적응 알고리즘의 오차 수렴속도와 수렴성

°김 종 수 배 준 경 박 종 국
경희대학교 공과대학 전자공학과

Error convergence speed of the adaptive algorithm

°Kim Jong Soo Bae Jun Kyung Park Chong Kug
Department of Electronics, Kyunghee University

Abstract

The error differential equations which are derived by using the first error model are uniformly asymptotial stable if the input is bounded and sufficiently rich. In the adaptive control, the speed of convergence of system output or parameter error in such cases is of both practical and theoretical interest.

In this paper, the adaptive algorithms(Gradient algorithm, Intergral algrithm) are discussed from the point of view of speed convergence and the modification of adaptive law for prohibition of overadaptation is discussed.

The result is compared among this algorithms and the adaptive gain is choosed by this result(the speed of convergence).

1. 서 론

적응 제어이론은 1950 년대에 대두하여 1970 년대후반부터 발전하기 시작하였다.

적응 제어를 이용한 제어기 설계에있어서 수렴 속도를 결정하는 것이 중요하여졌으며 그로 인하여 많은 연구가 이루어졌다. [3]

이 연구중에 알고리즘의 수렴성과 적응이득에 의한 수렴속도에 관한 연구가있었다.

본 논문에서는 적응제어 알고리즘에 대한 오차의 수렴성과 적응이득에 의한 수렴속도의 변화에 관하여 서술한다.

또한 잡음과 시스템 동작 특성으로 인하여 발생할 수 있는 불감대의 영향을 최대한 줄이기 위하여 적응 법칙의 정제화를 논하였다.

2. 본 론

적응제어란 동작조건이 완전히 초기화되지 않았거나 또는 변화가 있을 경우 시스템의 상태나 동작을 최적화시키기 위하여 제어시간동안 얻어진 정보를 바탕으로 시스템의 변수를 변화시키는 이론이다.

1) 오차 모델 구성 [1]

시스템에 외란의 존재여부는 시스템의 안정도와 깊은 관계가있다.

a) 외란이 존재하였을 경우

입력 u(t) 가 시스템에 인가되었을 경우 시스템은

$$Ym(t) = Km(t)\ u(t) \quad \text{------- Model}$$

$$Yp(t) = Kp(t)\ u(t) \quad \text{------- Plant}$$

과 같이 나타냈을때

시스템의 출력오차는

$$\begin{aligned} e(t) &= Ym(t) - Yp(t) \\ &= (Km(t) - Kp(t))\ u(t) \end{aligned}$$

과 같다.

여기에서 ϕ 를 변수 오차라 가정하면

$$\phi(t) = K(mt) - Kp(t)$$

출력 오차 e 는

$$e(t) = \phi(t)\ u(t)$$ 이다.

이것을 도식적으로 표시하면 그림1 과같다.

b) 시스템에 외란이 존재할경우

Plant 출력 Yp(t) 는

$$Yp(t) = Kp(t)u(t) + V(t)$$ 이다.

이때 오차는

$$\begin{aligned} e(t) &= Ym(t) - Yp(t) \\ &- \phi(t)\ u(t) - V(t) \end{aligned}$$ 이다.

이것을 도식적으로 표현하면 그림 2와 같다.

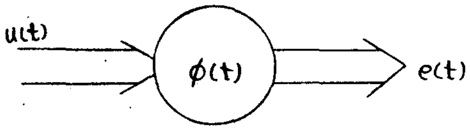


그림 1. 외란이 비존재시 오차모델

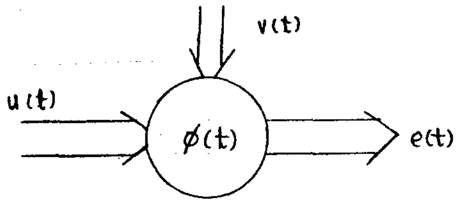


그림 2. 외란 존재시 오차모델

2) 알고리즘

a) Gradient 알고리즘 [2]

오차모델을 이용하여 적응 법칙을 구하면

$\dot{\phi}(t) = -G\,u(t)\,u(t)\,\phi(t)$ 와 같다.

이것을 MIT Rule 이라고도 명명한다.

G 는 대칭 ,positive definite 이득 행렬 이다.

