'86韓國自動制御學術會議 論文集 VOL. 1 1986. 10

KLT를 利用한 AR 스펙트럼 推定技法에 관한 硏究

°公 聖 坤, 梁 興 錫
서울大学校 電気工学科

A NEW AR POWER SPECTRAL ESTIMATION TECHNIQUE USING THE KARHUNEN-LOEVE TRANSFORM

° SEONG GON KONG, HEUNG SUK YANG
SEOUL NATIONAL UNIVERSITY

--- ABSTRACT ---

IN THIS PAPER, A NEW POWER SPECTRAL ESTIMATION TECHNIQUE IS PRESENTED. AT FIRST, BY TRANSFORMING THE ORIGINAL DATA WITH THE KARHUNEN-LOEVE TRANSFORM(KLT), WE CAN REDUCE THE AMOUNT OF THE REDUNDANT INFORMATION. NEXT, BY MODELING THE TRANSFORMED DATA BY MEANS OF THE AUTOREGRESSIVE(AR) MODEL AND THEN APPLYING THE LEAST-SQUARES PARAMETER ESTIMATION ALGORITHM TO THIS MODEL, EVEN MORE ACCURATE SPECTRUM ESTIMATES CAN BE OBTAINED.

THE KLT IS THE OPTIMUM TRANSFORM FOR SIGNAL REPRESENTATION WITH RESPECT TO THE MEAN-SQUARE ERROR CRITERION. AND THE LEAST-SQUARES METHOD IS USED TO OVERCOME THE INHERENT SHORTCOMINGS OF POPULAR BURG ALGORITHM.

1. 서 론

스펙트럼 분석은 주파수 영역에서 신호를 해석하기 위한 방법이며, 측정된 유한한 갯수의 시간영역 데이타로 부터 전력 스펙트럼 밀도 (power spectral density)를 추정하는 문제는 공학의 여러 분야에서 상당히 중요한 의미를 갖고 있다.[4,11]

이러한 스펙트럼 추정기법 중에서 periodogram, Blackman-Tukey 방법과 같은 비 파라미터적인(non-parametric) 방법은 주어진 데이타의 자기상관 함수를 직접 푸리에 변환함으로써 스펙트럼을 구하는 것인데, 주어진 데이타가 짧을 경우에는 주파수 분해능 (frequency resolution)이 나쁘고, FFT[3]를 처리하기 위해 필연적으로 수반되는 windowing 때문에 sidelobe leakage effect가 생기는 등 여러 단점이 있다.[6]

따라서 짧은 데이타에 대해서도 주파수 분해능이 좋은 파라미터적인(parametric) 방법이 널리 사용되며, 대부분의 응용에서 Autoregressive(AR) 모델이 가장 널리 사용되는데, SNR이 비교적 높은 경우에 잘 적용된다. 그러므로 신호가 잡음에 심하게 오염되었을 경우에는 이러한 잡음의 영향을 감소시키는 과정이 필요하다.

따라서 본 논문에서는 주어진 데이타를 AR model에 의해 모델링하기 이전에 먼저 적당한 직교변환(orthogonal transform)을 하여, 이 데이타에 포함된 redundancy를 제거한 후에[1,10], 이것을 AR 모델에 의해 모델링하고, 적당한 파라미터 추출 알고리즘을 사용하여 이 모델의 파라미터를 추정한 후에 스펙트럼을 합성하는 방법을 제안하였다.

[illegible] 직교변환으로는 가장 optimal한 결과를 얻을 수 있는 Karhunen-Loeve Transform(KLT)을 사용하였고, AR 파라미터 추정기법으로는, Line splitting, Biased estimates 등의 단점이 있는 Burg 알고리즘[5] 대신 최소자승법 (Least-Squares Algorithm)[2,8]을 사용하였다.

2. The Karhunen-Loeve Transform(KLT)[1]

주어진 데이타 $x_1,x_2,\ldots,x_N$을 N차원 공간의 한 vector X로 나타낼 때, NxN linear transform은

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}\ \mathbf{X} \tag{2-1}$$

으로 정의되며, 이 transform이 KLT일때는 다음과 같은 성질이 있다.

