비최소 위상 시스템에 대하여 오프셋(offset) 제거 기능을 가진 자기 동조 제어

°나 종 래 , 변 증 남
한국 과학 기술원, 전기및 전자 공학과

Self Tuning Control with offset elimination for nonminimum phase system

°Jong-Ray Na and Zeung-Nam Bien
Department of eletrical and Eletronics, KAIST

Abstract

In the process control applications of self tuning control, a major concern of the control problem is to handle an offset caused by load disturbances and random steps occuring at random instance of time. Conventionally an integrator is incorperated in the forward path of the controller to eliminate such an offset. But this approach causes a difficulty if the adaptive part of the resultant controller is to be evaluated.

In this paper a method of analyzing the adaptive system and improving the offset effect is suggested for a class of referance model method in the self tuning adaptive control system.

1. 서 론

산업공정에의 응용이 날로 늘어가고 있는 자기 동조 제어기는 부하의 변화나 외란에 대해 민감하여 원하는 값과 실제의 값 사이에 오프셋을 발생한다. 이 경우 시스템의 계수를 추정하고 이를 바탕으로 기준 모델과 같은 특성을 갖도록 제어기의 계수를 조정하고는 있으나 부하 변동이나 외란시 이들 계수가 부정확해지고 그 결과 오프셋이 발생하게 된다. 이 문제에 대해 대부분의 경우에 제어기의 전단에 적분기를 접속하여 강인성(robustness)을 갖도록하는 방법으로 쉽게 해결하고 있다. 이는 PID 제어기에서의 적분기의 경우와 같은 것이다.

그러나 이경우 단순히 적분기의 추가만으로 그 적분기의 이득의 크기나 그 효과를 정량적으로 analysis하기는 곤란하다.[1]

2. CARIMA plant model의 이용

부분적으로 선형화된 plant의 모델이 대부분의 경우에 다음의 형태로 주어진다.

$$A(z^{-1})y(t) = z^{-k} B(z^{-1})u(t) + x(t)$$

여기서 $A(z^{-1})$및 $B(z^{-1})$은 backward shift operator 이며 k는 sampling interval로 나타낸 플랜트의 dead time에 대한 하한이다. 또한 y(t),u(t)는 제어기 설계시 사용되는 출력및 입력값이고 x(t)는 plant에 가해지는 외란을 모델화한 것이다.
위의 model에서 singal x(t)를

$$x(t) = C(z^{-1})\xi(t) \tag{1a}$$

로 한 model이 많이 사용되어 왔다.
여기서 $C(z^{-1})$은 다항식이고 $\xi(t)$는 σ^2의 variance를 갖는 독립적인 random variable의 sequence이다.
x(t)의 평균값 d 를 0으로 가정하여 설계한 제어기는 평균값 d가 0 이 아닌 noise process의 변화에 민감하게되어 offset을 나타나게된다.[2,5] 이에 대해 서서히 변화하는 평균값을 추정하여 보상하는 방법은 d의 변화에 따른 forgetting factor를 조정함으로써 가능하다. 그러나 step disturbance와 같이 급격히 변화하는 외란에는 곤란하게 된다. 이에 대해 disturbance process를 x의 increment

$$\Delta x(t) = C(z^{-1})\xi(t) \tag{1b}$$

와 같이 가정하여 offset 문제를 다룰 때

$$A(z^{-1})y(t) = z^{-k}B(z^{-1})u(t) + C(z^{-1})\xi(t)/\Delta$$

로 되고 $C(z^{-1})$와 $\xi(t)$에 대한 여러가지의 가정에 의해 x(t)의 의미가 해석된다. 예로서 $C(z^{-1}) = 1$이고 $\xi(t)$가 di의 impulse를 가질때 x(t)는 di 크기의 step이 된다.

여기서 $\Delta = 1-z^{-1}$ 로 정의된다.
이러한 $x(t)$의 성질로부터 적분 제어법칙이 자연스럽게 나오게되고 또한 적응 algorithm의 유도를 위한 보다 실질적인 plant model이 될수 있다.[1]
식(1b)를 CARIMA (Controlled Autoregressive Integrated Moving Average) plant model이라 한다.
본 논문에서는 이러한 성질을 갖는 CARIMA plant model을 써서 상쇄가능한 zero를 갖는 비최소 위상 플랜트에 대한 offset 제거 특성을 해석하고자 한다.

