

복소수 평면에서 안정한 유리함수에 의한 curve-fitting

최종호 황진권  
서울대학교 공과대학 제어계측공학과

Curve-fitting in Complex Plane by a Stable Rational Function

Chong-Ho Choi Jin-Kwon Hwang

Dept. of Control and Instrumentation Eng., Seoul National University

Abstract

An algorithm is proposed to find a stable rational function, which is frequently used in the linear system theory, by curve-fitting a given data. This problem is essentially a nonlinear optimization problem. In order to converge faster to the solution, the following method is used. First, the coefficients of the denominator polynomial are fixed and only the coefficients of the numerator polynomial are adjusted by its linear relationships. Then the coefficients of the numerator are fixed and the coefficients of the denominator polynomial are adjusted by nonlinear programming. This whole process is repeated until a convergent solution is found. The solution obtained by this method converges better than by other algorithms and its versatility is demonstrated by applying it to the design of a feedback control system and a low pass filter.

1. 서론

선형시스템의 전달함수는 대부분 유리함수 형태로 나타내며 제어기 및 필터의 설계는 주파수 영역에서 원하는 특성을 갖도록 하는 유리함수를 구하는 문제로 된다. 이때 이 함수의 분모다항식의 근이 복소수 평면(s-평면)의 왼편에 있으면 시스템은 안정하다.

이러한 유리함수를 구하는 방법으로 선형 및 비선형 계획법을 이용한 curve-fitting이 있다. 이 방법을 구한 유리함수의 값과 실제로 원하는 함수값의 오차를 유리함수의 계수들에 대한 목적함수로 만들고 이것을 최소로 하는 계수들을 찾는 것이다. 안정한 시스템을 설계하려면 이 계수들에 특별한 제약조건이 덧붙여지게 된다.

지금까지 이러한 curve-fitting 기법을 이용하여 시스템의 유리함수를 구하는 방법이 여러가지 제시되었다. Levy<sup>(1)</sup>는 일반적인 유리함수를 선형적인 방법으로 구했고 Sonathanan과 Koerner<sup>(2)</sup>는 Levy의 방법을 개선시켜 보다 나은 유리함수를 구했다. Deczky<sup>(3)</sup>는 Fletcher-Powell<sup>(4)</sup> 알고리즘을 이용하여 안정한 디지털 필터를 설계하였다.

최<sup>(5)</sup>는 원하는 전체 시스템의 전달함수를 curve-fitting에 의하여 구하고 이 전달함수에서 견실한 제어기를 계산해 내었다. 최는 전체 시스템이 안정할 조건으로부터

제약식이 있는 목적함수를 만들고 이를 최소화하기 위하여 Harwell-Subroutine Library<sup>(6)</sup>에 있는 VFO2AD 프로그램을 사용하였다. 이 프로그램은 Fletcher와 Powell의 알고리즘으로 작성한 것이다. 그런데 이러한 종류의 목적함수는 복잡하므로 이 알고리즘은 제약식과 변수가 조금만 많아도 수렴하는 해를 구하기가 어렵다.

본 연구는 이런 경우에 보다 많은 변수와 제약식에 대하여서도 수렴하는 해를 보다 쉽게 구하는 방법을 제시한다. 우선 유리함수 분모의 계수는 고정되었다고 생각하고 본자의 계수만으로 목적함수를 최소화시키고 그 다음에는 본자의 계수를 고정시키고 분모의 계수만으로 목적함수를 최소화시킨다. 그리고 이러한 과정을 수렴하는 해를 얻을 때까지 반복한다. 이렇게 하면 보다 많은 문제에 있어서 수렴하는 해를 쉽게 구할 수 있다.

본 연구에서 제시한 방법을 사용하여 견실한 제어기와 필터를 설계한 예를 보이겠다.