-1) $$\mathbf{A}^T = [\alpha_1\ \alpha_2\ \ldots\ \alpha_N] \tag{2-2}$$

이라고 할때 KLT basis vector α_i는 입력 데이타 x_n의 covariance matrix $\mathbf{R}_{xx}$의 eigenvector 이고 (2-3)으로 부터 구할 수 있다.

$$\mathbf{R}_{xx}\alpha_i = \beta_i\alpha_i \tag{2-3}$$

-2) $$\begin{aligned}\mathbf{R}_{yy} &= E[\mathbf{Y}\mathbf{Y}^T] = \mathbf{A}\ \mathbf{R}_{xx}\ \mathbf{A}^T \\ &= \mathrm{diag}\ [\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_N]\end{aligned} \tag{2-4}$$

$\mathbf{R}_{xx}$는 (2-5)와 같이 정의되는 real symmetric matrix이므로 eigenvalue β_i는 모두 real이고, 각각의 해당하는 eigenvector에 포함되어 있는 power를 나타낸다.

$$r_{ij} = \sum_{k=p+1}^{N} X_{k-i}X_{k-j},\ 0\le i,j\le p \tag{2-5}$$

그리고 $\mathbf{A}$는 orthogonal transform 이므로 $\mathbf{A}^T=\mathbf{A}^{-1}$이고 원래의 데이타 x_n는 (2-6)과 같이 전개될 수 있다.

$$X = \sum_{k=1}^{N} y_k \alpha_k \qquad (2\text{-}6)$$

따라서 X대신 각 α_k를 AR model에 의해 모델링하여 각 eigenspectrum을 구하고 transform coefficients y_k로 weighting하여 합성함으로써 입력 데이타 X의 power spectrum을 추정할 수 있다.

3. AR 스펙트럼 추정기법

3-1 AR modeling[7,9]

주어진 데이타 $\{x_n, n=1,2,\ldots,N\}$을 AR 모델에 의해 나타낼 수 있다고 하면, 입력을 variance가 s_e인 white noise로 했을때의 causal하고 stable한 선형 필터 B(z)의 출력으로 생각할 수 있다.

$$e_n \longrightarrow \boxed{B(z)} \longrightarrow x_n$$

$$B(z) = 1/A(z),$$

$$A(z) = 1 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_p z^{-p} \qquad (3\text{-}1)$$

이때 AR 스펙트럼 추정치 $S_{xx}(w)$는 (3-2)와 같다.

$$S_{xx}(w) = s_e^2/|B(w)|^2 \qquad (3\text{-}2)$$

3-2 Least-Squares(LS) 파라미터 추정방법[2,8]

-1) Forward prediction

x_n이 다음과 같은 $\hat{x}_n$에 의해 추정될 수 있다면,

$$\hat{x}_n = -\sum_{j=1}^{p} \hat{a}_j x_{n-j} \qquad (3\text{-}3)$$

$$\hat{e}_n = x_n - \hat{x}_n \qquad (3\text{-}4)$$

$$n = p+1, p+2, \ldots, N$$

$\hat{x}_n$을 x_n의 forward predictor라 하고, $\hat{e}_n$을 전방 예측오차라고 한다. (3-3),(3-4)를 matrix형태로 쓰면,

$$\hat{X}\,\hat{a} = \hat{y} \qquad (3\text{-}3)'$$

$$\hat{e} = \hat{y} - \hat{X}\,\hat{a} \qquad (3\text{-}4)'$$

이때,

$$\hat{X} = \begin{bmatrix} x_p, & x_{p-1}, & \ldots, x_1 \\ x_{p+1}, & x_p, & \ldots, x_2 \\ & & \\ x_{N-1}, & x_{N-2}, & \ldots, x_{N-p} \end{bmatrix}$$

$$\hat{a} = [\hat{a}_1, \hat{a}_2, \ldots, \hat{a}_p]^T$$

$$\hat{y} = [x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_N]^T$$

이고 mmse(minimum mean square error)의 조건으로 부터 모델 파라미터는 (3-5)와 같은 normal equation의 해로 주어진다.

$$\hat{R}\,\hat{a} = \hat{s} \qquad (3\text{-}5)$$

이때 $\hat{R} = \hat{X}^T\hat{X}$, $\hat{s} = \hat{X}^T\hat{y}$이다.

-2) Backward prediction

-1)에서와 마찬가지로x_n은 $\bar{x}_n$에 의해서도 추정될 수 있다.

$$\bar{x}_n = -\sum_{j=1}^{p} \bar{a}_j x_{n+j}, \qquad (3\text{-}6)$$

$$\bar{e}_n = x_n - \bar{x}_n \qquad (3\text{-}7)$$

$$n = 1, 2, \ldots, N-p$$

이것의 matrix형태는 다음과 같다.

