RPE 방법을 이용한 다입출력 시스템의 상태공간 극배치 자기동조 제어기 설계

°강 석 종 · 전 기 준
경북대학교 전자공학과

Design of State Space Pole Assignment Self-tuning Controller for MIMO Systems Using RPE Method

Suk Jong Kang Gi Joon Jeon
Department of Electronics, Kyungpook National University

Abstract

This paper describes expansion of the state space pole assignment self-tuning control of SISO systems with system noise and abservation noise to that of MIMO systems. Recursive Prediction Error method is used for both parameter and state estimation in the block controllable canonical form. This simplifies the state feedback law by eliminating the online computation of transformation matrix.

1. 서 론

자기동조제어 (Self-tuning control)는 시스템의 매개 변수를 모르거나, 시스템 내에 랜덤 잡음이 존재하는 경우에, 매 제어 사이클마다 시스템 인식과 제어 입력을 계산해서, 시스템의 출력 변동을 최소화시키는 방법이다.

Åström[1] 등은 안정하고 최소위상인 단일입출력 시스템에 랜덤 잡음이 존재할때, 출력 변동을 최소화시키는 자기동조 안정기 (Self-tuning regulator)를 실현시켰고, Clark[2] 등은 일반적인 손실함수의 변화를 최소화시키는 준최적 제어기를 실현시켰다. Wellstead[3] 등은 전달함수 모델을 이용한 극배치 자기동조 제어기를 실현했으며, Tsay[4] 등은 상태공간형을 이용한 극배치 자기동조 제어기를 실현시켰다. Omani[5] 등은 상태공간형의 제어가능한 표준형에서 시스템 매개 변수와 Kalman 이득을 구할수 있는 RPE[6] (Recursive Prediction Error) 방법을 사용한 극배치 자기동조 제어기를 실현시켰다.

다입출력 시스템의 경우에는, Shieh[7] 등이 상태 공간형을 이용한 극배치 자기동조 제어기를 설계했고, Hesketh[8] 등은 출력 궤환에 의한 상태공간형의 극배치 자기동조 제어기를 설계했다. 그러나, Shieh 등의 경우에는 매 제어 사이클마다 Riccati 방정식을 풀어서 상태궤환이득을 구했으며, Hesketh 등의 경우에는, 미리 정의한 극들을 가지도록 시스템 행렬을 구해서 상태궤환이득을 구했다. 그러나 미리 정의한 극들을 가지도록 시스템 행렬을 구하려면 계산량이 많다. 한편, Fahmy[9] 등은 추정된 변수들로부터 상태궤환이득을 계산하는데 극배치 방법을 제안했는데, 이 방법을 사용하면 임의의 페루프극을 자유로이 지정할 수 있을뿐만아니라, 상태궤환이득을 쉽게 구할 수 있는 잇점이 있다.

본 논문에서는 Omani가 제안한 단일입출력에서의 자기동조 제어기를 Fahmy 등이 제안한 극배치 제어이론을 적용시켜 다입출력 시스템에 맞도록 확장적용시켰다.

2. 이 론

2.1 MIMO 이노베이션 모델의 구조

MIMO 시스템을 가장 일반적인 ARMAX모델로 표현하면

$$A(z^{-1})y(k) = B(z^{-1})u(k) + D(z^{-1})e(k) \quad \cdots(1)$$

로 주어진다. 여기서

$$A(z^{-1}) = I + A_1 z^{-1} + \cdots + A_r z^{-r}$$

$$B(z^{-1}) = B_1 z^{-1} + B_2 z^{-2} + \cdots + B_r z^{-r}$$

$$D(z^{-1}) = I + D_1 z^{-1} + \cdots + D_r z^{-r}$$

이고, z^{-1}는 시간 지연을 나타내는 연산자이고, $y(k) \in R^p$ 와 $u(k) \in R^m$는 K번째의 시스템 출력과 입력을 나타내며, $A_i \in R^{p \times p}$인 상수행렬이다. 또, $e(k) \in R^m$는 평균이 영이고, 분산(variance)행렬이 γ인 백색잡음이다. 식(1)을 Kalman이득을 이용한 상태공간에서 관측가능한 블락 이노베이션형으로 표현하면,

