

차륜과 철로의 연성진동에 관한 연구

(계단진 두께를 갖는 차륜의 동특성)

김 광 식\*  
한양대학교 정밀기계공학과\*

박 문 태\*\*  
한양대학교 대학원 정밀기계공학과\*\*

A Study on the Coupled Vibration of Train wheel and Rail  
(Dynamic Characteristics of Train Wheel with the Stepped Thickness)

Kwang Sic Kim\*  
Han Yang University\*

Mun Tae Park\*\*  
Han Yang University \*\*

A B S T R A C T

The research was conducted for the purpose of examining the dynamic characteristics of train wheel at the running state and preventing the vibrations of the high speed railway. The stress at the boundary surface of web and rim,  $\sigma_c$ , was analyzed in consideration of the uniform In-plane compressive stress depending on the conditions of rolling and the rotation of train wheel. Then the equation of transverse vibration of the annular plate with the stepped thickness was analyzed by Rayleigh-Ritz's method.

1. 서론

고속차량의 진동 방지를 위한 연구의 일부로서, 차륜과 철로의 연성진동에 관한 연구가 P.J.Remington<sup>(1)(2)</sup> 등에 의하여 계속 진행되어 왔다. S.Sato and H.Matsuhisa<sup>(4)</sup>는 외력을 무시한 채 계단진 두께를 갖는 환형원판의 횡진동을 두꺼운 평판(Mindlin Plate)의 이론과 웨브(Web)와 림(Rim) 사이의 연속조건을 이용하여 해석하였다.

본 논문에서는 차륜을 등방성, 균질 재료로서 웨브와 림의 두께가 서로 다른 환형원판이며 내원주는 고정되고 외원주는 자유인 경계조건을 갖는다고 가정하였다. 외원주상의 한 점에서 철로와의 구름조건에 따라 변하는 반경방향의 반력에 의한 내평면(In-Plane) 압축응력과 원판의 회전력에 의한 내평면 압축응력을 고려하고, 두께가 변하는 웨브와 림사이의 경계면에서의 연속조건을 이용하여 경계면응력,  $\sigma_c$ 를 구한 후 횡진동 방정식을 세웠다. Rayleigh-Ritz 방법으로 수치해석을 하여 고유진동수와 임계좌굴 하중을 계산하고 실제 차륜의 1/6 크기로 형상화 하여 제작한 연성진동장치로 실험하고 이론치와 비교, 검토하였다.

2. 이론 해석

일정한 두께를 갖는 회전하는 원판의 평형방정식<sup>(5)</sup>

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \rho \Omega^2 r = 0 \quad (1)$$

으로부터 그림 1의 웨브와 림 각각의 변위, 반경방향의 응력 그리고 원주방향의 응력을 구한 후  $\gamma = c$ 인 경계면에서 다음과 같은 연속조건들을 이용하여

$$\sigma_c \cdot h_1 = \sigma_c' \cdot h_2 \quad (2)$$

$$U_w = U_r \quad (3)$$

경계면응력을 구하면  $E_1 = E_2 = E$ ,  $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ 에서 다음과 같다.

$$\sigma_c = [\bar{h} \rho \Omega^2 (b^2 - c^2)(c^2 - a^2)(b^2 - a^2)(3 + \nu) - 8 \bar{h} N b^2 (c^2 - a^2)] / 4 \cdot [\bar{h}(b^2 - c^2)\{4 - \nu\}c^2 + (1 + \nu)b^2] + (c^2 - a^2) \cdot \{(-1 - \nu)c^2 + (1 + \nu)a^2\} \quad (4)$$

윗식을 이용하여 웨브와 림 각각의 반경방향의 응력  $\sigma_{r1}$ ,  $\sigma_{r2}$ 와 원주방향의 응력  $\sigma_{\theta 1}$ ,  $\sigma_{\theta 2}$ 를 결정한다. 반경방향과 원주방향의 내평면 압축응력  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$ 를 받는 환형원판의 횡진동 방정식은 다음과 같으며<sup>(6)</sup>

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_r \frac{\partial w}{\partial r}) + \frac{\sigma_\theta}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} = \frac{D}{h} \nabla^4 w + \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (5)$$