$$\bar{X}\,\bar{a} = \bar{y} \qquad (3\text{-}6)'$$

$$\bar{e} = \bar{y} - \bar{X}\,\bar{a} \qquad (3\text{-}7)'$$

$$\bar{X} = \begin{bmatrix} x_2, & x_3, & \ldots, x_{p+1} \\ x_3, & x_4, & \ldots, x_{p+2} \\ & & \\ x_{N-p+1}, & x_{N-p+2}, & \ldots, x_{N-p} \end{bmatrix}$$

$$\bar{a} = [\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_p]^T$$

$$\bar{y} = [x_1, x_2, \ldots, x_{N-p}]^T$$

$\bar{x}_n$를 x_n의 backward predictor라 하고, $\bar{e}_n$을 후방 예측오차라고한다. 파라미터는 (3-8)의 해로 주어진다.

$$\bar{R}\,\bar{a} = \bar{s} \qquad (3\text{-}8)$$

이때 $\bar{R} = \bar{X}^T\bar{X}$, $\bar{s} = \bar{X}^T\bar{y}$ 이다

-3) Forward-Backward prediction

-1)과 -2)를 결합시킨 것으로 파라미터는 (3-9)의 해이다.

$$(\hat{R} + \bar{R})a = \hat{s} + \bar{s} \qquad (3\text{-}9)$$

4. Simulation 결과 및 결론

본 논문에서 제안한 방식의 성능을 알아보기 위하여 두가지 경우에 대해 시뮬레이션을 해 보았다. 잡음이 섞인 정현파의 주파수와 진폭을 추정하는 문제는 실제적으로도 많이 부딪치게 되는 문제이며, 모든 스펙트럼 분석 기법을 평가하는 기준으로도 많이 사용된다.

KLT를 계산하기 위한 고속 알고리즘이 없으므로 계산량은 증가하지만 짧은 데이타 및 narrow-band 신호에 대해서도 주파수 분해능이 좋다는 사실을 입증할 수 있다.

Simulation 1

사용된 데이타는 [5]에서 주어진 샘플 데이타(N=64)이고, FIG.1은 true spectrum, FIG.2는 차수를 10으로 하여 LS방법으로 구한 결과이고, FIG.3은 본 논문에서 제안한 방법의 결과를 나타낸다. 이때 각 eigenvector에 대한 AR모델의 차수는 10~15차 범위 내에서 AKAIKE의 FINAL PREDICTION ERROR(FPE) criterion에 의해 결정하였다.

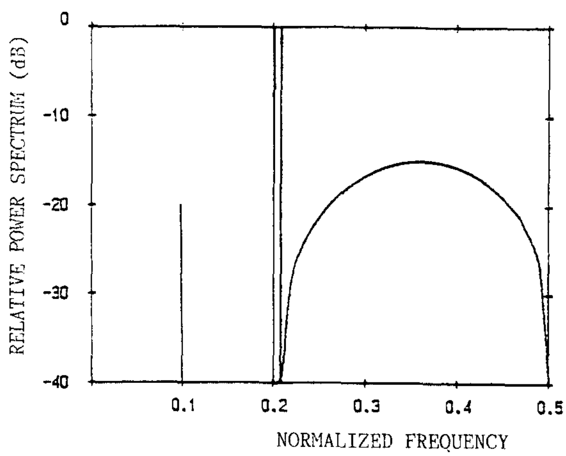

FIG. 1 TRUE SPECTRUM

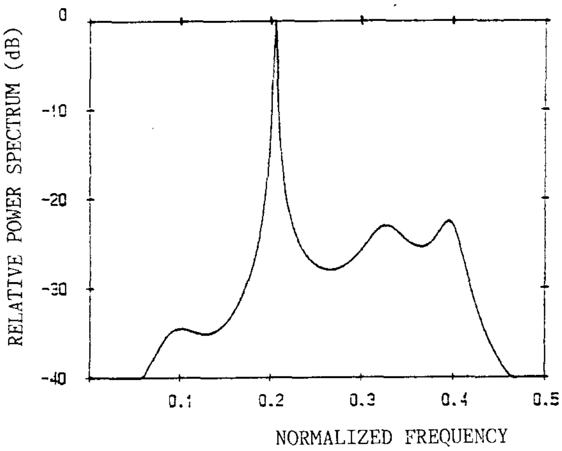

FIG.2 LS METHOD (ORDER=10)