$$x_o(k+1) = A_o x_o(k) + B_o u(k) + K_o e(k) \quad \cdots\cdots(2a)$$

$$y_o(k) = C_o y_o(k) + e(k) \quad \cdots\cdots(2b)$$

이다. 여기서,

$$A_o \triangleq \begin{bmatrix} -A_1 & I_p & O_p & \cdots & O_p \\ -A_2 & O_p & I_p & \cdots & O_p \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -A_r & O_p & & & O_p \end{bmatrix} \qquad B_o \triangleq \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_r \end{bmatrix}$$

$$K_o \triangleq \begin{bmatrix} D_1 - A_1 \\ D_2 - A_2 \\ \vdots \\ D_r - A_r \end{bmatrix} \qquad C_o \triangleq \begin{bmatrix} I_p & O_p & \cdots & O_p \end{bmatrix}$$

이고, 첨자 $_o$는 observable의 첫자이다. I_p는 $_p$차의 단위행렬이고, O_p는 $_p$차의 영행렬이며, $A \in R^{n \times n}$ ($n = pr$)인 시스템행렬, $B \in R^{n \times m}$인 입력행렬, $K \in R^{n \times m}$는 Kalman이득행렬이다. 또한, $x(k) \in R^n$은 상태백터, $u(k) \in R^m$은 입력백터이고, $y(k) \in R^p$은 출력백터이다. 식(2)을 변환행렬(transformation matrix)을 이용해서 제어 가능한 블락 표준형으로 표현하면

$$x_c(k+1) = A_c x_c(k) + B_c u(k) + K_c e(k) \quad \cdots\cdots(3a)$$

$$y_c(k) = C_c x_c(k) + e(k) \quad \cdots\cdots(3b)$$

이다. 여기서

$$x_c(k) = \Gamma_c x_o(k)$$

$$\Gamma_c = \Gamma_c(\Gamma_o^T)^{-1}$$

$$\Gamma_c = [B_o A_o B_o \cdots A_o^{r-1} B_o]$$

$$\Gamma_o^T = [C_o^T A_o^T C_o^T \cdots (A_o^T)^{r-1} C_o^T]$$

이며,

$$A_c = \begin{bmatrix} -A_1 & -A_2 & \cdots\cdots & -A_r \\ I_p & O_p & \cdots\cdots & O_p \\ O_p & I_p & & \\ \vdots & \vdots & & \\ O_p & O_p & \cdots & I_p O_p \end{bmatrix} = T_c^{-1} A_o T_c$$

$$B_c = \begin{bmatrix} I_p \\ O_p \\ \vdots \\ O_p \end{bmatrix} = T_c^{-1} B_o \qquad K_c = \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ \vdots \\ K_r \end{bmatrix} = T_c^{-1} K_o$$

$$C_c = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & \cdots & B_r \end{bmatrix} = C_o T_c$$

이다. 여기서, 첨자 c는 controllable의 첫자이다.

2.2 RPE방법에 의한 시스템 변수와 시스템 상태 추정

식(3)으로부터 k번째에서 추정된 시스템 상태와 시스템 출력 그리고 예측 오차는 다음과 같이 표현된다.

$$\hat{x}(k+1) = A_c(\Theta_k)\hat{x}(k) + B_c(\Theta_k)u(k) + K_c(\Theta_k)\varepsilon(k) \quad (4a)$$

$$\hat{y}(k+1) = C_c(\Theta_k)\hat{x}(k+1) \quad (4b)$$

$$\varepsilon(k) = y(k) - \hat{y}(k) \quad (4c)$$

여기서, Θ_k는 k번째에서 예측된 매개 변수행렬로써,

$$\Theta_k = [\hat{A}_1\ \hat{A}_2 \cdots \hat{A}_r\ \hat{B}_1 \cdots \hat{B}_r\ \hat{K}_1 \cdots \hat{K}_r] \quad \cdots\cdots (5)$$