2. 안정한 유리함수의 선정 및 알고리즘

선형 시스템의 주파수 응답은 대부분 허수축상에서 모든 정보를 갖고 있으며 시스템을 안정하게 하기 위해서 특정한 복소수에 대해 전달함수가 어떤 주어진 값을 가져야 할 경우도 있다. 이러한 점들을 고려하여 구하려는 유리함수 G(s)를 (1.a)와 같이 나타내었다. 여기서 분모를 2차 다항식의 단위로 하여 곱한 것은 G(s)의 안정성 여부를 쉽게 판별하기 위해서이다.

$$G(s) = \frac{x(n+1)s^{m-1} + \dots + x(n+m-1)s + x(n+m)}{(s^2 + x(1)s + x(2)) \dots (s^2 + x(n-1)s + x(n))} \quad (1.a)$$

(1.a)는 분모의 차수가 항상 짝수이므로 만약 분모 다항식의 차수가 홀수인 경우에는 (1.b)와 같은 형태를 갖도록 한다.

$$G(s) = \frac{x(n+1)s^{m-1} + \dots + x(n+m-1)s + x(n+m)}{(s^2 + x(1)s + x(2)) \dots (s^2 + x(n-2)s + x(n-1))(s + x(n))} \quad (1.b)$$

유리함수 G(s)의 제약식으로 특정한 복소수  $\alpha_i, \beta_i, i=1, \dots, k$ 에 대해

$$G(\alpha_i) = \beta_i, \quad i=1, \dots, k \quad (2)$$

가 성립하도록 하고  $G(s)$ 가 안정하기 위해 분모의 계수는 모두 양이 되도록 한다.

$$x(i) \geq b(i) > 0, \quad i=1, \dots, n \quad (3)$$

여기서  $b(i)$ 는 응용성을 주기 위한 것으로 0보다 큰 수로 정하면 된다.  $G(s)$ 가  $s$ -평면 허수축 상에서 갖기를 원하는 값을  $G_d(j\omega)$ 라 하자.  $G(s)$ 를 구하기 위해서 아래와 같은 목적함수  $F(x)$ 를 만들고 이를 최소화 하자.

$$F(x) = \sum_{i=1}^{\ell} |P(\omega_i)(G(j\omega_i) - G_d(j\omega_i))|^2 \quad (4)$$

$$x = (x(1), \dots, x(n+m))^T$$

여기서  $\ell$ 는 샘플링 개수이고  $P(\omega)$ 는 주파수에 대한 가중치 함수이다. 제약조건 (2)는 복소수 함수인데 최적화 문제에 사용하기에 적합하도록 (5)와 같이 유리함수의 계수에 대한 실함수로 바꾸어 주었다.

$$C_i(x) \triangleq \text{Re}[G(\alpha_i) - \beta_i] = 0 \quad (5)$$

$$C_{k+1}(x) \triangleq \text{Im}[\text{Re}(\alpha_i) - \beta_i] = 0 \quad i=1, \dots, k$$

$G(s)$ 를 구하기 위해서는 (3)과 (5)의 제약조건을 만족시키면서 (4)의 목적함수를 최소화 시키는  $x$ 를 찾으면 된다.

비선형 계획법으로 유용하게 사용되는 것으로 Powell과 Fletcher가 개발한 metric (7) 계열의 알고리즘이 있으며 이것은 Harwell Library (6)에 VF02AD로 프로그램화되어 있다. 그러나 이 알고리즘은 변수와 제약식이 많을 경우에는 수렴이 잘 되지 않는 단점이 있다. 여기서는 이것을 개선시키기 위해서  $G(s)$ 의 분모의 계수는 고정시키고 분자의 계수는 등호 제약식 (5)를 만족시키면서 목적함수를 최소화시키도록 정하며 그 다음에는 분자 계수를 고정시키고 분모 계수는  $G(s)$ 가 안정하기 위한 조건인 (3)을 만족시키도록 하면서 Fletcher-Powell의 방법으로 목적함수를 최소화 하는 해를 구한다. 이러한 과정을 반복적으로 사용하여 계수들을 최적의 값들로 수렴시킨다. 이때 분자 계수는 선형 방정식의 해를 구함으로써 쉽게 구할 수 있다.