3. 적분형 자기 동조 제어기

플랜트의 모델을 식(1a)로 하고 $x(t)$가 nonzero 평균값을 가질경우 오프셋 보상을 위해 다음과 같이 일반화된 제어 법칙이 적합하다.

$$R(z^{-1})u(t) + S(z^{-1})y(t) - T(z^{-1})yr(t) + d(t) = 0 \tag{2a}$$

여기서 $R(z^{-1}), S(z^{-1}), T(z^{-1})$는 정해져야 할 다항식이고, $d(t)$는 외란 보상을 위한 변수이며, $yr(t)$는 기준 입력이다. 플랜트의 모델을 식 (1b)로 할경우 다음과 같이 적분형의 제어법칙을 사용하면 식(1a)에서와 같은 $d(t)$가 없어지므로 구할 필요가 없어진다.

$$R1(z^{-1})\Delta u(t) + S(z^{-1})y(t) - T(z^{-1})yr(t) = 0 \tag{2b}$$

여기서 $\Delta u(t) = u(t) - u(t-1)$이 된다.
본 논문에서 다루고자 하는 자기 동조 제어 문제는 다음과 같이 formulation 할수 있다.

식 (1b)과 같은 plant모델에 대해 system identification에의해 $A(z^{-1})$및 $B(z^{-1})$를 추정하고 식(2b)와 같은 제어법칙을 적용할때 전체 시스템의 전달함수가 설계자가 주는 기준 플랜트 $Bm(z^{-1})/Am(z^{-1})$와 같게 되도록 하는 $R(z^{-1}), S(z^{-1})$및 $T(z^{-1})$을 구하라.

이 문제에 대하여 대상이 되는 플랜트가 비최소 위상인 경우 기준 플랜트의 제로를 결정하는 $Bm(z^{-1})$ 의 설정에는 제한이 따른다. 즉 전체 시스템에 대해 극점(pole)은 자유로이 배치할수 있으나 영점(zero)은 제한이 있게 된다. 이는 inverse plant를 불안정하게 하는 영점은 극점과 상쇄 될수 없다는 데서 연유한다.

4. 영점의 상쇄 여부

본 논문에서 다루고 있는 전체 시스템의 블럭 선도는 그림 1과 같다. 그리고 본 논문에서 식의 전개를 위해 다음과 같은 가정을 하자. 또 플랜트의 전달함수중 $B(z^{-1})$과 $A(z^{-1})$은 coprime으로 가정한다. 일반적인 다항식으로 확장하는 것은 대수적으로는 복잡할지라도 개념적으로는 간단하다 [ref.1의 Appendix]. 따라서 앞으로 본 논문에서 식 전개시 $C(z^{-1}) = 1$로 가정한다.

또 $B(z^{-1})$을 inverse plant를 불안정하게 하는 제로 B^-와 그렇게 하지 않은 제로 B^+로 인수 분해되어 있다고 하자. 즉 $B \triangleq B^+B^-$로 정의하자.
식 (1b)와 (2b)에 의한 폐루우프 식은

$$y = \frac{z^{-k}BTyr + R1\xi(t)}{A\Delta R1 + Sz^{-k}B}, \quad \Delta \triangleq 1 - z^{-1}$$

이 된다. 그리고 다음의 두 부분으로 쓸 수 있다.

$$y = \frac{z^{-k}BT}{P}yr + \frac{R1}{P}\xi(t) \tag{3}$$

$$P \triangleq A\Delta R1 + Sz^{-k}B$$

그런데 비최소 위상 시스템의 경우 안정된 영점(zero)이 있을때 기준 모델이 그것의 포함여부, 즉 상쇄(cancellation)여부에 따라 그 formulation이 달라진다. 그리고 설계자가 주는 기준모델에서 $Bm(z^{-1})$은 비최소 위상 시스템의 경우 반드시 inverse plant를 불안정하게 하는 영점을 포함하여야 한다. 즉 그러한 영점은 상쇄할 수 없다.