로 표시되고, $\hat{y}(k+1)$은 k번째에서의 예측 출력, $\hat{x}(k+1)$은 k번째에서의 추정상태벡터, $y(k)$는 k번째에서의 시스템 출력 그리고 $\varepsilon(k) \in R^p$는 예측 오차이다. 식 (4a), (4b) 및 (4c)식으로부터 예측 오차와 그의 분산으로 구성된 손실 함수[6]를 다음과 같이 정의한다.

$$V(\Theta, \Gamma) = E\{\tfrac{1}{2}\varepsilon(k)^T \Gamma^{-1} \varepsilon(k) + \log(\det \Gamma)\} \cdots\cdots\cdots (6)$$

여기서 Γ는 예측 오차의 분산행렬이며 det는 행렬식을 나타낸다. 예측 오차는 Gauss 분포를 가지므로[6], 식(6)은 음의 공산함수(negative log likelihood function)가 된다. 이제 식(6)을 최소로 하는 Θ와 Γ, 즉

$$\min_{\Theta, \Gamma} V(\Theta, \Gamma) \cdots\cdots (7)$$

을 구하는 방법을 생각하자. 식(7)을 실현하기 위해, 예측 오차 $\varepsilon(k)$의 Θ에 관한 음의 기울기를 $\Psi_k \in R^{n \times 3n}$라고 놓으면 식 (4c)로 부터

$$\Psi_k \triangleq -\left[\frac{d\,\varepsilon(k)}{d\Theta}\right]^T = \left[\frac{d\,\hat{y}(k)}{d\Theta}\right]^T \cdots\cdots\cdots (8)$$

와 같으며, 식(8)은 식 (4b)으로부터 아래와 같이 구해진다.

$$\Psi_k = W_k^T C_c^T(\Theta_k) + D_k^T \cdots\cdots\cdots (9a)$$

여기서

$$W_k \triangleq \frac{d}{d\Theta}[\hat{x}_k(\Theta_k)] \in R^{p \times 3n} \cdots\cdots\cdots (9b)$$

$$D_k \triangleq \frac{d}{d\Theta}[C_c(\Theta)\hat{x}_k]_{\Theta=\Theta_k} \in R^{p \times 3n} \cdots\cdots (9c)$$

이다. 또한 W_k는 식 (4a)로 부터

$$W_{k+1} = [A_c(\Theta_k) - K_c(\Theta_k)C_c(\Theta_k)]W_k + M_k - K_c(\Theta_k)D_k \cdots\cdots\cdots (9d)$$

와 같은 관계가 있다. 여기서

$$M_t \triangleq \frac{\partial}{\partial\Theta}[A_c(\Theta_k)\hat{x}(k) + B_c(\Theta_k)u(k) + K_c(\Theta_k)\varepsilon(k)]_{\Theta_k} \in R^{n \times 3n} \cdots (9e)$$

이다.

따라서, 위의 식(7)을 실현시키는 RPE 알고리즘은 다음과 같다.

1 단계 : 예측 오차를 구한다.

$$\varepsilon(k) = y(k) - \hat{y}(k) \cdots\cdots\cdots (10a)$$

2 단계 : 예측 오차의 분산을 구한다.

$$\Gamma_k = \Gamma_{k-1} + \frac{1}{k}[\varepsilon(k)\varepsilon(k)^T - \Gamma_{k-1}] \cdots\cdots\cdots (10b)$$

Γ_k의 초기치는 Γ_o

3 단계 : 적응 이득을 구한다.

$$L_k = P_{k-1}\Psi_k[\lambda_k\Gamma_k + \Psi_k P_{k-1}\Psi^T]^{-1} \cdots\cdots\cdots (10c)$$

4 단계 : 매개 변수를 추정한다.

$$[\Theta_k = \Theta_{k-1} + L_k\,\varepsilon(k)]_{\Theta_k \in D_s} \cdots\cdots\cdots (10d)$$

Θ_k의 초기치는 Θ_o

5 단계 : 공분산 행렬을 구한다.

$$P_k = \frac{1}{\lambda_k}[P_{k-1} - P_{k-1}\Psi_k[\lambda_k\Gamma_k + \Psi_k^T P_{k-1}\Psi_k]^{-1}\Psi_k^T P_{k-1}] \cdots\cdots\cdots (10e)$$

P_k의 초기치는 P_o

6 단계 : 시스템의 다음 상태를 예측한다.

$$\hat{x}(k+1) = A_c\hat{x}(k) + B_c u(k) + K_c\,\varepsilon(k) \cdots\cdots\cdots (10f)$$

이때 $u(k)$는 자기동조 제어입력으로서 극배치 방법으로 다음 절에서 구한다.

