

# 자기회귀 잡음모델을 가진 플랜트의 일반화 최소분산제어

박 정 일 최 계 근

서울대학교 전자공학과

## Generalized Minimum Variance Control of Plant with Autoregressive Noise Model

Jung Il Park Keh Kun Choi

Dept. of Elec. Eng. Seoul National Univ.

### Abstract

In this paper we propose a Generalized Minimum Variance Self-tuning Control of the system with an autoregressive noise model.

To establish a Generalized Minimum Variance Control, the control input is also included in a cost function and a novel identity is introduced.

The effectiveness of this algorithm is demonstrated by the computer simulation.

### I. 서 론

자기조정 제어이론은 70년대초 최소분산제어를 수행하는 자기조정 레귤레이터(STR)에서 출발했으며 70년대 중반에와서 servo 문제에도 확장되어 각종의 자기조정 제어이론이 발표되었다. [1]

70년대 후반에와서 폐회로 두드레에서 극점(경우에 따라서는 영점)을 원하는 값으로 지정하는 극영 지정 자기조정제어 이론이 제안되었으며 [2] 한편으로는 최소분산 제어를 수행하는 맥락은 그대로 이어지고 있다. 70년대 초반의 최소분산형 자기조정제어 이론은 과도한 시스템 입력이 요구되고 시스템이 비최소 위상 공정(Non Minimum Phase)인 경우에는 불안정해져서 제어를 할 수가 없었다. [1] 그러나 실제 대부분의 시스템은

디지털적으로 제어될 때 비최소위상 공정의 특성을 나타낸다. [4] 그래서 근래의 최소분산형 자기조정제어 이론은 Implicit한 방법이나 Explicit한 방법 어느 것이나 비최소 위상공정 시스템의 제어에 관심을 기울이고 있다. 이러한 비최소 위상공정의 제어를 위해서 이들의 최소분산형 자기조정제어 이론들은 제어 입력을 평가함수내에 포함시키는 방법과 시스템 B(q) 다항식을 단위원 내부의 근과 외부의 근으로 분해하여 단위원 내부의 근으로 이루어진 B(q) 다항식을 이용하여 제어입력을 구하는 Factorization 방법과 단위원 내부에 있는 B(q) 다항식을 계산으로 분해하는 것이 아니라 Bilinear estimation 방법을 이용하여 추정하는 방법을 이용하고 있다. [3]

이러한 모든 이론들은 잡음모델이 이동평균(moving average) 형태이다. 본 논문은 실제 외부에서 시스템에 영향을 미치는 잡음의 모델 형태는 알 수 없다. 그래서 본 논문은 잡음모델을 자기회귀 모델이라고 가정하고 평가함수내에 제어입력을 포함시켜 시스템이 비최소위상 공정이더라도 제어를 할 수 있는 일반화 최소분산형 자기조정제어 이론을 제안한다.

### II. 일반화 최소분산형 자기조정 제어

#### 1. 자기조정 제어기의 설계

시불변 단입력 단출력 플랜트를 다음 식으로 가정한다. 단, 잡음모델은 자기회귀 모델이라고 가정한다.

$$A(q^{-1})y(k) = q^d B(q^{-1})u(k) + \frac{e(k)}{C(q)} \quad (1)$$

단,

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1 q^{-1} + a_2 q^{-2} + \dots + a_n q^{-n} \quad (2)$$

$$B(q^{-1}) = b_0 + b_1 q^{-1} + \dots + b_m q^{-m} \quad (b_0 \neq 0) \quad (3)$$

$$C(q^{-1}) = 1 + c_1 q^{-1} + c_2 q^{-2} + \dots + c_n q^{-n} \quad (4)$$

여기서  $q^{-1}$  은 backward shift operator 이고  $u(k), y(k)$  는 플랜트의 입력과 출력이다.  $A(q), B(q), C(q)$  의 차수와 시스템 delay  $d$  는 알고 있다고 가정하고  $d$  는 1 이상이다.  $e(k)$  는 평균치가 0인 백색잡음이다.  $C(q)$  의 근은 단위원내에 있다고 가정한다.

