지정된 고유구조를 갖는 선형 시불변 다입출력 시스템의 PID 조정기의 설계

ㅇ손 승 걸 • 전 기 준
경북대학교 공과대학 전자공학과

Design of PID Regulator for linear Time Invariant MIMO System with Prescribed Eigenstructure

Seung Gul Sohn and Gi Joon Jeon
Department of Electronics, Kyung Buk National University

Abstract

This paper presents a design methodology for a PID regulator. The parameters of the PID regulator are determined through equivalent structure to the closed-loop system whose feedback gain assigns prescribed eigenvalues of the closed-loop system and minimizes a given performance index.

1. 서 론

공정제어 시스템은 일정한 외란이나 외부환경에 의한 매개변수의 변화등에 영향을 받는다. 그러므로 공정제어 시스템은 일정한 외란에 의한 오차를 제거하고 매개변수의 변화에 둔감한 조정기를 필요로 한다. 이러한 공정제어에 있어 재래의 PID 제어기가 많은 분야에 사용되고 있다.

한편 재래의 PID 제어기와 현대제어 이론인 최적제어 이론과의 관계는 여러 논문에서[1,2] 검토되었고 최적제어 이론을 이용한 PID 제어기의 설계 또한 여러 연구자에 의해 발표되었다.[3,4,5] 이중에서 대표적인 것으로서 Khalifa (1984)[4]의 논문에서는 최적 궤환이득을 구하기 위해 시스템의 안정도와 원하는 과도응답 특성을 만족하는 적절한 하중행렬의 선택이 문제였다.

본 연구에서는 일정한 외란이 부가된 시스템에 적분기능을 결합하여 확장한 시스템의 폐회로 시스템이 지정된 고유구조를 가지게 하는 궤환이득의 선택에 대한 자유도를 주어진 성능지수를 최소로 하는 방법을 이용하여 궤환이득을 구하였다. 그리고 이 폐회로 시스템과 PID 조정기를 사용한 시스템과의 등가적 구조로 부터 PID 조정기의 매개변수를 결정함으로써 일정한 외란에 의한 오차를 제거하고 향상된 과도응답 특성을 가지는 PID 조정기를 설계하였다.

2. 이 론

다음과 같은 선형 시불변 다입출력 시스템을 고려한다.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + v_0 \qquad x(0) = x_0 \quad \cdots\cdots (1\cdot a)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad \cdots\cdots (1\cdot b)$$

여기서 $x(t)$는 $n \times 1$ 상태변수벡터이고 $u(t)$는 $m \times 1$ 제어벡터이고 v_0는 미지의 일정한 외란이며 $y(t)$는 $r \times 1$ 출력벡터이다. 그리고 A, B, C는 각각 $n \times n$, $n \times m$, $r \times n$ 의 차원을 가지는 상수 행렬이다.

식(1·a)에서 보는 바와 같이 일정한 외란이 상태 방정식에 영향을 주는 시스템에는 출력의 적분치를 상태변수에 추가함으로써 일정한 외란의 영향을 제거할 수 있다는 이론[6]에 근거하여 적분상태변수 '$q(t)$'를

$$\dot{q}(t) \triangleq y(t) \qquad q(0) = 0 \quad \cdots\cdots (2)$$

로 정의하여 확장된 상태변수를

$$z(t) \triangleq \begin{bmatrix} x(t) \\ q(t) \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots (3)$$

로 나타내면 식(1), (2), (3)으로 부터 확장된 시스템은

$$\dot{z}(t) = \bar{A}\, z(t) + \bar{B}\, u(t) \qquad z(0) = \begin{bmatrix} x_0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots (4)$$

로 표시된다. 여기서 $\bar{A}$, $\bar{B}$는

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A & O_{n\times r} \\ C & O_{r\times r} \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} B \\ O_{r\times m} \end{bmatrix} \quad (5)$$

로 주어지며 각각 $(n+r)\times(n+r)$, $(n+r)\times m$의

차원을 가지는 행렬이다. 그리고 ($\bar{A}$, $\bar{B}$)는 완전 제어 기능이라고 가정한다.

확장된 시스템의 일정궤환 제어입력은

$$u(t) = K_P\, x(t) + K_I \int_0^t y(t)\,dt \quad \cdots\cdots (6)$$

가 되며 여기서 K_P, K_I는 각각 $m \times n$, $m \times r$의 차원을 가지는 궤환이득이며 편의상 $K = [\, K_P \;\; K_I \,]$로 둔다.