7 단계 : 시스템의 다음 출력을 예측한다.

$$\hat{y}(k+1) = C_c \hat{x}(k+1) \quad \cdots\cdots (10g)$$

8 단계 : $\hat{x}(k+1)$의 기울기를 구한다.

$$W_{k+1} = [A_c - K_c C_c] W_k + M_k - K_c D_k \quad \cdots\cdots (10h)$$

9 단계 : $\hat{y}(k+1)$의 기울기를 구한다.

$$\Psi_{k+1} = W_{k+1}^T C_c^T + D_{k+1}^T \quad \cdots\cdots (10i)$$

여기서 $A_c = A_c(\hat{\Theta}_k)$, $B_c = B_c(\hat{\Theta}_k)$, $C_c = C_c(\hat{\Theta}_k)$, $K_c = K_c(\hat{\Theta}_k)$이고, D_s는 안정된 영역을 의미하고, λ_k는 망각인자(forgetting factor)로

$$\lambda_k = \lambda_o \lambda_{k-1} + (1-\lambda_o) \quad \cdots\cdots (11)$$

로 표현되며, $\lambda_o = 0.95$이고, $0 < \lambda_k \leq 1$이다.

2.3 극배치 방법에 의한 MIMO 시스템의 자기동조 제어

다입출력 시스템에서 폐루프 극을 원하는 위치로 옮기기 위한 상태궤환이득과 기준입력을 정확하게 추적하기 위한 일반적인 제어입력은

$$U(k) = -K_f \hat{x}(k) + K_r y_r(k) \quad \cdots\cdots (12)$$

로 쓸수있다. 여기서, K_f는 상태궤환이득, $y_r(k) \in R^p$는 기준입력, K_r는 기준입력의 하중을 의미한다. 상태궤환이득을 구하기 위해 Fahmy의 극배치방법을 이용하면

$$K_f = [f_1\ f_2 \cdots f_n]\ [S(\lambda_1)f_1\ S(\lambda_2)f_2 \cdots S(\lambda_n)f_n]^{-1} \quad \cdots\cdots (13)$$

이다. 여기서, $f_i (i = 1, 2, \cdots n)$는 r 차의 임의의 벡터이고

$$S(\lambda_i) = [\lambda_i I_n - A_c]^{-1} B_c \quad \cdots\cdots (14)$$

로 주어지며, $\lambda_i (i=1, 2 \cdots, n)$는 미리 주어진 폐루프 극이며, $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \cdots \neq \lambda_n$이다. 무진동(dead beat)일 경우에는, $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$로 주어지며, 상태궤한이득은

$$K_f = [f_1\ O_r \cdots O_r]\ \left[S(\lambda)f_1\ \left[\frac{d}{d\lambda}S(\lambda)\right]f_1 \cdots \left[\frac{d^n}{d\lambda^n} S(\lambda)\right]f_1\right]_{\lambda=0}^{-1} \quad \cdots\cdots (15)$$

이다. 하중 K_r을 구하기 위해 식 (12)을 식 (3a), (3b)에 대입해서 폐루프 방정식을 구하면,

$$\hat{x}(k+1) = [A_c + B_c K_f]\hat{x}(k) + B_c K_r y_r + K_c e(k) \quad (16a)$$

$$\hat{y}(k+1) = C_c \hat{x}(k) + e(k) \quad \cdots\cdots (16b)$$

이다. 기준입력 $y_r(k)$에 대해 폐루프 시스템의 정상상태 출력은 $y_r(k)$가 되어야 함으로

$$\lim_{k\to\infty} E[\hat{y}(k)] = y_r(k) \quad \cdots\cdots (17)$$

로 쓸수 있다. 정상상태 출력의 평균을 식 (16b)로부터 구하면,

$$\lim_{k\to\infty} E[\hat{y}(k)] = \lim_{z\to 1} \{C_c[zI_n - A_c + B_c K_f]^{-1} B_c K_r y_r(k) + [I_n + C_c[zI_n - A_c + B_c K_f]^{-1} K_c] \cdot E[e(k)]\} \quad (18a)$$