이 식을 에너지 방정식으로 변환하여 웨브와 림에 각각 적용하면 다음과 같다.

i)  $a \leq r \leq c$  인 웨브 부분

$$V_w = \frac{\pi}{2} (1 + \delta_{on}) \cdot h_1 \int_a^c \{ \sigma_{r1} (\frac{dW_n}{dr})^2 + \sigma_{\theta 1} (\frac{n}{r} W_n)^2 \} r dr \quad (6)$$

$$U_w = \frac{\pi}{2} (1 + \delta_{on}) D_w \int_a^c [ (\frac{d^2 W_n}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dW_n}{dr} - \frac{n^2}{r^2} W_n)^2 - 2(1 - \nu) \frac{d^2 W_n}{dr^2} (\frac{1}{r} \frac{dW_n}{dr} - \frac{n^2}{r^2} W_n) + 2(1 - \nu) \cdot \frac{n^2}{r^2} (\frac{dW_n}{dr} - \frac{W_n}{r})^2 ] r dr \quad (7)$$

$$T_w = \frac{\pi}{2} (1 + \delta_{on}) \omega^2 \rho_1 h_1 \int_a^c W_n^2 r dr \quad (8)$$

ii)  $c \leq r \leq b$  인 림 부분

$$V_r = \frac{\pi}{2} (1 + \delta_{on}) \cdot h_2 \int_c^b \{ \sigma_{r2} (\frac{dW_n}{dr})^2 + \sigma_{\theta 2} (\frac{n}{r} W_n)^2 \} r dr \quad (9)$$

$$U_r = \frac{\pi}{2} (1 + \delta_{on}) \cdot D_r \int_c^b [ (\frac{d^2 W_n}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dW_n}{dr} - \frac{n^2}{r^2} W_n)^2 - 2(1 - \nu) \frac{d^2 W_n}{dr^2} (\frac{1}{r} \frac{dW_n}{dr} - \frac{n^2}{r^2} W_n) + 2(1 - \nu) \cdot \frac{n^2}{r^2} (\frac{dW_n}{dr} - \frac{W_n}{r})^2 ] r dr \quad (10)$$

$$T_r = \frac{\pi}{2} (1 + \delta_{on}) \omega^2 \rho_2 h_2 \int_c^b W_n^2 r dr \quad (11)$$

경계조건은  $r = a$ 인 내원주에서는 고정,  $r = b$ 인 외원

주에서는 자유이며 식(6) - (11)의 에너지 방정식을 이용하여 식(5)의 해를 구함으로써 차륜의 횡진동을 해석할 수 있다.

### 3. 수치 해석

Rayleigh-Ritz방법으로 실험에 사용한 1/6 크기의 차륜에 대한 고유진동수와 임계좌굴 하중을 구하였다. 형상화한 차륜과 철로의 재료가 구조용강 (S45C)이므로  $E = 2.1 \times 10^4 \text{ Kg}_f/\text{mm}^2$ ,  $\rho = 8.01 \times 10^{-10} \text{ Kg}_f \cdot \text{s}^2/\text{mm}^4$ ,  $\nu = 0.3$ 로 하였고,  $a = 25 \text{ mm}$ ,  $c = 62.5 \text{ mm}$ ,  $b = 75 \text{ mm}$  그리고  $h_1 = 5 \text{ mm}$ ,  $h_2 = 20 \text{ mm}$  를 대입한 후  $R = 0, 30, 90, 150, 210, 270, 330(\text{Kg}_f)$ ,  $\Omega = 0, 400, 800, 1200, 1600(\text{rpm})$  의 각각에 대하여 고유진동수를 구하여 표 1, 2, 3, 4, 5에 정리하였고, 임계좌굴 하중은 그림 3에 나타내었다.  $n = 6$  까지 변화시키고  $i \geq 4$  로 하여 IBM PC/370XT 로 계산하였다. 차량의 속도에 비례하는 차륜의 회전수를 1600 rpm 까지 증가시킬 때 각 모드에서 1 - 1.5 Hz 정도 증가하였고, 반력 R 을 330 Kg<sub>f</sub> 까지 증가시킬 때 각 고유진동수는 5 - 10 Hz 정도 감소하였다. 임계좌굴 하중은  $n = 1$  에서  $R_{cr} = 134650 \text{ Kg}_f$  가 되었다.