3.1 영점의 상쇄

식(3)에서 y/yr에 해당하는 전달 함수중 $B = B^+B^-$에서 B^+를 상쇄한 것이 기준 전달 함수 $Bm(z^{-1})/Am(z^{-1})$과 같게 되도록 R,S및 T의 다항식의 계수를 구하는 것이 된다. 그 결과

$$y/yr = \frac{z^{-k}BT}{A\Delta R1 + z^{-k}SB} = \frac{BmB^+}{AmB^+}$$

따라서

$$A\Delta R1 + z^{-k}S1B = AmB^+ \tag{4c}$$

$$Bm = Bm'B^- \tag{4d}$$

가 얻어진다.
식(4b)로 부터 R1은 B 를 인수로 가져야 한다.

따라서 $R1 \triangleq B^+R1'$ (4e)
과 같이 정의한다.
그리고 식(4b')및 식(4e)를 이용해 다음과 같이 쓸수 있다.

$$A\Delta R1' + z^{-k}S1B^- = Am \tag{4b}$$

그리고 플랜트(1b)및 적분 제어기 (2b)에 대해 영점 상쇄시 다음의 정리가 성립한다.

정리1. 식(1b)및 (2b)로 영점이 상쇄된 시스템이 오프셋 제거 성질을 갖기 위한 충분 조건은
(i) 기준 모델의 극점을 안정되도록 설정하고

$$\text{(ii)} \quad \left.\frac{B^- T1}{Am}\right|_{z=1} = 1$$

이 되도록 하면 된다
(증명) 주어진 $Am(z^{-1})$에 대해 식 (4b)는 A,B가 coprime일 때 항상 R1과 S1인 해가 존재한다.[7,8] 따라서 $Am(z^{-1})$이 전체 시스템의 극점이 되고 그것이 안정하면 식(4a)에서 최종치 정리를 적용하여

$$\left.\frac{z^{-k}BT1}{BmB^+}\right|_{z=1} = \left.\frac{z^{-k}B^-T1}{Bm}\right|_{z=1} = 1$$

이 얻어진다. (증명 끝)

조건(ii)는 인수분해시 $B^-(z^{-1})\,|_{z=1} = 1$로 되고 $Am(z^{-1}) = |_{z=1} = 1$로 주어지는 경우 $T1(z^{-1})|_{z=1}=1$이 된다.

보조 정리2.1 정리 1을 만족할 경우 전체 시스템에서 외란에 의한 항은

$$\eta 1((t) = \frac{R1'\xi(t)}{Am} \qquad (5a)$$

가 된다.

(증명) 식(3)과 식(4a)에서 외란에 의한 항은 $R1 \triangleq R1'B^+$로부터

$$\eta 1(t) = \frac{R1\xi(t)}{AmB^+} = \frac{R1'B^+}{AmB^+}\xi(t) = \frac{R1'}{Am}\xi(t)$$

이 된다. (증명 끝)

3.2 영점의 보존 및 상쇄에 관한 두 결과의 비교

상쇄하는 영점이 없을 경우 $B = B^+B^-$ 에서

$B^+ = 1$, $B^- = B$

가 된다. 그 결과 y/yr = Bm / Am 이 되고 이때 R2,S2 및 T2는 다음의 식을 만족하여야 한다.

$$A\Delta R2 + S2\, z^{-k}B = Am \qquad (6b)$$
$$z^{-k}BT2 = Bm \qquad (6c)$$
$$Bm = Bm'B^- \qquad (6d)$$

이때 다음의 보조 정리가 성립한다.

보조 정리 2.2 식(6a-d)를 만족할 경우 외란 항은

$$\eta 2(t) = \frac{R2\xi(t)}{Am(t)}$$

가 된다.

(증 명) 보조정리 2.1과 같다. (증명 끝)

영점의 상쇄여부는 $B = B^+B^-$시 inverse plant를 불안정하게 하지 않는 영점을 B^+ 에 포함시켜야 할 지의 여부에 따라 3.1의 식을 따르면 된다. 그리고 영점의 상쇄 여부에 대해 다음정리가 성립한다.

정리 3. (비)최소 위상 시스템에서 minimal plant (A,B)에 대해 (i) 기준 모델의 극점이 모두 원점에 있고 (dead beat control) (ii) step type 의 외란이 들어 있을 경우 (iii) 상쇄하는 B^+의 근들이 어느것도 원점에 위치하지 않고 $deg(B^+) = \ell$ (deg(.) 는 (.) 의 degree 임) 일 경우 상쇄하지 않는 경우보다 R1' 및 R2의 최저차의 항 이 0이 아닐 경우 적어도 ℓ-step빨리 외란의 영향이 제거된다.