$G(s)$ 의 분자계수를 구하는 선형 알고리즘을 알아보자. 분자계수의 벡터  $y$ 와 가중치 행렬  $P$ 를 각각 다음과 같이 정하자.

$$y \triangleq (x(n+1), x(n+2), \dots, x(n+m))^T$$

$$P \triangleq \text{Diag}(P(1), P(2), \dots, P(\ell))$$

$G(s)$ 의 분모를 알고 있는 다항식이라 하고  $a(s)$ 로 놓으면  $G(s)$ 는  $y$ 에 대한 선형식으로 표시할 수 있다. 이 관계로부터 각 샘플링 주파수에 대해

$$Ay = d$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{(j\omega_1)^{m-1}}{a(j\omega_1)} & \frac{(j\omega_1)^{m-2}}{a(j\omega_1)} & \dots & \frac{1}{a(j\omega_1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{(j\omega_\ell)^{m-1}}{a(j\omega_\ell)} & \frac{(j\omega_\ell)^{m-2}}{a(j\omega_\ell)} & \dots & \frac{1}{a(j\omega_\ell)} \end{bmatrix}$$

$$d^T = [G_d(j\omega_1), \dots, G_d(j\omega_\ell)]$$

라는 선형식을 얻을 수 있다.

등호 제약 조건이 없는 경우의 해  $\hat{y}$ 는

$$\hat{y} = (A^{-T}A)^{-1} \begin{bmatrix} \text{Re}(Pd) \\ \text{Im}(Pd) \end{bmatrix}$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \text{Re}[PA] \\ \text{Im}[PA] \end{bmatrix}$$

로 주어진다.

(5)의 제약식이 있을 경우는 각 제약 조건의 복소수  $\alpha_i, \beta_i$ 에 대해 선형식

$$Ly = e$$

로 표시된다. 여기서  $L$ 은  $2k \times m$ 의 실행렬이고  $e$ 는  $2k \times 1$ 의 실벡터이다. 등호 제약식을 고려한 최종적인 해  $y^*$ 는

$$y^* = \hat{y} - (\bar{A}^{-T}\bar{A})^{-1} L^T (L(\bar{A}^{-T}\bar{A})^{-1} L^T)^{-1} (Ly - e)$$

로 구해진다(8).

### 3. 응용예

위에서 제시한 방법을 이용하여 제어기 및 필터를 설계해보겠다.

#### (1) 제어기의 설계

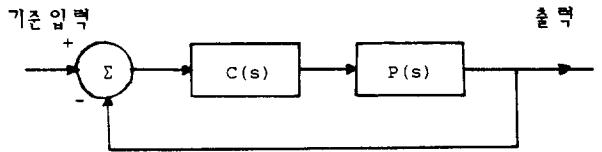


그림1. 제어시스템의 블록 다이어그램

그림 1과 같은 제어시스템에서 플랜트의 모델에 대한 오차 상한이 주어졌을 때 전체시스템의 전달함수를 먼저 구하고 이 전달함수로부터 견실한 제어기를 구할 수 있다(9).

다음은 최(5)의 논문 에 있는 예제이다.

$$\text{플랜트의 모델} \quad P_o(s) = \frac{s+2}{(s-1)(s+1)}$$

$$\text{모델 오차 상한} \quad r(s) = \frac{1}{s+1}$$

전달함수  $G(s)$ 의 분모를 3차로 분자를 2차로 놓고 불안정한 극점이 소거되지 않도록 극점  $s=1$ 과 DC 이득 주파수인  $s=0$ 에서  $G(s)$ 가 1 값을 갖도록 한다. 또한 페루우프

시스템이 안정하기 위하여  $G(s)$ 의 분모 계수의 허한값을 0.1로 주었다. 전체 시스템의 대역폭을 5.5Hz로 정하고 이범위내에서는  $G_d(j\omega)$ 에 1에 가까운 값을 주고 그 이외의 범위에서는 작은 값들을 주었는데 이 값들은 모델오차 상한 값  $r(j\omega)$ 에 대해 안정하도록 하는 범위내의 값들이다.

