

에너지 분산 방법을 이용한 모델 간소화

관 기 호 최 권
 명 자 내 학 교 서 울 대 학 교

Model Simplification Using the Energy Dispersion method

Key Ho Kwon and Keh Kun Choi
 Myong Ji Univ. Seoul National Univ.

Abstract

The model simplification method of the linear time invariant continuous system is proposed. Using the energy dispersion method the dynamic modes with dominant energy contribution are selected, and the poles of the denominator are retained. And there is investigated how the dynamic modes affected the system characteristic. The parameters of the numerator are determined by time moment matching method.

This method is that the algorithm is simple and also the simplified model found is always stable if the original system is stable, and through examples we assured that this method leads to good results in both transient and steady state responses.

1. 서 론

고차 선형 시스템을 저차 모델로 간소화 시키는 방법은 시스템 분석과 제어기 설계에서의 중요성 때문에 지금까지 중요한 관심사가 되어왔다. 이들 방법들은 일반적으로 다음의 두가지 범주로 나눌 수 있다. 첫째는 임의적 동작을 고려하여 원래의 시스템을 간소화시키는 방법이다(1-4). 이 방법들은 시스템 내부의 특성을 생각하지 않고 외부의 특성만을 고려하므로써 원래의 시스템이 안정하여도 간소화 모델이 안정하다고 보장할 수 없다. Warwick(1)은 오차 다항식 방법을 제안하였는데 이 방법은 오차 다항식의 계수를 영으로 놓음으로써 원래의 시스템과 간소화 모델의 Markov 파라미터와 타임 모멘트를 같게하는 방법으로 일고리즘과 계산이 간단한 반면에 안정도를 보장할 수가 없다. Therapost(2)는 양 선형 변환을 이용하지 않고 z-영역에서 직접 간소화 모델을 구할 수 있는 안정도가 보장되는 이산 안정도 방정식을 제안했다. 둘째는 원래의 시스템의 특성을 거의 변화시키지 않고 지배적인 상태 변수나 동작 모드를 유지하는 방법이다(5-7). 본래 시스템의 구조적 성질을 유지하는 입장에서 보면 modal 기법이나 aggregation 기법이 많이 사용되는데 여기에는 다음과 같은 문제점들이 있다. Modal 기법에서는 간소화 모델의 차수와 유지되어야 할 상태 변수가 미리 결정되어야 한다. Aggregation 기법에서는 차수가 높은 시스템인 경우 aggregation 행렬의 계산량이 많아지고 순시 및 정상 상태의 응답이 원래의 시스템과 달라질 수가 있다. Eitelberg(5)는 가중 방정식 오차 방법을 제안하였는데 이 방법은 간소화 모델의 특성이 가중 행렬에 의해 좌우되기 때문에 가중 행렬의 선택이 주의해야 한다. Wilson(6)은 방산의 오차

방법을 이용한 모델 간소화 방법이 원래의 시스템이 안정하다 해도 간소화 모델이 안정하다는 보장을 할 수가 없음을 증명하였다. Lastman(7)은 시스템 출력에서의 상태 변수의 기여도를 중 임펄스 응답 에너지로 평가하므로써 유지되어야 할 상태 변수를 결정하였다.

본 논문에서는 에너지 분산 방법에 의해 지배적인 동작 모드를 결정하고 타임 모멘트 매칭을 이용하여 본자의 파라미터를 계산하였다. 시스템의 순시 응답 특성에 좋은 근사를 얻기위해 간소화 모델의 분모는 본 에너지를 갖는 동작 모드를 유지하도록 계산된다. 이 방법은 원래의 시스템이 안정하면 간소화 모델도 항상 안정하며 순시 및 정상 상태 응답에서 좋은 결과를 낳는다.

II. 에너지 분산 방법

선형 시불변 연속 시스템의 전달함수는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}
 Y(S) &= \frac{b_n S^n + b_{n-1} S^{n-1} + \dots + b_1 S + b_0}{S^m + a_{m-1} S^{m-1} + \dots + a_1 S + a_0} \\
 &= \sum_{k=1}^n \frac{q_k}{s - \lambda_k} \\
 &= \sum_{k=1}^n q_k \int_0^{\infty} \exp(\lambda_k t) \exp(-st) dt \\
 &= \int_0^{\infty} \exp(-st) \sum_{k=1}^n q_k \exp(\lambda_k t) dt \\
 &= \int_0^{\infty} \exp(-st) g(t) dt \quad (1)
 \end{aligned}$$