(증명) 식(4b)와 (6b)를 비교할때 B^- 가 B 로 바뀐셈이다. 그리고 $B = B^+B^-$ 이므로 $deg(B^-) = deg(B) - \ell$. A, B는 coprime이므로 A,B 도 coprime이다. 조건 (3)에 의해 R1'및 R2를 각각 B 및 B에 대해 최소 degree가 되도록 정하면 Euclid's algorithm을 써서 $deg(R2) - deg(R1') = deg(B) - deg(B^-) = \ell$이 됨을 보일수 있다.[ref. 8의 appendix와 ref. 7의 chapter 3 또는 ref. 1]
이제 영점을 상쇄할 경우 외란의 영향은 보조정리 2의 식(5)로 주어지고 그렇지 않을 경우 식(7)로 주어지는데 조건(i)에 의해 $Am(z^{-1})$ 또 조건(iii)에 의해 $\xi(t)$는 delta함수가 된다.($\xi(t)/\Delta$ 가 step 이므로)따라서

$$\eta 1(t) = R1'\xi(t)$$
$$\eta 2(t) = R2\,\xi(t)$$

가 되고 $deg(R2) = deg(R1') + \ell$ 이므로 같은 impulse에 대해 $\eta 2(t)$가 $\eta 1(t)$보다 ℓ-step만큼 더욱 길어진다.
(증명 끝)

정리 3으로 부터 zero의 cancellation에 의해 외란에 의한 오프셋의 영향이 더욱 빨리 제거됨을 알수 있다.

이것은 상쇄할 수 있는 zero가 있는 비최소 위상 시스템에까지도 확장 적용된다. 정리 1,보조 정리 2 그리고 정리 3의 결과는 Tuff[1]의 결과를 포함하고 비최소 위상 시스템으로 까지 자연스럽게 확장됨을 보여준다. 즉 정리 2에의해 외란의 영향을 어느정도 예측가능하고 정리 3은 그영향을 줄이는 방법을 제공한다. 이러한 비최소 시스템으로의 확장은 연속 시간에서 최소 위상 시스템이 sample rate에 따라 이산 시간에 비최소 위상 시스템이 된다는 사실에 비추어 볼때 적용 대상이 되는 플랜트가 더욱 많아지게 된다.[3,4]

4.시뮬레이션에 의한 예제

예제. 플랜트의 A,B가

$$A(z^{-1}) = 1 - 1.1z^{-1} + 0.406z^{-2} - 0.05z^{-3}$$

$$B(z^{-1}) = z^{-1}(1 + 0.7z^{-1} - 0.6z^{-2})$$

이고 기준 모델의 분모를 $Am(z^{-1}) = 1$, $Bm'(z^{-1}) = 1$로 하여로 하여 자기 동조 제어기를 위한 R,S및 T를 구하는 경우를 생각하자. B의 근은 -1.2,0.5에 있으므로 0.5에 있는 zero는 상쇄 가능하고 -1.2에 제로가 있으므로 비최소 위상 시스템이다.

case(1) zero의 보존시

식(6b)의 Diophantine eq.을 풀어

$$R(z^{-1}) = 1 - 6.63z^{-1} - 2.21z^{-2} + 7.85z^{-3}$$

$$S(z^{-1}) = 7.73 - 10.9z^{-1} + 4.73z^{-2} - 0.65z^{-3}$$

$$T(z^{-1}) = 0.91$$

을 얻는다.

그림 2 는 UDT^{T}인수분해 방법에 의한 recursive least square estimation을 써서 A,B의 계수를 추정하고 정상상태인 step 30 에서 0.3 크기의 disturbance를 가한 후 step 50에서 이를 제거한 경우의 u(t),y(t) 그리고 yr(t)의 변화를 보여준다.(u(t)는 편의상 -3.0만큼이동 되었음)

case(2) zero의 상쇄시

식(4b)의 Diophantine eq.를 풀어

$$R(z^{-1}) = 1 - 0.59z^{-1} - 0.86z^{-2} + 0.45z^{-3}$$

$$S(z^{-1}) = 1.19 - 1.04z^{-1} + 0.33z^{-2} - 0.038z^{-3}$$

$$T(z^{-1}) = 0.45$$

가 얻어지고 그림 3 은 case(2)와 같은 방법으로 u(t),y(t)및 yr(t)의 변화를 보여준다.(u(t)는 -3.0만큼 이동되었음)

위의 예제는 정리 3의 조건들을 만족하며

$$\deg(B) - \deg(B^{-}) = 2 - 1 = 1$$

step만큼 빨리 외란의 효과가 없어지는 것을 확인할수 있다.