### 4. 실험 및 고찰

사진 1과 같은 실험장치를 제작하여 그림 4와 같은 방법으로 실험하였다. 하중이 없고 구르지 않는 상태의 차륜에 대한 진동수 분포는 그림 5에서 처럼 1050, 1200, 1750, 2650, 6300, 11350, 17250 (Hz) 가 되어 이론치와 약간의 오차를 발생하는데, 이것은 내평면 응력을 받는 환형원판을 해석하기 위하여 두꺼운 림 부분을 얇은 환형원판의 이론에 적용하였기 때문이며 두꺼운 평판이론에다 적용하게 되면 오차를 2% 이내로 줄일 수 있다. 1750 Hz 의 진동수는 차륜의 내원주에 결합된 회전축에서 발생하는 것으로 저차진동형에서는 회전축의 영향을 많이 받는 것으로 생각된다. 원판으로 형상화한 철로의 진동수 분포는 473, 680, 1385, 2450, 3675, 5150 (Hz) 가 되었다.

그림 6은  $R = 30 \text{ Kg}_f$  일 때의 진동수 분포인데 차륜의 회전수를 400, 800, 1200 (rpm) 으로 변화시키면 진동수는 거의 변화가 없으나 가속도 레벨은 약 3 - 15 dB 정도 높아진다. 그림 7은  $R = 90 \text{ Kg}_f$  일 때인데 역시 진동수 변화는 거의 없으나 가속도 레벨은 약 5 - 18 dB 정도 높아지고 있다. 그림 6의 (a) 와 그림 7의 (a) 를 비교하면 하중을 증가시킬 때 따라 진동수 분포는 미소하게 감소함을 알 수 있다.

### 5. 결론

고속차량의 정상적인 주행시에 차륜과 철로의 구름조건에 따라 변하는 반력을 외원주상에 균일하게 분포된 내평면

압축응력으로 유도하고, 차량의 속도에 비례하는 차륜의 회전수를 고려하여 계단진 두께를 갖는 차륜의 횡진동을 해석하고 실험해 본 결과 다음과 같은 결론들을 얻었다.

(1) 차륜의 회전수를 1600rpm(차량속도 271 Km/hr)까지

증가시킬 때 진동수는 각각의 nodal diameter 에서 1 - 1.5 Hz 정도 증가하지만 가속도 레벨은 약 15dB 증가하게 되므로 차량의 소음문제는 차량속도의 증가에 의하여 큰 영향을 받게 됨을 알 수 있다.

(2) 차륜과 철로의 구름조건에 따라 변하는 반력을 증가시키면 진동수는 감소하게 되며, 1/6 크기의 차륜에서  $R = 330 \text{ Kg}_f$  까지 증가시킬 때 각 nodal diameter 의 진동수는 5 - 10Hz정도 감소한다. 그리고 임계좌굴 하중은  $n = 1$  에서  $R_{cr} = 134650 \text{ Kg}_f$ 임을 알 수 있다.

(3) 차륜설계의 차료가 되는 웨브와 림사이의 경계면 응력  $\sigma_c$  를 연속조건을 이용하여 해석하였다.

(4)  $\nu$ ,  $h_2/h_1$  그리고  $C$  의 값을 적절히 조합하여 Rayleigh-Ritz 방법을 사용하면 차륜설계의 참고가 되는 진동수 분포를 얻을 수 있다.

### 참고 문헌

- 1) P.J.Remington, Journal of Sound and Vibration, Vol.46, No.3, pp.359-379, 1976.
- 2) M.J.Rudd, Journal of Sound and Vibration, Vol.46, No.3, pp.381-394, 1976.
- 3) P.J.Remington, Journal of Sound and Vibration, Vol.46, No.3, pp.419-436, 1976.
- 4) S.Sato and H.Matsuhisa, Bulletin of the JSME, Vol.24, No.191, pp.849-853, 1981.
- 5) A.C.Ugural and S.K.Fenster, Advanced Strength and Applied Elasticity, Elsevier, 1981.
- 6) J.Prescott, Applied Elasticity, Dover Publications, Inc., 1961.