여기서,

$$g(t) = \sum_{k=1}^n q_k \exp(\lambda_k t) \quad (2)$$

(1)식에서 전달 함수의 무한 근은 좌측 평면 상에 있는 것으로 가정하였다. 입력과 출력과의 관계를 중첩의 정리법 이용하여 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 y(t) &= g(t) * u(t) \\
 &= \int_{-\infty}^t g(\tau) u(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t g(t-\tau) u(\tau) d\tau \quad (3)
 \end{aligned}$$

정의에 의해 $y(t)$ 의 자기 상관 함수는

$$\gamma(\tau) = E\{y(t) y(t+\tau)\} \quad (4)$$

우사 주어진다. 각각의 동작 모드에 모두 가중을 주기 위해서 시스템의 입력에 백색 잡음 $w(t)$ 을 가하면

$$\begin{aligned}
 y(\tau) &= E\left\{ \int_{-\infty}^t g(t-\alpha)w(\alpha) d\alpha \int_{-\infty}^{t+\tau} g(t+\tau-\xi)w(\xi) d\xi \right\} \\
 &= \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^{t+\tau} g(t-\alpha)g(t+\tau-\xi)E\{w(\alpha)w(\xi)\}d\xi d\alpha \\
 &= \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^{t+\tau} g(t-\alpha)g(t+\tau-\alpha) d\alpha \quad (5)
 \end{aligned}$$

여기서 $\int_{-\infty}^t$ 은 백색 잡음 $w(t)$ 의 분산이다. 이제 $t-\alpha=\beta$ 로 놓고 (2)식을 (5)식에 대입하여 정리하면

$$\begin{aligned}
 y(\tau) &= \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^{t+\tau} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n g_i g_j \int_0^{\infty} \exp\{(\lambda_i + \lambda_j)\beta\} d\beta \exp(\lambda_j \tau) \\
 &= \sum_{j=1}^n \left(\int_{-\infty}^t \sum_{i=1}^n \frac{-g_i g_j}{\lambda_i + \lambda_j} \right) \exp(\lambda_j \tau) \\
 &= \sum_{j=1}^n x_j \exp(\lambda_j \tau) \quad (6)
 \end{aligned}$$

여기서,
$$x_j = \int_{-\infty}^t \sum_{i=1}^n \frac{-g_i g_j}{\lambda_i + \lambda_j} \quad (7)$$

식 (6)에서 알 수 있는 바와 같이 입력이 백색 잡음일 때 출력 $y(t)$ 의 분산에 대한 고유치 λ_j 에 해당하는 에너지 기여도는 x_j 이다. 이 x_j 를 자기 상관 계수라 부른다. 시간 지연이 없는 경우 λ_j 의 분산은 다음과 같이 정의된다.

$$x_j \triangleq \frac{x_j}{\delta(\omega)} = \frac{x_j}{\sum_{i=1}^n x_j} \quad (8)$$

분산 x_j 의 의미는 출력의 전체 에너지에 대한 에너지의 기여도를 나타낸다. 따라서 이 x_j 를 이용하여 시스템의 간소화 모델을 만드는 데 필요한 동적 모드를 결정할 수 있다.

이제 동적 모드가 시스템의 특성에 어떻게 관여하는지를 살펴 보기로 하자.

(1)식에 단위 계단 함수를 입력으로 인가하면

$$\frac{1}{s} = \frac{K}{s} + R(s) \quad (9)$$

$$\text{만, } K = \sum_{i=1}^n \frac{-g_i}{\lambda_i}$$

$$R(s) = \sum_{i=1}^n \frac{g_i / \lambda_i}{s - \lambda_i} = \sum_{i=1}^n \frac{r_i}{s - \lambda_i} \quad (10)$$

여기서 K 는 정상 상태에서의 이득이고 $R(s)$ 는 단위 계단 응답의 순시 상태 응답이다. 따라서 $R(s)$ 는 원래 시스템의 보편 시스템으로 생각될 수 있다. $R(s)$ 에서 각 동적 모드의 이득은 고유치에 의해 좌우됨을 알 수 있다. 즉 허수축상 근치에 고유치를 가지면 해당 동적 모드의 지배가 증가하게 된다. 이와같이 순시 상태 응답이나 정상 상태 응답 모두에서 같은 가중을 갖는 간소화 모델을 얻으려면 $G(s)$ 와 $R(s)$ 에서 지배적인 동적 모드를 유지하고 나머지 동적 모드를 제거하면 된다.