이와같은 형태는 다른 구조에서도 나타나는 것에 대응하여 이차원적 오차이론에 의거한 것이다.

b) 적분 알고리즘 [4]

Weighted least square cost function 이 다음과같이 주어질때

$J(K(t)) = \int_0^t Exp(-q(t-\tau))[K^T(t)\,u(\tau)-Yp(\tau)]d$

이 함수를 오차에 관한 식으로 줄이면, 즉 적응법칙을 구하면

$\dot{K} = -\,G(\partial J/\partial K)$

$= -\,GR(t)K(t) + G\,r(t)$

과 같다. 이때

$R(t) = \int_0^t Exp(-q(t-\tau))\,u(\tau)\,u(\tau)\,d\tau$,

$r(t) = \int_0^t Exp(-q(t-\tau))\,Yp(\tau)\,u(\tau)\,d\tau$ 이다.

이 식을 다시 정리하면

$R(t) = -qR(t) + u(t)\,u(t)$

$r(t) = -q\,r(t) + u(t)\,Yp(t)$ 와 같다.

이때의 적응 법칙은

$\dot{\phi} = \dot{K} = -GR(t)K(t) + G\,r(t)$ 이다.

c) Plant 상태를 이용한 적응제어 [1]

시스템은 시불변이며 상태는 외란 존재시에도 측정가능 하여야 한다.

시스템은 ,

$\dot{Xp}(t) = Ap\,Xp(t) + b\,u(t)$

$\overline{Xp}(t) = Xp(t) + V(t)$ ------Plant

$Xm(t) = Am\,Xm(t) + b\,r(t)$ ------Model

으로 표현 되며, 그림 3에 보이고 있다.

여기에서

$\dot{\overline{Xp}}(t) = \dot{Xp}(t) + \dot{V}(t)$

$= Ap\,Xp(t) + b\,u(t) + \dot{V}(t)$

$= Ap\,Xp(t) + B\,u(t) + W(t)$ 이다.

시스템의 Plant 입력 u(t)는

$u(t) = r(t) + K(t)^T\,Xp(t)$ 이다.

이때 K(t)는 Plant 궤환 이득이다.

이때 상태오차 e 는

$e(t) = Xp(t) - Xm(t)$ 이며

변수 오차 ϕ 는

$\phi(t) = K(t) - K^*$ 이다.

여기서 K^*는 모델의 궤환 이득이다.

적응 법칙을 구해보면

$\dot{\phi}(t) = -e(t)\,P\,b\,Xp(t)$

여기서 $P = P > 0,\ Am\,P + P\,Am = -Q < 0$.

d) 적응 법칙의 정제화 [1]

적응화 영역에서 잡음 첨가시 적응화의 한계를 의미하는 것으로 한계오차의 특성을 위하여 임의의 한계값이하의 변이가 발생할 경우 적응화가 끝난것으로 판별 적응화를 끝낸다.

적응 법칙을 정제화하여 보면

$\dot{\phi}(t) = 0 \qquad e\,P\,e < E$

$\dot{\phi}(t) = -e(t)\,P\,b\,Xp(t) \qquad e\,P\,e > E$

와 같다. 여기서 E 는 외란과 시스템 불감대의 합을 의미한다.

e) 안정도 판별 [5][1]

적응 제어에서 안정도 판별은 Lyapunov 함수를 이용하는데 아래와 같이 정의 되어진다.

$V(e,\phi) = e\,P\,e + \phi^T\phi$

적응화 정제화를 이용하여 Lyapunov 함수를 다음과 같이 새롭게 정의 할수 있다.

$V(e,\phi) = E + \phi^T\phi \qquad e\,P\,e < E$

$= e\,P\,e + \phi^T\phi \qquad e\,P\,e > E$

이때 시스템의 안정조건은 다음과 같다.

1. $V > E > 0$
2. V 는 2n 차원 (e,)공간에서 연속적이어야 한다.
3. $V = 0 \qquad e\,P\,e < E$

   $V = -\,e\,P\,e + 2\,e\,P\,W < 0$ ---------$e\,P\,e > E$

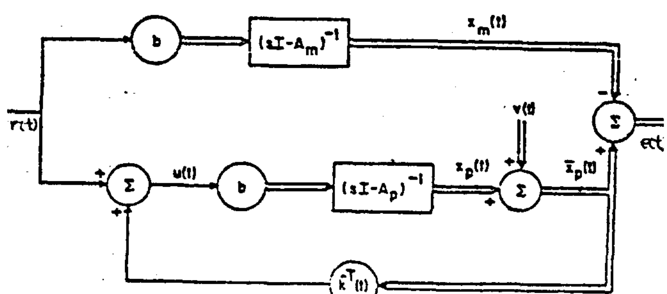


그림 3. 시스템 blockdiagram

3. 결 론

시스템의 안정성에서 적응 이득에 의하여 지수함수적 안정도를 갖는데 이 적응이득에 따라 수렴속도는 high gain 인 경우 이득에 반비례하고 low gain일 경우 이득에 비례한다.