이렇게 적분기능을 부가함으로써 정상상태 오차와 일정한 외란의 제거는 가능해 졌으나 적분제어는 시스템 차수를 r만큼 증가시키며 시스템을 불안정하게 할 우려가 있다.[7]

한편 시스템의 과도응답 특성은 폐회로 시스템

$$\dot{z}(t) = A_c\, z(t)\,, \quad A_c \triangleq \bar{A} + \bar{B}K \quad \cdots\cdots (7)$$

의 고유치를 통해 좌우되므로 폐회로 시스템이 지정된 고유치를 가지게 하는 궤환이득 K를 구하는 것이 중요하다. 그러나 다입출력 시스템일 경우에는 폐회로 시스템이 지정된 고유치를 가지게 하는 궤환이득 K가 유일하지 않다.

그러므로 폐회로 시스템이 지정된 고유치를 가지게 하는 궤환이득의 선택의 자유도를 성능지수

$$J = \int_0^\infty [\, z'(t) Q z(t) + u'(t) R u(t) \,]\, dt \quad \cdots\cdots (8)$$

를 최소로 하는 궤환이득 K를 구하고자 한다. 여기서 하중행렬 Q는 p.s.d. 행렬이고 R은 p.d. 행렬이다. 이렇게 함으로써 조정기의 과도응답 특성의 향상을 기대할 수 있다.

Moore (1976)[8], Sebakhy (1979)[9]의 접근방식을 사용하여 A_c(6)의 고유치 λ_i, $i = 1, 2, \cdots n$에 대해 $[\, (\bar{A} - \lambda_i I \;\; \bar{B} \,]$의 Kernel을 다음과 같이 놓으면

$$\mathrm{Ker}[\, (\bar{A} - \lambda_i I \;\; \bar{B}) \,] = \mathrm{span} \begin{bmatrix} v_{i1} & v_{i2} & \cdots\cdots & v_{im} \\ w_{i1} & w_{i2} & \cdots\cdots & w_{im} \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots (9)$$

이다. 여기서 Ker은 Kernel 공간을 나타내고 v_{ij}, w_{ij}, $j = 1, 2, \cdots m$은 각각 n-벡터, m-벡터이다. 또한

$$v_i \triangleq \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} \cdot v_{ij}\,, \quad w_i \triangleq \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} \cdot w_{ij} \quad \cdots\cdots (10)$$

로 정의한다. 여기서 α_{ij}는 스칼라이며 이들로부터 행렬 V 및 W를 다음과 같이 구성한다.

$$V = [\, v_1 \;\; v_2 \;\cdots\; v_n \,],\ W = [\, w_1 \;\; w_2 \;\cdots\; w_n \,] \quad \cdots\cdots (11)$$

편의상 nm개의 α_{ij}를 파라미터 벡터로 다음과 정의한다.

$$a = [\, \alpha_{11} \cdots \alpha_{1m} \cdots \alpha_{n1} \cdots \alpha_{nm} \,]^T \quad \cdots\cdots (12)$$

이때 a의 각 값에 대해 $\det V \neq 0$이면 폐회로 시스템 행렬 A_c(6)이 지정된 고유치를 가지게 하는 궤환이득이

$$K = WV^{-1} \quad \cdots\cdots (13)$$

로 주어진다.[9] 이 궤환이득 중에서 성능지수를 최소로 하는 궤환이득을 구하기 위해 제어입력(6)을 사용하여 성능지수(8)를 고쳐쓰면 아래와 같다. 즉,

$$J = \int_0^\infty [\, z'(t) (Q + K'RK) z(t) \,]\, dt \quad \cdots\cdots (14)$$

확장된 시스템(3)에 대한 최적 J^*는

$$J^* = [\, x_0' \;\; 0 \,]\, P \begin{bmatrix} x_0 \\ 0 \end{bmatrix} = x_0' p_{11} x_0 \quad \cdots\cdots (15)$$

여기서 P는 다음의 Lyapunov 방정식

$$P(\bar{A} + \bar{B}K) + (\bar{A} + \bar{B}K)' P = -(Q + K'RK) \quad \cdots\cdots (16)$$