(1) 식의 양변에  $C(q)$  을 곱하여  $\bar{A}(q) \triangleq A(q)C(q), \bar{B}(q) \triangleq B(q)C(q)$  로 정의하면 (1) 식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\bar{A}(q^{-1})y(k) = q^d \bar{B}(q^{-1})u(k) + e(k) \quad (5)$$

먼저  $d$  step ahead predictor 를 정의하기 위해서 방향식  $\bar{A}(q)$  에 대해서 다음의 identity 들 도입한다.

$$\bar{A}(q^{-1})F(q^{-1}) + q^d G(q^{-1}) = 1 \quad (6)$$

단,

$$F(q^{-1}) = 1 + f_1 q^{-1} + \dots + f_{d-1} q^{-(d-1)} \quad (7)$$

$$G(q^{-1}) = g_0 + g_1 q^{-1} + \dots + g_{2n-1} q^{-(2n-1)} \quad (8)$$

여기에서 (6) 식은 (5) 식에서 결정된 Bezout identity 이다. (6) 식의 Bezout identity 는  $\bar{A}(q)$  과  $q^d$  가 서로 coprime 이므로 (6) 식의 identity 는 unique 한  $F(q)$  과  $G(q)$  의 해를 갖는다. 이때의  $A(q), C(q)$  이 모두  $n$  차이므로  $G(q)$  의 차수는  $2n-1$  차 이하이고  $F(q)$  은  $d-1$  차 이하이면 된다. 그러면  $A(q), C(q)$  로부터  $F(q), G(q)$  은 (7) 식과 (8) 식 처럼 unique 하게 결정된다. [6, 7]

(6) 식의 양변에  $y(k+d)$  를 곱하고 (5) 식을 이용하여  $d$  step 앞의 출력을 구하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$y(k+d) = \bar{B}(q^{-1})F(q^{-1})u(k) + G(q^{-1})y(k) + F(q^{-1})e(k+d) \quad (9)$$

윗식에서  $d$  step ahead predictor 출력을 다음식으로 된다.

$$\hat{y}(k+d|k) = \bar{B}(q^{-1})F(q^{-1})u(k) + G(q^{-1})y(k) \quad (10)$$

또한 prediction error 는 다음식으로 된다.

$$\varepsilon(k+d|k) = F(q^{-1})e(k+d) = y(k+d) - \hat{y}(k+d|k) \quad (11)$$

$\varepsilon(k+d|k)$ 는  $i \geq 0$ 에 대해서 모든  $y(k-i)$ 와  $u(k-i)$ 와는 무상관이다. set point  $w(k)$ 와 플랜트 입력  $u(k)$ 에 대한 분산을 최소화 하는 평가함수를 다음과 같이 정의한다.

$$J = E \{ (y(k+d) - R(w(k) + \bar{Q}u(k)))^2 + (\bar{Q}u(k))^2 | k \} \quad (12)$$

여기에서  $R$ 과  $\bar{Q}$ 는 임의의 나항식이다. (12)식은  $J = E \{ (\hat{y}(k+d|k) - R(w(k) + \bar{Q}u(k)))^2 + (\bar{Q}u(k))^2 | k \} + \sigma^2$  라고 하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$J = E \{ (\hat{y}(k+d|k) + \varepsilon(k+d|k) - R(w(k) + \bar{Q}u(k)))^2 + (\bar{Q}u(k))^2 | k \} + \sigma^2 \quad (13)$$

이제 최적제어 입력  $u(k)$ 를 구하기 위해서 (13)식의 평가함수를  $u(k)$ 에 대해서 미분하여 0으로 놓는다.

$$\frac{\partial J}{\partial u(k)} = E \{ 2(\hat{y}(k+d|k) - R(w(k) + \bar{Q}u(k))) \frac{\partial \hat{y}}{\partial u(k)} + 2\bar{Q}\bar{Q}_0 u(k) \} = 0 \quad (14)$$

여기에서  $\bar{Q}_0$ 는  $\bar{Q}(q)$  다항식의  $q^0$  계수이다.  $\partial \hat{y} / \partial u(k)$ 는 (10)식에서 보면  $\partial F(\theta)$ 이므로  $b_0$ 가 된다.  $\bar{Q}(q) \approx \bar{Q}(q) \bar{Q}_0 / b_0$ 라고 정의하면 최적조건을 만족하는 일반화 최소 분산제어 입력은 (14)식으로 부터 다음과 같이 된다.