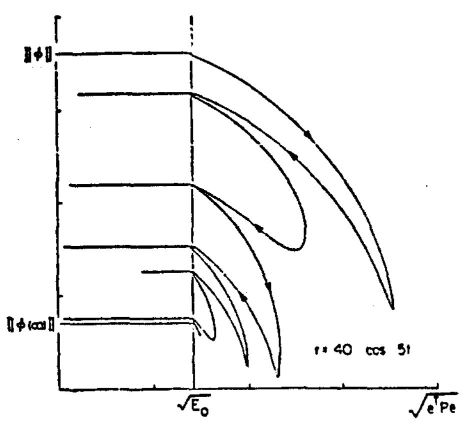
이것으로 인하여 적응 제어기 설계시 시스템의 특성을 고려하여 적응이득을 선택하여야하는데 이것은 많은 실험을 통하여 알 수 있다. (그림 4.)

적응화의 정재화를 도입하여 잡음과 시스템의 동작특성으로 인하여 발생할 수 있는 오차의 과적응화를 방지할 수 있다.

앞으로의 중점적인 연구과제는 불감대의 크기를 잘 선택하는 것이다.

Reference

1. Benjamin B. Peterson, "Bounded error Adaptive identification and control", Yale University, May, 1983
2. Yoan D. Landau, "Adaptive control- The Model Reference Approach", Marcel Dekker, vol 8 1979
3. B.D.O. Anderson, "Exponential Stability of linear eqations Arising in Adaptive identification", IEEE Trans. Automat. Contr. Vol Ac-22, pp 83-88, February 1977
4. G. Kreisselmeier, "Adaptive Observers with Exponential rates of convergence", IEEE Tran. Automat. Cont. Vol Ac-22, pp2-8, February 1977
5. K.S. Narendra and Y.H. Lin, "Design of Stable Model Reference Adaptive controllers", in Applications of Adaptive control, Academic Press, New York, 1980



상태를 이용한 변수 오차

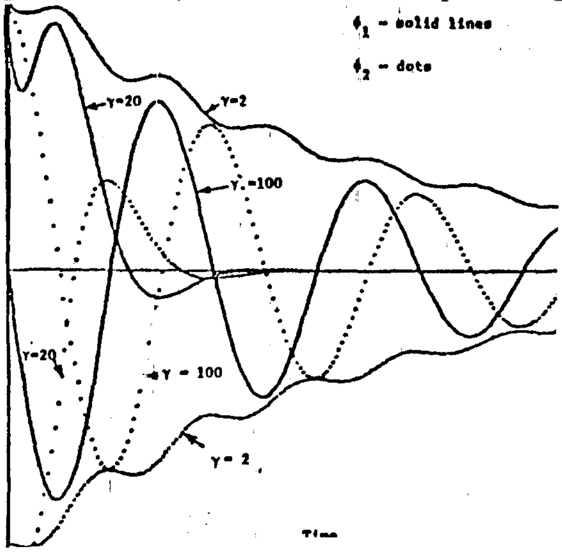
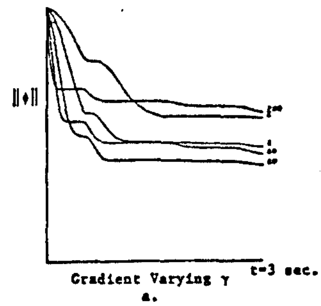
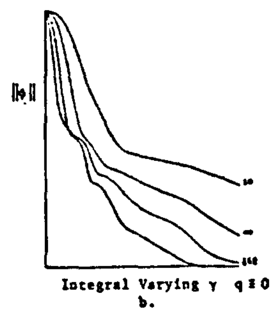


그림 4. 적응 이득에 의한 수렴속도 비교





알고리즘의 오차 수렴