본 논문에서 제시한 방법에 따라 구한  $G(s)$ 는

$$G(s) = \frac{19.44s^2 + 193.3s + 0.388}{(s^2 + 45.32s + 0.1)(s + 3.68)}$$

이로 부터 제어기  $C(s)$ 는

$$C(s) = \frac{G(s)}{P_o(s)(1-G(s))} = \frac{(s+1)(19.44s^2 + 193.3s + 0.388)}{s(s+30.4)(s+2)}$$

로 구해진다.

여기서 구한  $G(s)$ 와 최(5)에서 구한  $G(s)$ 의 주파수 특성 곡선을 그림2에 나타내었다. 최의 경우는 분모다항식이 2차여서 여기서 구한  $G(s)$ 가 1에 더 가까운 것은 당연하다. 그러나  $G(s)$ 의 분모를 3차 다항식으로 하고 최의 경우처럼 VF02AD를 사용하여 해를 구하면 수렴이 잘 되지 않았다. 이는 본 논문의 방법이 VF02AD만을 사용하는 경우보다 더 수렴이 잘 된다는 것을 보여 준다.

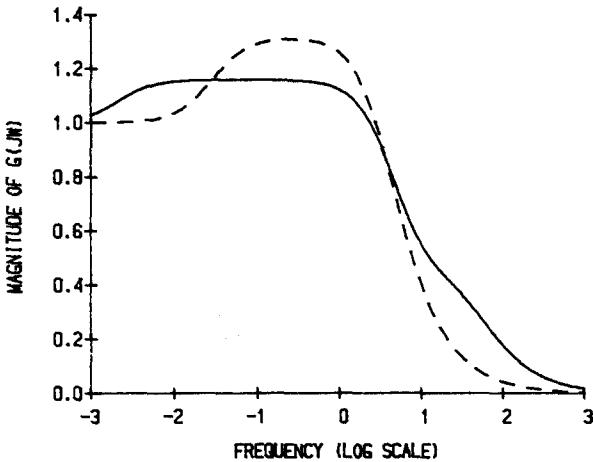


그림2.  $G(s)$ 의 주파수 특성곡선

— : 본논문의  $G(s)$ , ---- : 최(5)의  $G(s)$

#### (2) 저 대역 필터의 설계

여기서 제시된 방법을 이용하여 기존의 방법으로 설계된 저대역 필터의 특성을 개선시켜 보자.

전달함수  $H(s)$ 가(10)

$$H(s) = \frac{0.038286}{(s^2 + 0.4233s + 0.1103)(s^2 + 0.1753s + 0.3894)}$$

로 주어진 Chebyshev 필터의 주파수 특성곡선이 그림3에 실선으로 나타나 있다. 이 그림을 보면 주파수가 0인 근처에서 필터주파수 응답의 크기가 1보다 상당히 작다는 것을 알 수 있다. 이것을 보완시키기 위하여 저주파 영역에서 샘플링을 많이 하고 주파수 응답의 크기는 1에 가까운 값들을 줌으로써 이 필터를 개선시켜 보자.

새로 구하려는 필터의 전달함수  $G(s)$ 를  $H(s)$ 와 같은 형태를 갖도록 하고 필터가 안정하기 위해 분모 계수가 모두 0.01보다 크도록 한다. 이 경우에 구한 필터의 전달함수  $G(s)$ 는 다음과 같다.

$$G(s) = \frac{0.039529}{(s^2 + 0.44679s + 0.10837)(s^2 + 0.17475s + 0.38509)}$$

이  $G(s)$ 에 대한 주파수 특성 곡선은 그림3에 점선으로 나타나 있는데 원래 필터 함수  $H(s)$ 에 비하여 주파수가 0인 근처에서 주파수 응답의 크기가 1값에 많이 근접하여 개선된 것을 볼 수 있다.