III. 간소화 모델 설계

원래의 시스템의 전달 함수를 다시 써보면

$$G(s) = \frac{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (11)$$

(11)식에서 에너지 분산 방법에 의해 지배적인 동적 모드를 선택하여 간소화 모델을 구성하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$G(s) = \frac{d_{k+1} s^{k+1} + d_k s^k + \dots + d_1 s + d_0}{s^l + c_{l-1} s^{l-1} + \dots + c_1 s + c_0} \quad (12)$$

이제 $G(s)$ 를 $s=0$ 에 대해 m 급수로 전개하면

$$G(s) = m_0 + m_1 s + \dots + m_k s^k + \dots \quad (13)$$

이 된다. 여기서 m_k 는 $G(s)$ 의 분자 분모의 계수와 다음과 같은 관계를 가진다.

$$\begin{aligned}
 b_0 &= a_0 m_0 \\
 b_1 &= a_1 m_0 + a_0 m_1 \\
 &\dots \\
 b_k &= a_{k-1} m_0 + a_{k-2} m_1 + \dots + a_0 m_{k-1} \\
 &\dots
 \end{aligned} \quad (14)$$

마찬가지로 $G(s)$ 를 $s=0$ 에 대해서 m 급수로 전개하면

$$G(s) = l_0 + l_1 s + \dots + l_j s^j + \dots \quad (15)$$

여기서 l_j 는 다음의 관계식을 만족한다.

$$\begin{aligned}
 d_0 &= c_0 l_0 \\
 d_1 &= c_1 l_0 + c_0 l_1 \\
 &\dots \\
 d_k &= c_{k-1} l_0 + c_{k-2} l_1 + \dots + c_0 l_{k-1} \\
 &\dots
 \end{aligned} \quad (16)$$

따라서 (13), (15)식에서 k 번째 모멘트까지 계수를 같게하면 즉

$$m_i = l_i \quad \text{만, } i = 0, 1, \dots, k-1 \quad (17)$$

이면 (14), (16)식에서 간소화 모델 $G(s)$ 의 분자 다항식을 얻을 수 있다.

IV. 예 제

1. 다음과 같이 허수축 근치에 복소 근들이 존재하는 경우를 생각하자.

$$\begin{aligned}
 G(s) &= \frac{35s^5 + 15.25s^4 + 51.485s^3 + 141.5125s^2 + 178.81485s + 285.4376}{s^6 + 2.85s^5 + 16.925s^4 + 27.5685s^3 + 80.70925s^2 + 64.02865s + 108.6948}
 \end{aligned}$$

$G(s)$ 의 고유치를 구하면

$$\begin{aligned}
 \lambda_1, \lambda_2 &= -0.3 + j2.1 \\
 \lambda_3, \lambda_4 &= -0.5 + j2.3 \\
 \lambda_5, \lambda_6 &= -0.6 + j2.0
 \end{aligned}$$

각각의 고유치에 대한 에너지 분산은 표1과 같다.

(표1)

고유치	에너지 분산	$G(s)$	$R(s)$
λ_1, λ_2	$X_1 + X_2$	20.9%	52.4%
λ_3, λ_4	$X_3 + X_4$	14.2%	7.5%
λ_5, λ_6	$X_5 + X_6$	64.9%	40.1%
		100%	100%

에너지 분산을 고려하여 표1에서 λ_3, λ_4 을 제거하고 간소화 모델을 구하면

$$G_r(S) = \frac{2.96079s^3 + 12.09655s^2 + 22.97678s + 51.5221}{s^4 + 1.85s^3 + 9.585s^2 + 8.0165s + 19.62}$$

원래의 시스템과 간소화 모델의 단위 계단 입력에 대한 응답을 그림1에 나타내었다. 그림1을 살펴보면 고유치 λ_3, λ_4 를 제거한 결과로 순시 응답에서 약간의 오차가 있지만 본 논문에서 제안한 방법이 원래의 시스템을 잘 따라감을 알 수 있다.

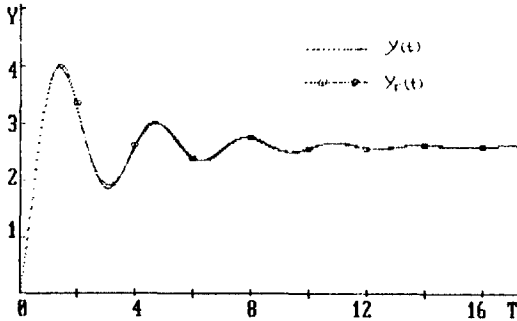


그림1. 예제1의 원래의 시스템과 간소화 모델의 단위 계단 응답

2. 다음과 같이 실근과 복소 근이 같이 존재하는 경우를 생각하자.