$$\hat{y}(k+d|k) - R(w(k) + \bar{Q}u(k)) = 0 \quad (15)$$

그러므로 최적제어 입력은 다음과 같이 된다.

$$u_f(k) = -(\hat{y}(k+d|k) - R(w(k))) / \bar{Q} \quad (16)$$

(15)식과 (10)식을 이용하여  $H(q^{-1}) \triangleq BCF$ 로 정의하면 최적제어 입력은 다음과 같은 형태로도 쓸 수 있다.

$$u_f(k) = \frac{R(q^{-1})w(k) - G(q^{-1})y(k)}{H(q^{-1}) + \bar{Q}(q^{-1})} \quad (17)$$

(1)식과 (16)식을 이용하여 제어기와 플랜트의 블록도를 그리면 그림1과 같다.

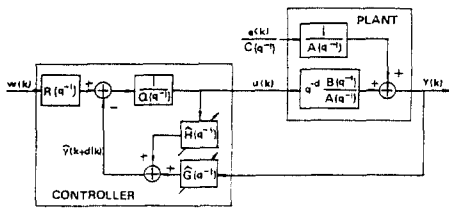


그림 1. 일반화 최소분산 제어기와 플랜트  
Fig. 1. Block diagram of generalized minimum variance controller and plant

## 2. 폐회로 루프의 시스템 특성

이제 앞에서 열거한 수식들을 이용하여 그림1의 폐회로 루프 시스템의 특성을 고찰해보기로 하자. 플랜트의 파라미터가 진치로 수렴했다고 가정하고 플랜트의 입력과 출력을 setpoint  $w(k)$ 와 외부잡음  $e(k)$ 로 나타내면 다음과 같다.

$$u(k) = \frac{AR}{B+QA} w(k) - \frac{G/C}{B+QA} e(k) \quad (18)$$

$$y(k) = \frac{BR}{B+QA} w(k) + \frac{Q/C + BF}{B+QA} e(k) \quad (19)$$

(18)식과 (19)식을 살펴보면 시스템의 특성 방정식은  $C(B+QA) = 0$ 으로 된다. 결국 set point  $w(k)$ 와 잡음  $e(k)$ 가 bound 되면  $C(B+QA)$ 의 근이 단위원 내부에 있으면 시스템 입력과 출력이 bound되어 안정해진다. 또한 시스템이 open loop 불안정한 시스템이거나 비최소위상 공칭이다라고  $Q(q)$ 의 다항식을 적절히 선정하므로써 안정한 제어를 수행할 수 있음을 알 수 있다.

## 3. 파라미터 추정

이제 (10)식을 이용하여 제어기에 이용되는 파라미터를 추정하기 위하여 다음과 같이 진치벡터와 파라미터벡터를 정의한다.

$$z^T(k) = [u(k), \dots, u(k-m-n-d+1); y(k), \dots, y(k-2n+1)] \quad (20)$$

$$\theta^T = [h_0, \dots, h_{m+n-d-1}; g_0, \dots, g_{2n-1}] \quad (21)$$

여기서  $z$ 와  $\theta$ 의 element수는  $3n+m+d$ 이고, 이것은 이동평균 잡음모델을 가진 원래의 자기조정 이론에서의 벡터 element수보다는  $n$ 개가 더 많다.

(20)식과 (21)식을 이용하여  $\hat{y}(k) = \theta^T z(k-d)$ 로 유도되는 축차 최소 사승법(Recursive Least Squares Method)을 이용하면 다음식이 유도된다. [5]

$$\hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) + P(k)z(k-d)\varepsilon(k) \quad (22)$$

$$P(k) = P(k-1) + z(k-d)z^T(k-d)P(k-1) > 0 \quad (23)$$

$$\varepsilon(k) = y(k) - \hat{\theta}^T(k-1)z(k-d) \quad (24)$$

위의 제식을 이용하여 파라미터를 축차 추정하고 이 추정된 파라미터를 진치로 보고 (17)식으로 부터 일반화 최소분산 제어입력  $u(k)$ 를 구하고 이러한 과정을 매 샘플링 순간마다 계속 반복하여 on-line적으로 원하는 제어를 할 수 있다.