을 만족하며 P_{ij}, $i, j = 1, 2$는 P의 분할 행렬이다. 한편 성능지수 J는 초기치의 영향을 받지 않아야 하므로 이러한 종속성을 제거하기 위하여 x_0를 균등분포를 갖는 랜덤 변수로 가정하고 $E\{ x_0 x_0' \} = I$로 하면

$$E\{J\} = \hat{J} = \mathrm{tr}\ P_{11} \quad \cdots\cdots (17)$$

로 되며 여기서 $E\{\cdot\}$는 기대치이고 tr는 trace이다. 그러므로 J대신에 J의 기대치 $\hat{J}$을 최소로 하는 궤환이득 K를 구하기로 한다.[10]

미섭동해석법 (Small perturbation analysis)을 사용하면

$$\triangle \mathrm{tr}\ P = \mathrm{tr}\ \{ 2 (RKL + \bar{B}'PL)' \triangle K \} \quad \cdots\cdots (18)$$

가 되며 여기서 L은 Lyapunov 방정식

$$L (\bar{A} + \bar{B}K)' + (\bar{A} + \bar{B}K) L = -I \quad \cdots\cdots (19)$$

을 만족한다.

계산의 노력을 줄이기 위하여 다음과 같이 즉,

$$P = V^{-1} \tilde{P} V^{-1}\,,\ L = V \tilde{L} V' \quad \cdots\cdots (20)$$

로 행렬의 취환을 취하면 식 (16), (19)는 아래와 같이 단순한 Lyapunov 방정식이 된다.

$$\tilde{P} \Lambda + \Lambda \tilde{P} = -V'QV - W'RW \quad \cdots\cdots (21\text{-}a)$$

$$\tilde{L}\Lambda+\Lambda\tilde{L}=-V^{-1}V'^{-1} \quad \cdots\cdots (21\cdot b)$$

여기서 Λ는 diag (λ_1, λ_2 … λ_n)이다.

그리고

$$\triangle K=\sum_{i,j=1}^{i=n,j=m}\frac{\partial K}{\partial \alpha_{ij}}\triangle\alpha_{ij} \quad \cdots\cdots (22)$$

이므로 식(9)~(13)으로 부터

$$\frac{\partial K}{\partial \alpha_{ij}}=\frac{\partial W}{\partial \alpha_{ij}}V^{-1}-F\frac{\partial V}{\partial \alpha_{ij}}V^{-1}=R_{ij} \quad \cdots\cdots (23)$$

가 되며 여기서

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_{ij}}=[\,0,\cdots 0,w_{ij},0,\cdots,0\,] \quad \cdots\cdots (24\cdot a)$$

는 ith열(column)에 w_{ij}가 놓이는 $m\times n$행렬이고

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha_{ij}}=[\,0,\cdots 0,v_{ij},0,\cdots,0\,] \quad \cdots\cdots (24\cdot b)$$

는 ith열(column)에 v_{ij}가 놓이는 $n\times n$행렬이다.

식(18), (22), (23)을 결합하면

$$\triangle \mathrm{tr}\ P=\sum_{i,j=1}^{i=n,j=m}\mathrm{tr}\{\,2(RKL+\bar{B}'PL)'R_{ij}\triangle\alpha_{ij}\} \quad \cdots\cdots (25)$$

을 얻는다. 여기서 θ_{ij}를

$$\theta_{ij}=\mathrm{tr}\{\,2(RKL+\bar{B}'PL)'R_{ij}\,\} \quad \cdots\cdots (26)$$

로 정의하면 기울기(gradient) 벡터 $\partial trp/\partial a$가

$$\frac{\partial\, trP}{\partial a}=[\,\theta_{11}\cdots\theta_{1m}\cdots\theta_{n1}\cdots\theta_{nm}\,]^T \quad \cdots\cdots (27)$$

로 주어지며 J을 최소로 하는 필요조건은 기울기 벡터 $\theta_{ij}=0$으로 놓으므로써 얻어지므로 궤환이득 K는

$$K=-R^{-1}\bar{B}'P \quad \cdots\cdots (28)$$

로 구해진다. 이렇게 구해진 K로 부터 폐회로 시스템을 구성하면

$$\begin{bmatrix}\dot{x}(t)\\ \dot{q}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A+BK_P & BK_I\\ C & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(t)\\ q(t)\end{bmatrix} \quad \cdots\cdots (29)$$

와 같이된다.