$$= C_c[I_n - A_c + B_c K_f]^{-1} B_c K_r y_r(k) \quad \cdots\cdots (18b)$$

이므로, 식 (17)에 대입해서 하중을 구하면

$$K_r = [C_c[I_n - A_c + B_c K_f]^{-1} B_c]^{-1} \quad \cdots\cdots (19)$$

이다.

따라서, 식 (12)의 제어입력을 식 (3a) 및 (3b)에 적용시켜 시스템의 출력을 구하면,

$$y(k) = C_c(zI_n - A_c + B_c K_f)^{-1} B_c K_r y_r(k) + C_c(zI_n - A_c + B_c K_f)^{-1} K_c e(k) + e(k) \quad \cdots\cdots (20)$$

앞절의 RPE방법에 의하여 시스템 매개 변수를 추정하고, 계산된 제어입력으로 시스템의 다음 상태 및 출력을 예측하면서, 현재의 출력을 계산해서 시스템을 제어하는 방법은 아래와 같다.

가단계 : 앞절의 1단계에서 5단계까지 수행한다.

나단계 : 식 (13) 및 (14) 로부터 상태궤환이득 K_f 을 구한다. 무진동일 경우에는 식 (14) 및 (15) 를 사용한다.

다단계 : 식 (19) 로부터 기준입력의 하중 K_r 을 구한 후, 식 (12) 에서 극배치 자기동조 제어입력을 구한다.

라단계 : 계산된 제어입력으로 식 (20) 식으로부터 시스템 출력을 구한다.

마단계 : 시스템의 다음 출력을 예측하기 위해서, 앞절의 6단계에서 계산된 제어입력을 적용시킨다.

바단계 : 앞절의 7단계에서 9단계까지를 수행한다.

사단계 : 가단계로 가서 바단계까지를 계속 반복한다.

3. 결 론

본 논문에서는 시스템 잡음과 측정 잡음이 함께 존재하는 다입출력 시스템의 극배치 자기동조 제어이론을 단일입출력의 자기동조 제어이론에 근거하여 발전시켰다. 시스템 매개 변수를 추정하는데는 제어가능한 표준형에서 사용할수 있는 RPE방법을 사용하였으므로, Tsay[4]등의 경우처럼 변환행렬을 구하지 상태궤환이득을 구할수 있었다. 현재, 예제의 시뮬레이션이 진행중에 있다.

참 고 문 헌

1. Astrom, K.J. and Wittenmark, B, "On self-tuning regulator," Automatica, pp.185-199, 1973.
2. Clarke, D.W. and Gauthrop, P.J., "Self-tuning controller," Proc, IEE, Vol.122, pp.929-934, 1975.
3. Wellstead, P.E., Edmunds, T.M., Prager, D. and Zanker, P., "Self-tuning pole/zero assignment regulator," Int. J. Control, Vol.30, pp.1-26, 1979.
4. Tsay, Y.T. and Shieh, L.S, "State space approch for self-tuning feedback control with ople assignment," Proc. IEE, Vol.128, pp.93-101, 1981.
5. Omani, F.K. and Sinha, N.K., "Modified approach to state space self-tuning control with ople assignment," Proc. IEE, Vol.132, pp.257-262, 1985.
6. Ljung, L. and Soderstrom, T. Theory and practice of recursive identification, The MIT Press, London, 1983.
7. Shieh, L.S., Wang, C.T. and Tsay, Y.T., "Fast suboptimal state-space self-tuner for linear stochostic multivariable, Proc. IEE, Vol.130, pp.143-154, 1983.
8. Hesketh, T., "State space pole-placing self-tuning regulator using input-output values," Proc. IEE, Vol.129, pp.123-128, 1982.
9. Fahmy, M.M. and O'reilly, J., "On eigenstructure in linear multivariable systems," IEEE Trans. Automatic control, AC-27, pp.690-693, 1982.