## III. 시뮬레이션 및 결과검토

플랜트를 2차, 시스템 delay  $d$ 를 1로 가정하고 VAX-11/750 컴퓨터를 사용하여 시뮬레이션을 하였다. 제어할 플랜트의 특성은 다음과 같이 두었다.

$$A(q^{-1}) = 1 - 1.5q^{-1} + 0.7q^{-2} \quad (25)$$

$$B(q^{-1}) = 1 + 0.5q^{-1} \quad (26)$$

$$C(q^{-1}) = 1 - q^{-1} + 0.2q^{-2} \quad (27)$$

여기서 첨가되는 잡음은 (27)식의  $C(q)$ 을 이용하여 분산이 0.1인 백색잡음을 자기회귀 형태로 correlate시켜 분산이 0.2인 유색잡음을 인가하였다.

set point는 +10에서 -10 사이에서 100step마다 변하는 구형파로 500step까지 수행하였다.

파라미터 초기치는  $\theta(0) = [1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$  즉, 제어기의 입력을 계산할 때 분모에서 나누어지는  $h_0$ 만 1로하고 나머지 파라미터 값들은 0으로 하였다. 또  $P(0) = 10^4$  I로 하였으며 이들의 결과를 그림 2에서 그림 7까지 나타내었다. 그림중에 나타난 숫자는 그림의 scale로 나타낼 수 없는 양을 표시한 것이다.

그림 2는 플랜트에 인가된 분산이 0.2인 유색잡음이다. 그림 3은 시스템 입력에 weight를 두지않은 즉,  $Q(q) = 0$ 인 경우의 입력과 출력을 나타낸 그림이다. 초기의 과도한 진동입력은 파라미터 초기치값을 잘 설정하면이러한 과도한 입력은 줄일 수 있으나 여기서는  $h_0$ 만 1로 하고 나머지는 0인 가장 일반적인 경우에 대해서만 시뮬레이션을 하였다.

그림 4는 시스템의 파라미터 값들을 나타낸 그림이다. 플랜트가 2차, 시스템 delay  $d$ 가 1인 경우에는  $F(q)$ 가 1이므로  $s_0 = -(a_1 + c_1)$ ,  $s_1 = -(a_2 + a_1 c_1 + c_2)$ ,  $s_2 = (a_2 c_1 + c_2 a_1)$ ,  $s_3 = -a_2 c_2$ ,  $h_0 = b_0$ ,  $h_1 = b_0 c_1 + b_1$ ,  $h_2 = b_0 c_2 + b_1 c_1$ ,  $h_3 = b_1 c_2$ 로된다. (25)에서 (27)식과 같은 시스템에서는  $s_2 = 2.5$ ,  $s_1 = -2.4$ ,  $s_3 = 1.0$ ,  $s_0 = -0.14$ ,  $h_0 = 1$ ,  $h_1 = -0.5$ ,  $h_2 = -0.3$ ,  $h_3 = 0.1$ 로 수렴해야 한다. 시뮬레이션 결과 파라미터  $G(q)$ ,  $H(q)$ 의 파라미터가 약간의 bias는 있지만 잘 수렴함을 알 수 있다.

그림 5는 시스템 입력의 weight에 따른 입력 분산이고

그림 6은 이때의 시스템 입력을 나타낸 것이다. 이 결과에서 시스템 입력의 weight가 클수록 플랜트 입력의 분산이 줄어들고 또한 과도한 입력을 줄일 수 있음을 알 수 있다.

그림 7은 시스템 입력의 weight에 따른 출력분산을 나타낸 것으로 시스템 입력의 weight가 클수록 초기의 출력분산은 줄어들고 제어를 계속 수행하더라도 출력분산은 큰값으로 남아있다. 이것은 시스템 출력이 초기에는 과도한 진동이 적으나 정상상태에서는 set point에 추종을 잘하지 못함을 나타낸다. 이 결과는 (12)식에서도 명백히 알 수 있다.