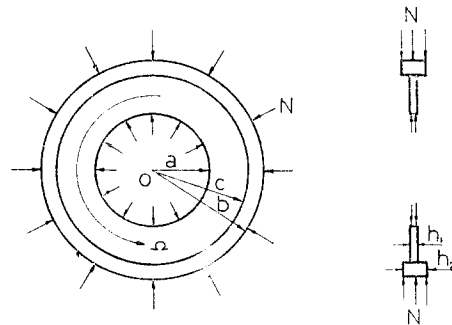


Fig. 1 Annular plate with the stepped section.

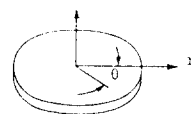


Fig. 2 Cylindrical coordinate

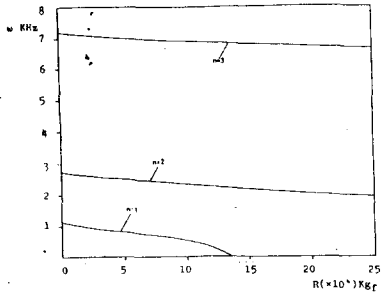


Fig. 3 Variation of buckling load versus frequency with  $n$

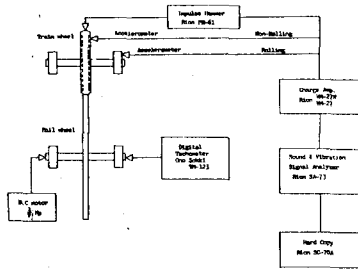


Fig. 4 Block diagram of measuring system

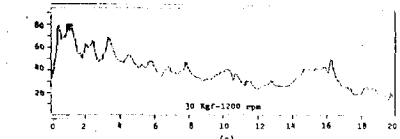
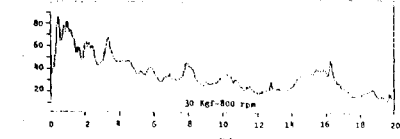
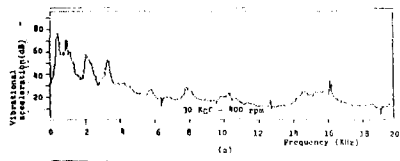


Fig. 6 Frequency distributions of the vibrational acceleration when  $R=30$  Kgr. (a)  $R=80$  Kgr. (b)  $R=80$  Kgr. (c)  $R=120$  Kgr

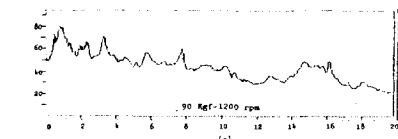
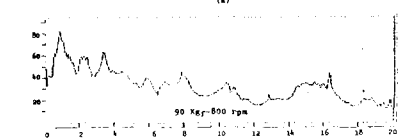
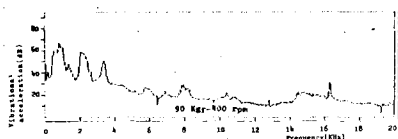


Fig. 7 Frequency distributions of the vibrational acceleration when  $R=90$  Kgr. (a)  $R=100$  Kgr. (b)  $R=80$  Kgr. (c)  $R=120$  Kgr

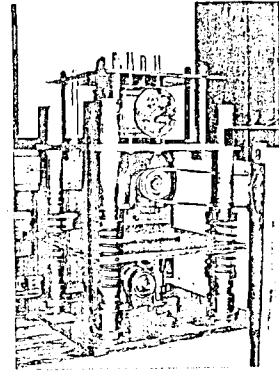


Photo 1. Experimental apparatus

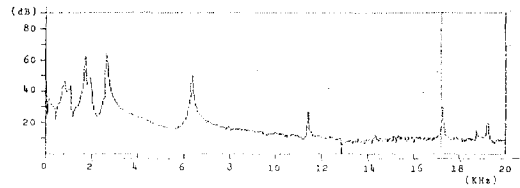


Fig. 5 Frequency distributions of vibrational acceleration of the stationary separated train wheel