5. 결 론

CARIMA 플랜트 모델 및 적분형 제어법칙에 의한 STR의 조합에서 외란의 효과를 해석하고 그 영향을 제거하기 위한 충분 조건을 제시하였다. 그리고 이를 시뮬레이션에 의해 확인하였다.

참고문헌

1. P.S. Tuff, D.W. Clarke:' Self-tuning control of offset: a unified approach', IEE proc. vol. 132 Pt. D, pp.100-110, 1985
2. K.J. Astrom, B wittenmark:'Self-tuning controllers based on pole-zero placement', IEE proc. vol. 127,Pt.D., pp.120-130, 1980
3. P.J. Gawthrop:'Self-tuning PID controllers: Algorithms and implementation', IEEE trans. Automat. Contr., vol AC-31, No.3. pp201-209 1986
4. K.J. Astrom: 'Zeros of Sampled systems', Automatica, vol 20, No1, pp 31-38, 1984
5. A.Y. Allidina:'Generalized self-tuning controller with pole assignment', IEE proc. vol.127 Pt.D, No.1, pp13-18,1980.
6. D.W. Clarke, A.J.F. Holdgson and P.S. Tuffs:'Offset problem and k-incremental predictors in self-tuning control', IEE proc. vol. 130,Pt d., pp. 217 - 225, 1983
7. Kucera, Discrete Linear Control, Academia, prague, 1979
8. K.J. Astrom and P.E. Wellstead, Computer-Controlled Systems(Theory and Design), Prentice-Hall,Inc., 1984

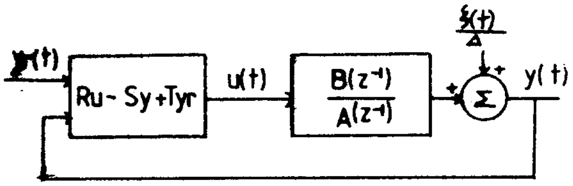

그림 1. 전체 시스템의 블록 선도

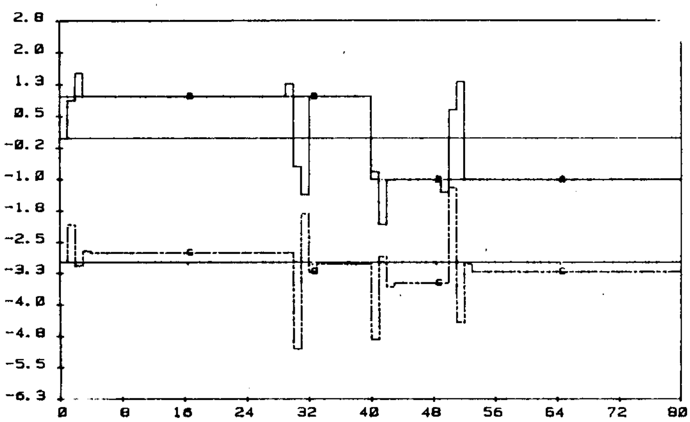

그림 2. 예제에서 영점의 상쇄가 없는 경우

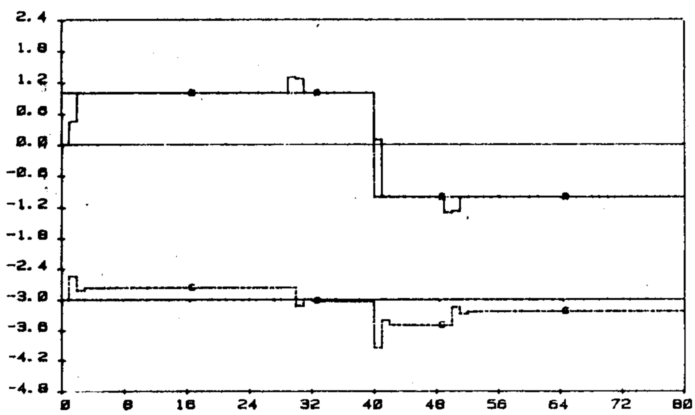

그림 3. 예제에서 영점의 상쇄가 있는 경우