$$G(S) = \frac{32.665s^5 + 806.655s^4 + 4555.785s^3 + 23347.945s^2}{s^6 + 10.85s^5 + 108.255s^4 + 485.455s^3 + 1863.455s^2 + 28373.655s + 9802 + 2456.655s + 980.2}$$

$G(S)$ 의 고유치를 구하면

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -0.8 & \lambda_2 &= -1.0 \\ \lambda_3, \lambda_4 &= -2.0 + j5.0 \\ \lambda_5, \lambda_6 &= -2.5 + j6.0 \end{aligned}$$

각각의 고유치에 대한 에너지 분산은 표2와 같다.

고유치	에너지 분산	G(S)	R(S)
λ_1	X	0.2%	-1.2%
λ_2	X	-8.9%	25.4%
λ_3, λ_4	X + X	-6.1%	-5.2%
λ_5, λ_6	X + X	111.8%	81.0%
		100.0%	100.0%

표2에서 에너지 분산을 고려하여 $\lambda_1, \lambda_3, \lambda_4$ 를 제거하면 간소화 모델의 전달 함수는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$G_r(S) = \frac{35.45s^2 + 636.65s + 422.5}{s^4 + 6.05s^3 + 47.255s^2 + 42.25s}$$

표2에서 λ_2 의 에너지 분산이 순시 응답에 큰 영향을 미침을 주의하자. 예제2의 원래의 시스템과 간소화 모델의 단위 계단 응답을 그림2에 나타내었다. 예제1과 같이

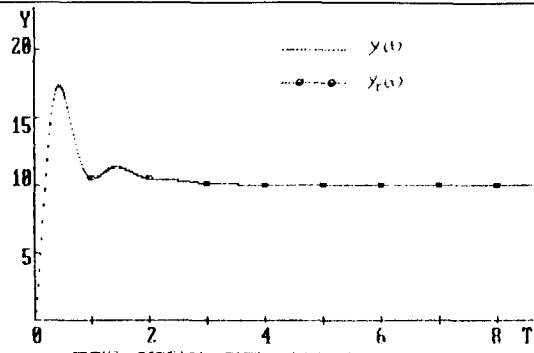


그림2. 예제2의 원래의 시스템과 간소화 모델의 단위 계단 응답

제안한 방법은 원래의 시스템과 잘 일치한다.

V. 결 론

에너지 분산 방법을 이용한 모델 간소화 방법이 선형 시불변 연속 시스템에 적용되었다. 제안한 방법은 계산이 간단하고 또한 원래의 시스템이 안정하면 간소화 모델도 항상 안정하며 훌륭한 근사하기 이루어짐을 예제를 통해 입증되었다. 또한 순시 응답에서 에너지 분산과의 관계가 검토되었다.

참고 문헌

1. E. Warwick, "A new approach to reduced order modelling," IEE Proc. vol.131, pp.74-78, Mar. 1984
2. C.P. Iherapour, "Low order modelling via discrete stability equations," IEE Proc. vol.131, pp.248-252, Nov. 1984
3. I.C. Chen, C.Y. Chang & K.W. Llan, "Model reduction using the stability equation method & the continued fraction method.", Int. J. control, vol. 32, no. 1, pp. 81-94, Mar. 1980
4. Zygmunt Hasiewicz & Anna Stankiewicz, "On optimal model reduction for output feedback design," Int. J. control, vol. 40, No. 2, pp. 281-284, Nov. 1984
5. E. Eitelberg, "Model reduction by minimizing the weighted equation error," Int. J. control, vol. 34, No. 6, pp. 1113-1123, 1981
6. David A. Wilson, "Stability of reduced order models obtained via the equation error method," IEEE trans. automat. contr., vol. AC-29, No. 2, Feb. 1984
7. G. J. Lastman, N. K. Sinha, & P. Rozsa, "On the selection of states to be retained in a reduced order model," IEE Proc. vol. 131, No. 1, Jan. 1984
8. D. Bonvin & D. A. Mellichamp, "A unified derivation & critical review of modal approaches to model reduction," Int. J. control, vol. 35, No. 5, pp. 827-848, Oct. 1982
9. C. M. Liaw, C. T. Pan & M. Douyang, "Model reduction of discrete systems using the power decomposition method & the system identification method," IEE Proc., vol. 133, No. 1, pp. 30-34, Jan. 1986
10. Mahmoud & Singh, "Large scale systems modelling," Pergamon press, 1981
11. Kailath, "Linear systems," Prentice-hall, 1980