식(29)와 등가적 구조로 부터 PID 조정기의 매개변수를 구하기 위해 출력궤환 제어의 제어입력을

$$u(t)=K_P^*\,y(t)+K_I^*\int_0^t y(t)dt+K_D^*\,\dot{y}(t) \quad \cdots\cdots (30)$$

로 가정한다. 이때 K_P^*, K_I^*, K_D^*는 각각 $m\times r$ 차원의 PID 조정기의 매개변수인 비례, 적분, 미분 궤환이득이다. 이 제어입력 식(1·a)에서 외란이 제거된 시스템에 대입하여 정리하면 아래의 관계식, 즉,

$$[\,K_P^*\ \ K_D^*\,]=K_P\Gamma'(\Gamma\Gamma')^{-1} \quad \cdots\cdots (31\cdot a)$$

$$K_I^*=(\,I_m-K_dCB)K_I \quad \cdots\cdots (31\cdot b)$$

$$\Gamma=\begin{bmatrix}C\\ CA+CBK_P\end{bmatrix} \quad \cdots\cdots (31\cdot c)$$

을 얻을 수 있고 이로부터 PID 조정기의 궤환이득 K_P^*, K_I^*, K_D^*를 결정할 수 있다.

3. 알고리즘

1) A_c(6)의 각 고유치 λ_i에 대해 식(9)로 부터 v_{ij}, w_{ij}를 계산한다.

2) $\|a_0\|=1$인 초기치 a_0를 선택하고 식(10), (11)로 부터 det $V\neq 0$인 V, W를 계산한다.

3) 식(13)로 부터 K를 계산하고 $i=0$로 한다.

4) 식(21)로 $\tilde{P}$, $\tilde{L}$를 계산하고 식(20)로 부터 P, L을 구한다.

5) 식(23), (26), (27)로 부터 기울기 벡터를 계산하고 $\|\partial trP/\partial a\|$이 충분히 적으면 과정을 중지하고 그렇지 못하면 과정을 계속한다.

6) $i=i+1$로 하고 기울기방법(gradient-based method)[11]를 사용하여 파라미터 벡터의 새로운 값을 구하여 과정 2)를 되풀이 한다.

7) 구해진 K로 부터 식(31)에서 K_P^*, K_I^*, K_D^*를 계산한다.

4. 결 론

본 연구에서는 시스템의 과도응답 특성을 향상시키기 위하여, 폐회로 시스템이 미리 지정된 고유치를 가지게 하는 궤환 이득의 선택의 자유도를 성능지수를 최소로 함으로써 일정한 외란의 제거 및 시스템 매개변수의 변화등에 둔감한 PID 조정기의 설계를 제안하였다. 성능지수를 최소

로 하는 문제는 파라미터 벡터에 대해 성능지수의 기울기 (gradient)를 사용한 Fletcher and Powell Algorithm을 통하여 현재 예제의 시뮬레이션이 진행 중이다.

5. 참고문헌

1. Yen-Ping Shih and Chih-Jian Chen, "On the weighting factors of the quadratic criterion in optimal control," *Int. J. Control*, VOL.19, pp.947∼955, 1974.
2. Stefano Marsili-Libelli, "Optimal design of PID regulators," *ibid*, VOL.33, pp.601∼606, 1981.
3. Darrell Williamson, "Three-term controller parameter selection using suboptimal regulator theory," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, VOL. AC-16, pp.82∼83, 1971.
4. I.H. Khalifa and A.A.R. Hanafy, "A note on trajectory sensitivity reduction using a three-term controller," *ibid*, VOL. AC-29, pp.739∼740, 1984.
5. P.N. Paraskevopoulos, "On the design of PID output feedback controllers for linear multivariable system," *IEEE Trans. Ind. Electron Contr. Instrum.*, VOL. IECI-27, pp.16∼18, 1980.
6. Kwakernaal and Sivan, *Linear Optimal Control System*, John Wiley and Sons, Inc, 1972.
7. Nicholas J. Krikelis, "State feedback integral control with intelligent integrators," *Int. J. Control*, VOL.32, pp.465∼473, 1980.
8. Moore, B.C., "On the flexibility offered by state feedback in multivariable system beyond closed-loop eigenvalue assignment," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, VOL. AC-21, pp.689∼692, 1976.
9. O.A.Sebakhy and N.N.Sorial, "Optimization of Linear multivariable systems with prespecified closed-loop eigenvalues," *ibid*, VOL. AC-24, pp.355∼357, 1979.
10. M.Gopal and P. Pratapachandran, "Sensitivity-reduced optimal discrete linear regulator with prescribed closed-loop eigenvalues," *IEE Proceeding-G* VOL.132, pp.18∼24, 1985.
11. J.L. Kuester and J.H. Mize, *Optimization Techniques with FORTRAN*, New York, McGraw-Hill, 1974.