Table 1. Natural Frequencies when  $G = 0$  rpm

$n$	$m$	0	30	60	120	210	270	330
0	0	1538.9	1531.7	1524.8	1521.5	1521.2	1520.6	1520.7
	1	12270.6	12221.4	12133.9	12093.5	12050.5	11993.9	11928.7
	2	118559.4	117601.5	116111.7	114662.6	112656.6	110161.6	107258.3
1	0	1184.7	1184.1	1183.1	1182.4	1181.5	1180.1	1179.3
	1	15967.5	15825.7	15703.7	15591.3	15495.1	15423.1	15366.9
	2	116229.1	116021.7	115670.0	115297.8	114976.1	114672.7	114372.8
2	0	2773.6	2777.8	2777.1	2776.4	2775.4	2774.4	2772.8
	1	29272.6	29224.9	29227.9	29221.2	29225.6	29228.5	29233.7
	2	126576.2	126711.1	126806.8	126795.3	126854.7	126871.2	126826.4
3	0	7285.1	7303.5	7322.4	7321.6	7321.5	7320.3	7319.0
	1	91119.9	91195.1	91227.6	91226.7	91221.9	91210.9	91213.7
	2	128411.6	128516.3	128717.4	128746.0	128730.0	128745.6	128795.7
4	0	13641.2	13661.1	13682.5	1366.0	13661.1	13662.1	13662.4
	1	17864.7	17922.5	17930.4	17925.8	17921.9	17921.3	17920.5
	2	132617.2	132613.1	132639.1	132622.2	132614.5	132611.2	132605.6
5	0	21733.0	21733.0	21735.5	21736.9	21735.4	21734.5	21732.6
	1	46175.8	46220.3	46169.6	46093.0	46004.3	45886.5	45687.2
	2	152499.9	152521.4	152372.5	152115.3	151719.3	151280.1	150793.0
6	0	31629.5	31629.5	31629.5	31629.2	31629.3	31629.1	31629.1
	1	55281.9	55281.9	55281.1	55285.0	55291.1	55295.9	55290.1
	2	149336.0	149312.1	149319.4	149315.7	149320.0	149321.1	149311.1

Table 2. Natural Frequencies when  $G = 1600$  rpm

$n$	$m$	0	30	60	120	210	270	330
0	0	1538.9	1535.2	1531.5	1528.2	1525.3	1522.0	1521.3
	1	12270.2	12222.3	12136.9	12099.5	12058.4	11997.8	11934.3
	2	118556.5	117606.6	116116.9	114667.2	112661.2	110166.2	107262.5
1	0	1185.7	1185.6	1184.7	1183.7	1182.7	1181.4	1180.9
	1	15958.4	15816.6	15694.6	15582.1	15485.9	15413.7	15357.3
	2	116257.6	116050.3	115698.6	115326.4	114994.7	114691.1	114391.5
2	0	2773.6	2779.2	2778.7	2777.7	2776.5	2775.1	2773.4
	1	21700.3	21723.6	21738.7	21732.2	21720.6	21715.1	21710.2
	2	120667.4	120875.4	120949.0	120780.0	120625.4	120482.3	120351.7
3	0	7285.9	7289.9	7291.3	7292.0	7292.3	7291.1	7290.4
	1	91316.2	91321.4	91322.5	91322.6	91322.6	91321.6	91320.6
	2	128469.1	128477.1	128480.9	128479.1	128476.1	128472.3	128467.6
4	0	13655.3	13664.6	13664.1	13662.8	13662.4	13661.7	13661.7
	1	17862.1	17868.1	17868.4	17867.6	17867.7	17867.2	17867.2
	2	132612.5	132606.0	132604.9	132602.2	132600.6	132598.1	132595.3
5	0	21740.3	21733.0	21727.7	21725.4	21723.9	21723.0	21721.3
	1	46194.5	46200.5	46194.5	46181.7	46160.2	46129.2	46089.4
	2	152511.7	152526.3	152467.4	152372.6	152267.3	152143.6	151993.1
6	0	31670.9	31689.3	31693.7	31691.0	31690.5	31689.1	31687.2
	1	55290.2	55275.8	55266.1	55272.4	55277.4	55282.2	55285.9
	2	149364.7	149359.6	149365.4	149359.6	149360.0	149360.0	149358.4