이예의 필터 설계처럼 본 논문에서 제시한 방법을 이용 하면 미리 주어진 함수를 좀 더 원하는 특성에 가깝도록 개선시킬 수 있음을 알 수 있다.

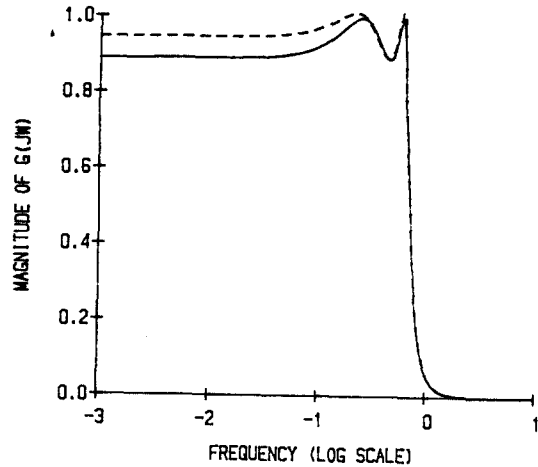


그림 3. 필터의 특성곡선

— :  $H(s)$ , ---- :  $G(s)$

#### 4. 결론 및 토의

본 논문에서는 복소수 평면에서 curve-fitting에 의한 안정한 유리함수를 구하는 방법을 제시하였으며 제어시스템 및 필터를 설계하는데 응용하여 만족한 결과를 얻었다.

본 논문에서 제시한 방법을 이용하면 유리함수의 분자와 분모가 모두 7차일 때도 수렴하는 해를 얻을 수 있었는데 이것은 분모와 분자의 계수를 따로 따로 구하기 때문에 시스템의 안정도등으로 기인하는 제약 조건들이 선형식이 되어 비선형 계획법을 사용하더라도 수렴이 잘 되었기 때문으로 추측된다.

여기서 제시한 방법은 계산시간도 별로 많이 걸리지 않고 샘플링 주파수와 가중치만을 조정하기 때문에 비교적 사용하기가 쉬우므로 원하는 유리함수를 구하는데 잘 적용되리라 기대된다.

#### 참 고 문 헌

- (1) Levy, E.C., "Complex-curve fitting," IRE Trans. on Automatic Control, vol.AC-4, pp.37-43, May 1959,
- (2) C.K. Sanathanan and J. Koerner, "Transfer function synthesis as a ratio of two complex polynomials," IEEE Trans. on Automatic Control, vol.AC-8, pp.56-58, Jan. 1963.
- (3) A.G. Deczky, "Synthesis of recursive digital filter using the minimum p-error criterion," IEEE Trans. on Audio Electroacoust, vol.AV-20, pp.257-263, Oct. 1972.
- (4) R. Fletcher and M.J.D. Powell, "A rapidly convergent descent method for minimization," Comput. J., vol.6, pp.163-168, 1963.
- (5) 최중호, "감도를 고려한 견실한 제어기의 설계," 전기학회논문지, 제 35권, pp. 136-141, 1986년 4월
- (6) M.J. Hopper, Harwell Subroutine Library, A Catalogue of Subroutines, 1981.
- (7) M. Avriel, Nonlinear Programming Analysis and Methods, pp.322-367, Prentice-Hall, 1976.
- (8) G.C. Goodwin and R.L. Payne, Dynamic System Identification Experiment Design and Data Analysis, pp.29-38, Academic Press, 1979.
- (9) H. Kimura, "Robust stabilizability for a class of transfer function," IEEE Trans. on Automatic Control, vol.AC-29, pp.788-793, Sep. 1984.
- (10) A.V. Oppenheim and R.W. Schaffer, Digital Signal Processing, pp.218-223, Prentice-Hall, 1974.