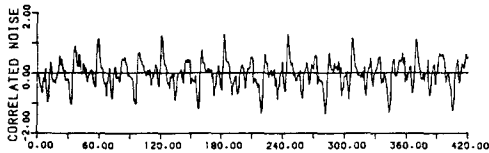


그림 2. 유색잡음  
Fig. 2. Correlated noise

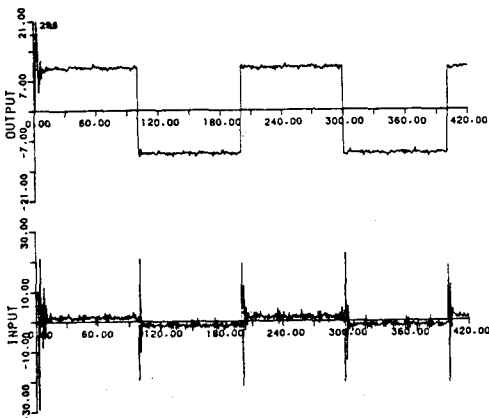


그림 3. 시스템 입력과 출력(Q=0)  
Fig. 3. System input and output, (Q=0)

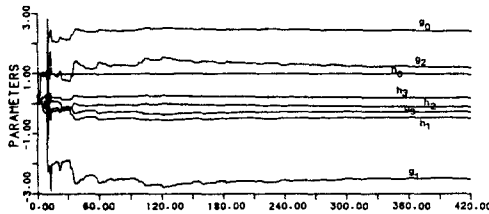


그림 4. 추정된 파라미터값  
Fig. 4. Estimated value of parameters.

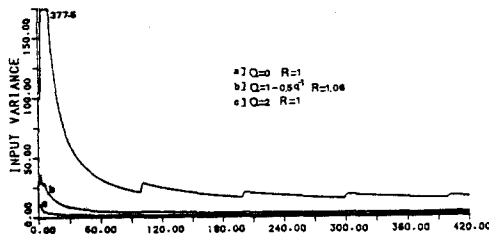


그림 5. 시스템 입력 weight의 변화에 대한 입력분산  
Fig. 5. Input variance for system input weighting changes.

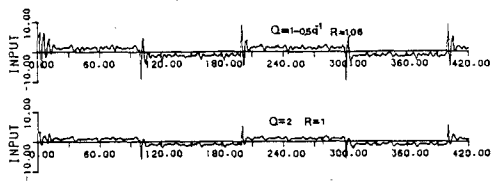


그림 6. 시스템 입력 weight의 변화에 대한 시스템입력.  
Fig. 6. System input for system input weighting changes.

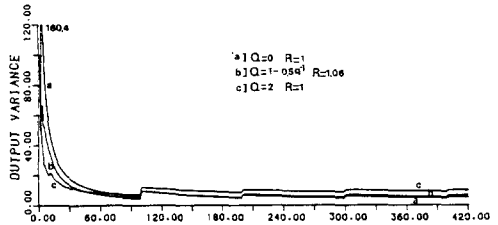


그림 7. 시스템 입력 weight의 변화에 대한 출력분산  
Fig. 7. Output variance for system input weighting changes.

#### IV. 결론

본 논문은 자기회귀(autoressive) 잡음모델을 가진 플랜트의 일반화 최소분산형 자기조정 제어기를 설계하였다. d step ahead predictor를 도입하기 위해서 새로운 등가식 Bezout identity가 도입되었다. BIBO stability 관점에서 전체 폐회로 루프 시스템의 특성을 고찰 하였다. 2차의 ARMA모델에 적용하여 시뮬레이션 한 결과 output이나 파라미터가 잘 수렴함을 알 수 있었으며 평가함수 내에 시스템 입력에 weight를 준결과 과도한 시스템 입력을 줄일수 있었다.

#### 참고 문헌

- [1] D. W. Clarke and P. J. Gawthrop, "Self-tuning control, "Proc. IEE, vol. 122, no. 9, 1975
- [2] K. J. Astrom and B. Wittenmark, "Self-tuning controllers based pole-zero placement, "Proc. IEE, vol. 127, no. 3, pp. 120-130, 1980.
- [3] M. J. Grimble, "Weighted minimum-variance self tuning control, "Int. J. Control, vol. 36, no. 4, pp597-609, 1982.
- [4] D. W. Clarke, "Self-tuning control of non-minimum-phase systems, "vol. 20, no. 5, pp. 501-517, 1984.
- [5] V. Strojic, "Least Squares Parameter Estimation, "Automatica, vol. 16, pp. 535-550, 1980.
- [6] K. J. Astrom and B. Wittenmark, Computer Controlled Systems, Prentice-Hall, Inc., 1984.
- [7] T. Kailath, Linear systems, Prentice-Hall, Inc., 1980.