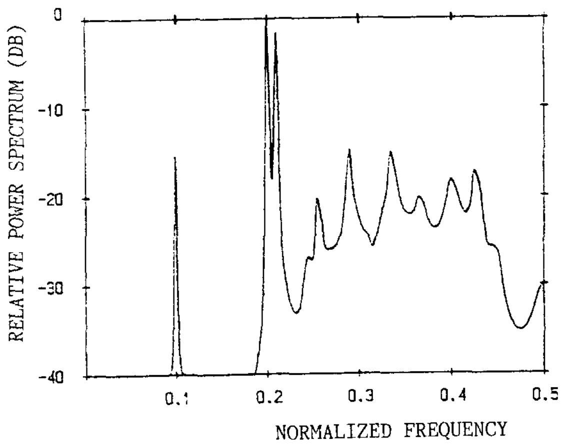

FIG.3 PROPOSED METHOD (KLT + LS)

Simulation 2

다음과 같이 2개의 정현파와 백색 가우시안 잡음 v(n)이 섞인 데이타 (N=128)가 사용되었다. (SNR = 10 dB)

$$x(n)=\sqrt{20}\sin(2\pi f_1 n)+\sqrt{20}\sin(2\pi f_2 n)+v(n)$$

where $f_1=0.2$, $f_2=0.215$

v(n):백색 가우시안 잡음 (분산=1)

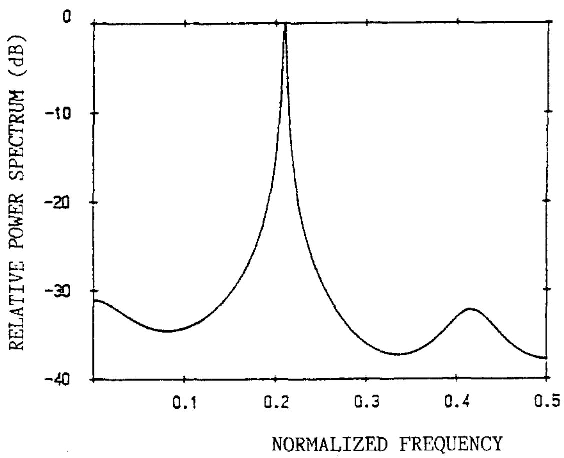

FIG.4 LS METHOD (ORDER=10)

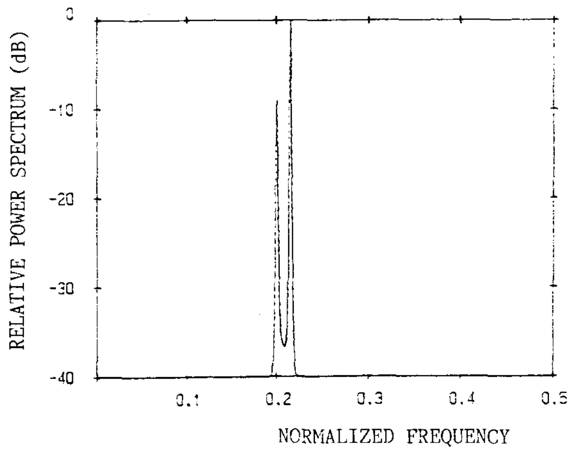

FIG.5 PROPOSED METHOD (KLT + LS)

5. 참고 문헌

[1] N.Ahmed and K.R.Rao, Orthogonal Transforms for Digital Signal Processing, New York:Springer-Verlag, 1975

[2] I.Barrodale and R.E.Erickson, "Algorithms for least-squares linear prediction and maximum entropy spectral analysis - Part I:Theory & Part II:FORTRAN Program", Geophys., vol.45, pp.420-446, Mar. 1980

[3] E.O.Brigham, The Fast Fourier Transform, New Jersey:Prentice-Hall, 1974

[4] D.G.Childers, Ed., Modern Spectrum Analysis, New York:IEEE Press, 1978

[5] S.M.Kay and S.L.Marple, "Spectrum Analysis - A Modern Perspective", Proc. IEEE, vol.69, pp.1380-1419, Nov. 1981

[6] J.Makhoul, "Linear Prediction : A Tutorial Review", Proc. IEEE, vol.63, pp.561-580, Apr. 1975

[7] J.D.Markel and A.H.Gray, Linear Prediction of Speech, Berlin:Springer-Verlag, 1976

[8] S.L.Marple, "A New Autoregressive Spectrum Analysis Algorithm", IEEE Trans. ASSP, vol. ASSP-28, pp.441-454, Aug. 1980

[9] S.L.Orfanidis, Optimum Signal Processing : An Introduction, New York:Macmillan, 1985

[10] A.Passamante and M.T.Kennedy, "Spectral Estimation using Principal components in tandem with the maximum entropy technique", in Proc. 1984, Int'l Conf. Digital Signal Processing, pp.154-157

[11] E.A.Robinson, "A Historical Perspective of Spectrum Estimation", Proc. IEEE, vol.70, pp.885-907, Sep. 1982