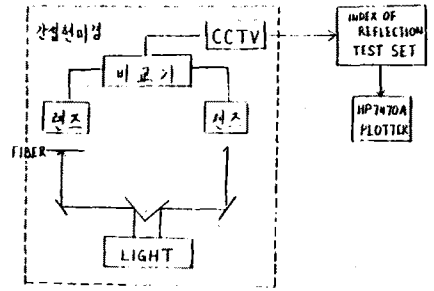
[그림4] α 굴절을 본포에 대한 임펄스 응답
[그림5] WKB 방법에 대한 임펄스 응답
이때 상대 굴절률차 $\Delta = 1\%$, 코어의 최대 굴절률 n_{Core} 는 1.54, 광섬유의 길이 $L = 1.4 \text{ km}$ 이다
각각의 α 승 굴절을 본포에 대한 펄스폭과 파형의 값은 WKB 방법에 의해 분석적으로 얻은 값과 좋은 일치됨 보이고 있다.

4. 실험

(A) 굴절을 본포의 측정

굴절을 본포를 측정하는 데는 여러가지 방법들이 있으나 본 실험에서는 비파괴적이고, 임의의 형상본포에 적용 가능한 간섭법을 사용하였다.

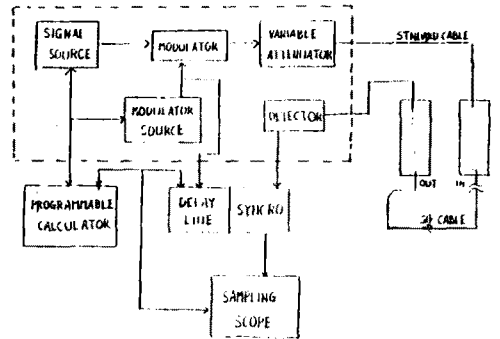
실험의 장치도는 그림(6)과 같다.



[그림6] 굴절률 측정 장치도

(B) 임펄스 응답 측정

다모드 광섬유에서 임펄스 응답을 측정하는 장치도는 다음과 같다.

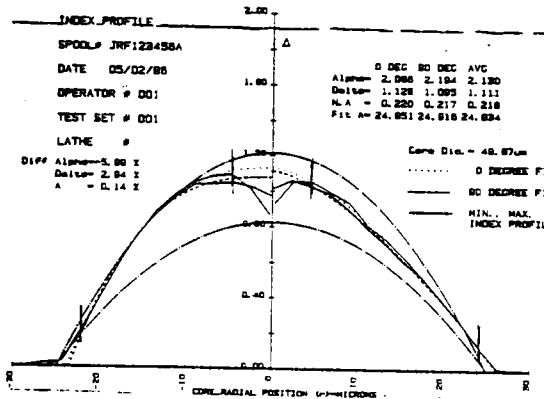


[그림7] 임펄스 응답 측정 장치도
여기서 광섬유의 길이는 1.4 km 이고 $\lambda = 13000 \text{ \AA}$ 이다.

5. 광섬유의 임펄스 응답 비교

여기서는 다모드 광섬유에 대한 임펄스 응답의 계산치와 실험치를 비교한다.
그림(8)에서 (a)는 간섭현미경을 사용하여 측정된 굴절을 본포이며 (b)는 유한요소법을 적용해서 계산한 임펄스 응답이고 (c)는 측정된 임펄스 응답이다.

실험에 사용된 레이저파장은 $\lambda = 13000 \text{ \AA}$ 이고 펄스폭 $\tau = 1 \text{ ns}$ 이다.



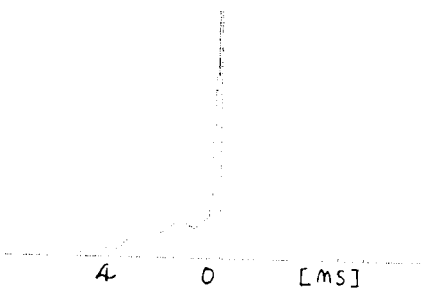
[그림 8-a] 간섭현미경에 의한 굴절률 분포

적용하여 계산하였다.

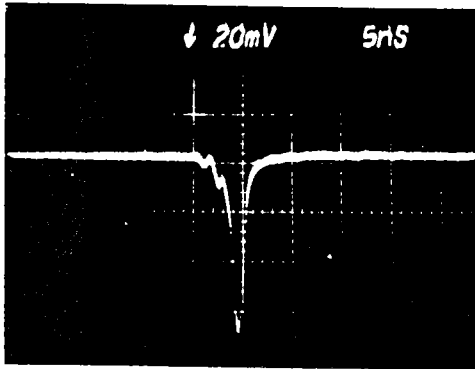
유한요소법을 이용한 수치해석적 방법으로 전형적인 멱함수적 굴절을 본포가 아닌 실제적인 광섬유에 대해 임펄스 응답을 계산할 수 있었다. 그러므로 이 방법에 의해 어떠한 굴절률 분포를 갖은 다모드 광섬유라도 임펄스 응답을 계산할 수 있는 실제적인 방법을 제시하였고 이 계산의 타당성을 입증하기 위해 계산된 임펄스 응답과 실험을 통한 실험치와 비교한 결과 좋은 일치 결과를 보였다.

7. 참고 문헌

1. K. OYAMADA, "High-Accuracy Numerical Data on Propagation Characteristics of α -Power Graded-Core Fibers", IEEE Trans. M.T.T., Vol. MTT-28, PP.1113-1118, OCT. 1980.
2. Marcuse, "Light Transmission Optics", PP.480-510.
3. T. Okoshi and K. Okamoto, "Analysis of Wave Propagation in Inhomogeneous Optical Fiber Using a Variational Method", IEEE Trans. M.T.T., Vol. MTT-22, PP.938-942, 1974.
4. R. Olshansky and D.B. Keck, "Pulse broadening in graded-index optical fibers", Appl. Opt., Vol.15, No.2, PP.483-491, Feb. 1976.



[그림 8-b] 계산된 임펄스 응답.



[그림 8-c] 측정된 임펄스 응답
그림에서 보는 바와 같이 임펄스 응답의 계산치와 측정치는 대략적으로 좋은 일치 결과를 보인다.

6. 결 론

본 연구에서는 다모드 광섬유의 전파특성을 나타내는 임펄스 응답을 유한요소법을